בעיות

הכנה לבחינה הפסיכומטרית

מדריכים: אלעד שווייצר, ליאור כהן

המשרד לשוויון חברתי
מטה ישראל דיגיטלית

קמפוס
המיזם הלאומי ללמידה דיגיטלית

הקורס פותח בליווי ובייעוץ מקצועי של המרכז הארצי לבחינות ולהערכה (מאל"ו)

מהדורה: 919880

תוכן עניינים

ניסוי וטעייה

שאלות ניסוי וטעייה הן שאלות שנפתרות ללא צורך בנוסחאות, אלא פשוט על ידי ניסוי וטעייה. בחלק מהשאלות ישנם עקרונות מסויימים או הבנה מסוימת אשר יכולים לצמצם באופן ניכר את שלב ה"טעייה", ולעזור לנו להגיע לתשובה הנכונה מהר יותר.

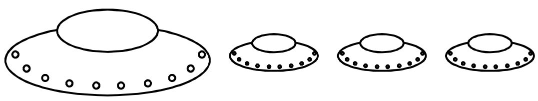
ניסוי וטעייה

שאלות בהן אין מנוס מלנסות ולטעות בדרך למציאת התשובה...

דוגמה:
אביטל משחקת במשחק המחשב "חלליות". כאשר היא פוגעת בחללית גדולה, החללית מתחלקת ל-3 חלליות קטנות. כאשר היא פוגעת בחללית קטנה, החללית נעלמת. על המסך מופיעות שתי חלליות גדולות.
מה **<u>יכול להיות</u>** מספר החלליות על המסך לאחר 3 פגיעות?

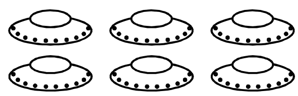
(1) 5 (2) 6 (3) 3 (4) 4

פתרון -
אין ברירה אלא לסרטט חלליות ולהתחיל "לירות" בהן. הפגיעה הראשונה חייבת להיות בחללית גדולה, ולכן לאחריה ישארו לנו חללית גדולה ו-3 קטנות:



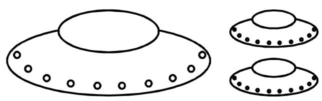
כעת נותרו שתי פגיעות נוספות - נפצל לשני מקרים:

<u>פגעה בחללית גדולה</u>



לאחר פגיעה נוספת בחללית קטנה תשארנה 5 חלליות

<u>פגעה בחללית קטנה</u>



לאחר פגיעה נוספת יכולות להישאר 2 חלליות או 5 חלליות

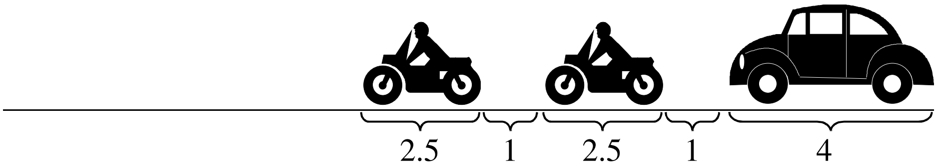
תשובה (1) נכונה.

דוגמה:
בפקק עומדים שני סוגים של כלי רכב (לפחות אחד מכל סוג) – מכוניות, שאורך כל אחת מהן הוא 4 מטרים, ואופנועים, שאורך כל אחד מהם הוא 2 מטרים וחצי. המרחק בין כל שני כלי רכב הוא 1 מטר.
מה **לא יכול** להיות האורך הכולל של הפקק (במטרים)?

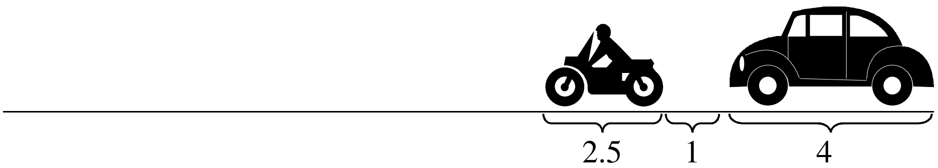
(1) 11 (2) 9 (3) $7\frac{1}{2}$ (4) $14\frac{1}{2}$

פתרון -
שוב, אין מנוס, צריך להתחיל לצייר "פקקים":

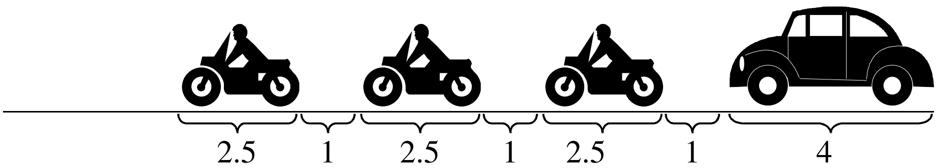
תשובה (1):



תשובה (3):



תשובה (4):



מצאנו שאורכי הפקקים המופיעים בכל התשובות ייתכנו, למעט תשובה (2). (שימו לב כי חייבים **לפחות** כלי רכב אחד מכל סוג.)

מינימום-מקסימום

שאלות אלה ניתנות לפתרון על ידי ניסוי וטעייה, אך בעזרת ההבנה של "מה צריך לעשות" כדי להגיע למינימום או למקסימום אפשר לפתור אותן מהר יותר.

דוגמה:
לנסטיה יש 20 קוקיות. נסטיה חילקה את הקוקיות שלה לחברותיה. כל אחת מהחברות של נסטיה קבלה **לפחות** קוקיה אחת, וכל אחת מהחברות קבלה מספר **שונה** של קוקיות.
מה יכול להיות המספר **הגדול** ביותר של חברות להן חילקה נסטיה את הקוקיות?

(1) 5 (2) 6 (3) 8 (4) 4

פתרון -
על מנת למצוא את מספר החברות **הגדול** ביותר האפשרי, עלינו לתת לכל חברה את מספר הקוקיות **הקטן** ביותר האפשרי.
ל-5 החברות הראשונות חילקה נסטיה בסך-הכל 15 קוקיות:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$$

כעת, נשארו לה 5 קוקיות, אך היא אינה יכולה לתת אותן לחברה נוספת, שכן אז יהיו שתי חברות שקיבלו 5 קוקיות (אסור על פי נתוני השאלה). לכן, לנסטיה אין ברירה אלא לחלק את הקוקיות שנשארו בין 5 החברות הראשונות, ולכן לא ייתכן כי היא חילקה את הקוקיות ל-6 חברות או יותר.

תשובה (1) נכונה.

הערה: נסטיה יכולה לחלק את 5 הקוקיות שנותרו בכל דרך שתרצה - החלוקה לא תשפיע על מספר החברות.

חוקיות

פרה פרה / רישום איבר איבר

בשאלות אלו בדרך כלל מתוארת חוקיות מסוימת, ואנו נדרשים להתחקות אחריה ולעבוד על פיה. הדרך הטובה ביותר היא פשוט לרשום את האיברים אחד אחד (פרה פרה), עד שמגיעים לתשובה.

דוגמה:
בתחרות אכילת ביצים, על כל מתחרה לאכול חצי מהביצים שאכל בשלב הקודם, פחות ביצה אחת. צ'ארלי אכל בשלב הראשון 30 ביצים. כמה ביצים אכל צ'ארלי בשלב הרביעי?

פתרון -
נבדוק כמה ביצים אכל צ'ארלי בכל שלב:

שלב 1	**שלב 2**	**שלב 3**	**שלב 4**
30	$\frac{30}{2} - 1 = 14$	$\frac{14}{2} - 1 = 6$	$\frac{6}{2} - 1 = 2$

מצאנו כי בשלב הרביעי אכל צ'ארלי 2 ביצים.

בשאלות חוקיות חשוב לשים לב לקצוות -
האם החישוב מתחיל כבר ביום הראשון, או רק למחרת?
האם החישוב כולל גם את היום האחרון, או רק עד אליו?

סדרות / נוסחה

בשאלות אלו התשובה המבוקשת היא נוסחה כללית ולא איבר ספציפי, ולכן אנו נדרשים להבין את החוקיות. עם זאת, מי שמתקשה מעט עם ההבנה, יכול פשוט לפתור את השאלות בעזרת הצבה.

דוגמה:

בכל שנה דני תורם לצדקה סכום גדול פי 2 מהסכום שתרם בשנה הקודמת.

אם השנה תרם דני לצדקה x שקלים, כמה יתרום בעוד n שנים?

(1) $2^{n-1} \cdot x$ (2) $n^2 \cdot x$ (3) $2^x \cdot n$ (4) $2^n \cdot x$

פתרון -

נבדוק כמה יתרום דני לצדקה בעוד 3 שנים:

השנה: x

עוד שנה: $2x$

עוד שנתיים: $4x$

עוד 3 שנים: $8x$

נבדוק באיזו מהתשובות, כאשר מציבים $n = 3$, מקבלים $8x$:

תשובה (4): $2^n \cdot x$ ← $2^3 \cdot x$ ← $8x$ ← תשובה נכונה.

תשובה (4) נכונה.

תרגול שאלות מבחינות אמת

1. בכד יש 100 כדורים. כל כדור צבוע באחד מן הצבעים הבאים: אדום, כחול או צהוב.
מספר הכדורים האדומים בכד שווה למספר הכדורים הכחולים וגדול ממספר הכדורים הצהובים.

איזה מן המספרים הבאים **יכול** להיות מספר הכדורים ה**צהובים** בכד?

(1) 15
(2) 21
(3) 30
(4) 40

---

2. מספר זוגות הנעליים של חגית הוא בין 7 ל-13 ויש לה פחות מ-5 מעילים.
לנועם יש פחות מ-6 זוגות נעליים ומספר המעילים שלו הוא בין 2 ל-8.

מספר זוגות הנעליים שיש לחגית ולנועם יחד הוא ______,
ומספר המעילים שיש להם הוא ______.

(1) בין 7 ל-18 ; בין 2 ל-12
(2) בין 7 ל-14 ; בין 2 ל-12
(3) בין 7 ל-18 ; בין 2 ל-11
(4) בין 7 ל-14 ; בין 2 ל-11

---

3. לחיים יש מטבעות של שקל אחד, של 5 שקלים ושל 10 שקלים. הוא קנה ספר ושילם תמורתו ב-4 מטבעות (ולא קיבל עודף).

איזה מהמספרים הבאים **אינו** יכול להיות מחיר הספר (בשקלים)?

(1) 16 (2) 18 (3) 21 (4) 31

---

4. כרטיס לאופרה עולה 100 שקלים, כרטיס לתאטרון עולה 50 שקלים וכרטיס לקולנוע עולה 25 שקלים.
דינה קנתה 7 כרטיסים, מתוכם 2 לתאטרון.

כמה כסף הוציאה דינה על הכרטיסים (בשקלים)?

(1) בין 225 ל-600
(2) בין 325 ל-600
(3) בין 325 ל-525
(4) בין 225 ל-700

פתרתי ____________ שאלות ב ____________ דקות, ____________ תשובות נכונות

5. מוכר בלונים מוכר בכל יום מחצית מהבלונים שברשותו, ובסוף היום הוא קונה 2 בלונים במקום כל בלון שמכר במהלך היום.

אם בתחילת יום א יש למוכר 40 בלונים, כמה בלונים יהיו ברשותו **בסוף** יום ג?

(1) 100 (2) 120 (3) 135 (4) 160

---

6. נתונה הסדרה הבאה: $1 , \frac{1}{2} , \frac{1}{4} , \frac{1}{8} ...$

איזו מהטענות הבאות **אינה** נכונה?

(1) כל איבר גדול מהאיבר שאחריו פי 2
(2) כל איבר קטן מהאיבר הקודם לו
(3) ההפרש בין כל שני איברים סמוכים קָטֵן ככל שמתקדמים בסדרה
(4) קיים איבר שלילי בסדרה

---

7. נתונים n מספרים שלמים, חיוביים **ושונים** זה מזה שסכומם 20.

מה **לא** יכול להיות ערכו של n?

(1) 6
(2) 2
(3) 3
(4) 5

---

8. במפעל לייצור מגבות ייצרו ביום מסוים 200 מגבות.
כל מגבת שמינית שיוצרה באותו יום נקשרה בסרט אדום,
וכל מגבת עשירית נקשרה בסרט כחול.

כמה מגבות נקשרו ביום זה גם בסרט אדום וגם בסרט כחול?

(1) 6 (2) 5 (3) 3 (4) 4

---

9. יובל הזמין 5 חברים ו-7 חברות למסיבת יום הולדתו, ו-8 מהמוזמנים הגיעו.
כל חבר שהגיע הביא 2 בלונים. כל חברה שהגיעה הביאה 3 בלונים.

מה הטווח המדויק של מספר הבלונים שהובאו למסיבה של יובל?

(1) 24 – 16
(2) 23 – 16
(3) 24 – 19
(4) 23 – 19

פתרתי ____________ שאלות ב ____________ דקות, ____________ תשובות נכונות

10. דורית נבחנה במבחן מסוים שבו 50 שאלות. במבחן זה מעניקים 2 נקודות על תשובה נכונה, ומורידים נקודה אחת על תשובה לא נכונה. אי-מתן תשובה אינו מעניק נקודות ואינו מוריד נקודות. דורית השיבה על 45 שאלות בלבד.

איזה מהציונים הבאים יכול להיות הציון שקיבלה דורית במבחן?

(1) 71 (2) 72 (3) 73 (4) 74

---

11. אברהם הטיל מטבע הוגן 6 פעמים. כאשר נפל המטבע על "עץ" נתן לו חברו 3 שקלים. כאשר נפל המטבע על "פלי" נתן לו חברו שקל אחד. מספר השקלים שקיבל אברהם מחברו בסך הכול מתחלק ב-5 ללא שארית.

כמה שקלים קיבל אברהם מחברו בסך הכול?

(1) 5 (2) 10 (3) 15 (4) 20

---

12. 14 כבשים רעו בשדה א'. לפחות חצי מהן קפצו מעל גדר לשדה ב'.
מהכבשים שנשארו בשדה א', לפחות 3 היו שחורות.
מספר הכבשים השחורות שקפצו משדה א' לשדה ב' הוא בין _____ ל-_____.

(1) 11 ; 0 (2) 11 ; 7 (3) 14 ; 3 (4) 14 ; 7

---

13. בטבלה מפורטים מחירי משלוח חבילות בדואר לפי משקלן.
רחל רוצה לשלוח סחורה שמשקלה הכולל 22 ק"ג, ועליה לחלק אותה ל-4 חבילות.

משקל בק"ג	מחיר בשקלים
1	2
3	5
5	8
7	9

מה המחיר **הנמוך ביותר** (בשקלים) שרחל יכולה לשלם עבור המשלוח?

(1) 33
(2) 32
(3) 29
(4) 28

---

14. במשחק "קלי קלות" משתתפים שלושה שחקנים. כל סיבוב של המשחק נמשך בדיוק 6 דקות, ובסוף כל סיבוב רק אחד מהשחקנים מנצח. יואל, מיכה ונחום החליטו לשחק במשחק "קלי קלות" עד **שאחד מהם** יצבור 3 ניצחונות.

כמה דקות **לכל היותר** הם ישחקו במשחק?

(1) 54
(2) 42
(3) 36
(4) 30

פתרתי ____________ שאלות ב ____________ דקות, ____________ תשובות נכונות

.15 מספר הבנות בכיתה הוא בין 2 ל-8, ומספר הבנים בכיתה הוא בין 4 ל-6.

מתוך כל ילדי הכיתה, החלק היחסי של הבנות הוא לכל היותר -

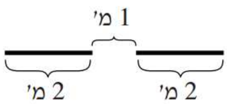
(1) $\frac{4}{7}$

(2) $\frac{1}{2}$

(3) $\frac{2}{3}$

(4) $\frac{3}{4}$

.16 בפס הפרדה מקווקו אורכו של כל קטע צבוע הוא 2 מטרים, והמרחק בין כל שני קטעים צבועים הוא מטר אחד (ראו סרטוט).



כמה קטעים צבועים לכל היותר יש לאורך כביש שאורכו 101 מטרים?

(1) 35

(2) 32

(3) 33

(4) 34

.17 לגבריאל 4 חבלים שאורכיהם 15 מטרים, 8 מטרים, 3 מטרים ו-2 מטרים.
הוא יכול לקצר כל אחד מן החבלים **פעם אחת בלבד** לכדי מחצית מאורכו על ידי קיפולו לשניים.
הוא יכול גם לחבר את החבלים (שניים או יותר) זה לזה ולקבל חבל אחד, בלי לאבד אורך.
לאחר חיבור חבלים, גבריאל אינו יכול לקפל את החבל שקיבל.

לאיזה מאורכי החבל הבאים (במטרים) **לא** יוכל גבריאל להגיע?

(1) $4\frac{1}{2}$ (2) 9 (3) 14 (4) $16\frac{1}{2}$

.18 בארנק יש 3 מטבעות של 5 שקלים ו-2 מטבעות של שקל אחד.

כמה סכומי כסף שונים אפשר לשלם במדויק באמצעות המטבעות שבארנק?

(1) 5

(2) 6

(3) 8

(4) 11

פתרתי ____________ שאלות ב ____________ דקות, ____________ תשובות נכונות

19. בכיתה של 21 תלמידים, ל- $\frac{1}{3}$ מהתלמידים יש שֵׂער ארוך. מספר הבנות בכיתה קטן ממספר הבנים בכיתה, אך גדול ממספר התלמידים שיש להם שֵׂער ארוך.

מספר **הבנים** בכיתה הוא בין _____ ל- _____.

(1) $13 ; 11$

(2) $17 ; 11$

(3) $17 ; 9$

(4) $13 ; 9$

---

20. ידוע שחקלאי העובד לבדו קוטף 10 ק"ג תפוחים בשעה. כמו כן ידוע שסיוע של **כל** חקלאי נוסף יגרום לכך שכל אחד מהחקלאים יגדיל את תפוקתו ב-2 ק"ג בשעה.
8 חקלאים קטפו תפוחים במשך שעה.

כמה ק"ג תפוחים הם קטפו בסך הכול?

(1) 96

(2) 120

(3) 168

(4) 192

תשובות

שאלה	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
תשובה	3	1	2	1	3	4	1	2	4	2

שאלה	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
תשובה	2	1	3	2	3	4	1	4	1	4

פתרתי 20 שאלות - ______________ נכונות, ______________ אחוזי הצלחה

1. תשובה (3) נכונה. שאלה 2 מתוך 20 בפרק.

בכד 100 כדורים – מספר שווה של כדורים אדומים וכדורים כחולים, ומספר קטן יותר של כדורים צהובים. אנו נשאלים איזה מהמספרים הבאים יכול להיות מספר הכדורים הצהובים. השאלה מפנה אותנו לתשובות אז נבדוק אותן.

טיפ: בהצבת תשובות, כדאי להתחיל בתשובות הנוחות יותר.

<u>נבדוק את תשובה (3):</u> אם יש 30 כדורים צהובים, יש 70 (30 – 100) אדומים וכחולים. כלומר, 35 כדורים מכל צבע. מספר זה אכן גדול מ-30. מתאים, **תשובה נכונה.**

טיפ: ברגע שמצאנו תשובה נכונה אין צורך להמשיך לבדוק את שאר התשובות, אך למען שלמות ההסבר נפסול אותן:

<u>נבדוק את תשובה (1):</u> אם יש 15 כדורים צהובים, יש 85 (15 – 100) אדומים וכחולים. מספר הכדורים האדומים והכחולים שווה ועל כן מספר כל אחד מהם צריך להיות חצי מ-85, אך מספר זה אינו שלם. התשובה נפסלת.

שימו לב שכעת ניתן לפסול גם את תשובה (2) – נבין שכאשר נחסר מ-100 מספר אי-זוגי, יישארו מספר אי-זוגי של כדורים אדומים וכחולים, מספר שאינו יכול להתחלק ב-2. נראה זאת באופן מלא:

<u>נבדוק את תשובה (2):</u> אם יש 21 כדורים צהובים, יש 79 (21 – 100) אדומים וכחולים. מספר הכדורים האדומים והכחולים שווה ועל כן מספר כל אחד מהם צריך להיות חצי מ-79, אך מספר זה אינו שלם. התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (4):</u> אם יש 40 כדורים צהובים, יש 60 (40 – 100) אדומים וכחולים. כלומר, 30 כדורים מכל צבע, אך מספר הכדורים הצהובים צריך להיות קטן יותר ממספר הכדורים הכחולים והאדומים. התשובה נפסלת.

.2 תשובה (1) נכונה. שאלה 3 מתוך 20 בפרק.

עלינו למצוא את הטווח האפשרי של מספר הנעליים של חגית ונועם ושל מספר המעילים שלהם. שימו לב שאין צורך לחשב את המינימום, שכן הוא זהה בכל התשובות (7 זוגות נעליים ו-2 מעילים).

<u>נעליים:</u> לחגית יש עד 13 זוגות נעליים, כדי לחשב את המקסימום נניח שיש לה 13. לנועם יש פחות מ-6 זוגות, ולכן המקסימום שיש לו הוא 5. בסך הכול 18 זוגות נעליים.

<u>מעילים:</u> לחגית יש פחות מ-5 מעילים, ולכן המקסימום שיש לה הוא 4. לנועם יש עד 8 מעילים, לשם חישוב המקסימום נניח שיש לו 8. בסך הכול אלה 12 מעילים.

לסיכום, מספר זוגות הנעליים שיש להם יחד הוא בין 7 ל-18 ומספר המעילים שיש להם הוא בין 2 ל-12. **תשובה (1) נכונה.**

כאמור, אין צורך לבדוק את המינימום כלל, אך נעשה זאת למען שלמות ההסבר:

<u>נעליים:</u> לחגית יש לפחות 7 זוגות נעליים, כדי לחשב את המינימום נניח שיש לה 7. לנועם יש פחות מ-6 זוגות, ולכן יכול להיות שגם אין לו כלל נעליים. בסך הכול 7 זוגות נעליים.

<u>מעילים:</u> לחגית יש פחות מ-5 מעילים, ולכן יכול להיות שגם אין לו כלל מעילים. לנועם יש לפחות 2 מעילים, לשם חישוב המינימום נניח שיש לו 2. בסך הכול אלה 2 מעילים.

.3 תשובה (2) נכונה. שאלה 6 מתוך 20 בפרק.

זוהי שאלת ניסוי וטעייה. עלינו לבדוק איזו תשובה **אינה** מתקבלת ע"י הרכבה של 4 מטבעות מבין המטבעות שיש לחיים (שקל אחד, 5 שקלים ו-10 שקלים).
<u>נבדוק את תשובה (1)</u>: ניתן להגיע לסכום 16 באמצעות 4 מטבעות ← $1 + 5 + 5 + 5$.
<u>נבדוק את תשובה (2)</u>: לא ניתן להגיע לסכום של 18 באמצעות 4 מטבעות. **תשובה נכונה.**
<u>נבדוק את תשובה (3)</u>: ניתן להגיע לסכום 21 באמצעות 4 מטבעות ← $1 + 5 + 5 + 10$.
<u>נבדוק את תשובה (4)</u>: ניתן להגיע לסכום 31 באמצעות 4 מטבעות ← $1 + 10 + 10 + 10$.

.4 תשובה (1) נכונה. שאלה 7 מתוך 20 בפרק.

עלינו לחשב את טווח הכסף שהוציאה דינה על כרטיסים. ידוע שדינה קנתה 7 כרטיסים, מתוכם 2 לתיאטרון. כרטיס לאופרה עולה 100 ₪, כרטיס לתיאטרון עולה 50 ₪ וכרטיס לקולנוע עולה 25 ₪.

ראשית, נחשב את המחיר המינימאלי אותו דינה שילמה. מכיוון שמחירו של כרטיס לקולנוע הוא הנמוך ביותר, נניח שדינה קנתה כמה שיותר כרטיסים לקולנוע. נתון שדינה קנתה 2 כרטיסים לתיאטרון ועל כן היא קנתה 5 כרטיסים לקולנוע (7 – 2). נחשב את המחיר הכולל:

$$2 \cdot 50 + 5 \cdot 25 = 100 + 125 = 225$$

שנית, נחשב את המחיר המקסימאלי אותו דינה שילמה. מכיוון שמחירו של כרטיס לאופרה הוא הגבוה ביותר, נניח ש-5 הכרטיסים הנותרים שקנתה דינה היו כרטיסים לאופרה. נחשב את המחיר הכולל:

$$2 \cdot 50 + 5 \cdot 100 = 100 + 500 = 600$$

לפיכך, דינה הוציאה בין 225 ל-600 שקלים על הכרטיסים.

---

5. תשובה (3) נכונה. שאלה 8 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – ניסוי וטעייה

בכל יום מוכר בלונים מוכר מחצית מהבלונים שברשותו ולאחר מכן קונה 2 בלונים במקום כל בלון שמכר.

<u>בתחילת יום א'</u> למוכר היו 40 בלונים. הוא מכר 20 מהם $\left(\frac{40}{2}\right)$ ונותרו לו 20 בלונים. בסוף היום הוא קנה 2 בלונים על כל בלון שמכר. לפיכך, הוא קנה 40 בלונים $(20 \cdot 2)$. בסך הכול היו לו 60 בלונים בסוף יום א' (20 בלונים שנותרו לו + 40 בלונים שקנה).

<u>בתחילת יום ב'</u> למוכר היו 60 בלונים. הוא מכר 30 מהם $\left(\frac{60}{2}\right)$ ונותרו לו 30 בלונים. בסוף היום הוא קנה 2 בלונים על כל בלון שמכר. לפיכך, הוא קנה 60 בלונים $(30 \cdot 2)$. בסך הכול היו לו 90 בלונים בסוף יום ב' (30 בלונים שנותרו לו + 60 בלונים שקנה).

<u>בתחילת יום ג'</u> למוכר היו 90 בלונים. הוא מכר 45 מהם $\left(\frac{90}{2}\right)$ ונותרו לו 45 בלונים. בסוף היום הוא קנה 2 בלונים על כל בלון שמכר. לפיכך, הוא קנה 90 בלונים $(45 \cdot 2)$. בסך הכול היו לו 135 בלונים בסוף יום ג' (45 בלונים שנותרו לו + 90 בלונים שקנה). **תשובה (3) נכונה.**

דרך ב' – פתרון מתמטי

נניח שבתחילת היום למוכר היו x בלונים. הוא מכר $\frac{x}{2}$ בלונים ועל כן נותרו לו $\frac{x}{2}$ בלונים. בסוף היום הוא קנה 2 בלונים על כל בלון שמכר, כלומר קנה פי 2 מ-$\frac{x}{2}$. על כן, בסוף כל יום קנה המוכר x בלונים $\left(\frac{x}{2} \cdot 2\right)$. לסיכום, בסוף כל יום היו למוכר $1\frac{1}{2}x$ בלונים $\left(\frac{x}{2} + x\right)$.

כפי שנתון, בתחילת יום א' היו למוכר 40 בלונים ולכן בסופו היו לו $40 \cdot 1\frac{1}{2}$ בלונים $\Leftarrow$ 60 בלונים.
בתחילת יום ב' היו למוכר 60 בלונים ולכן בסופו היו לו $60 \cdot 1\frac{1}{2}$ בלונים $\Leftarrow$ 90 בלונים.
בתחילת יום ג' היו למוכר 90 בלונים ולכן בסופו היו לו $90 \cdot 1\frac{1}{2}$ בלונים $\Leftarrow$ 135 בלונים.

6. תשובה (4) נכונה. שאלה 8 מתוך 20 בפרק.

נתונה הסדרה הבאה:

$$1\ ,\ \frac{1}{2}\ ,\ \frac{1}{4}\ ,\ \frac{1}{8}\ \dots$$

עלינו לקבוע איזו טענה אינה נכונה. נבדוק את הטענות שבתשובות.

<u>נבדוק את תשובה (1):</u> "כל איבר גדול מהאיבר שאחריו פי 2"

1 גדול מ- $\frac{1}{2}$ פי 2.

$\frac{1}{2}$ גדול מ- $\frac{1}{4}$ פי 2.

$\frac{1}{4}$ גדול מ- $\frac{1}{8}$ פי 2.

טענה נכונה, התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (2):</u> "כל איבר קטן מהאיבר הקודם לו"
כפי שהראינו לעיל, כל איבר גדול מהאיבר שאחריו. משמע, כל איבר קטן מהאיבר שקדם לו.
טענה נכונה, התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (3):</u> "ההפרש בין כל שני איברים סמוכים קטן ככל שמתקדמים בסדרה"
ההפרש בין 1 ל- $\frac{1}{2}$ הוא $\frac{1}{2}$.
ההפרש בין $\frac{1}{2}$ ל- $\frac{1}{4}$ הוא $\frac{1}{4}$.
ההפרש בין $\frac{1}{4}$ ל- $\frac{1}{8}$ הוא $\frac{1}{8}$.
ההפרש אכן קטן ככל שמתקדמים בסדרה $\left(\frac{1}{8} < \frac{1}{4} < \frac{1}{2}\right)$.
טענה נכונה, התשובה נפסלת.

טיפ: כיוון שפסלנו 3 תשובות, ניתן לסמן את תשובה (4) מבלי לבדוק אותה. למען שלמות ההסבר, נבדוק את נכונותה:

<u>נבדוק את תשובה (4):</u> "קיים איבר שלילי בסדרה"
כאמור בתשובה (1), כל איבר קטן מהאיבר הקודם לו פי 2. מאחר שכל המספרים חיוביים, מחלוקתו של מספר חיובי ב-2 תמיד תתקבל מנה חיובית. על כן, לא קיים איבר שלילי בסדרה.
הטענה אינה נכונה, **תשובה נכונה.**

7. תשובה (1) נכונה. שאלה 14 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – ניסוי וטעייה

נתונים n מספרים שלמים, חיוביים ושונים זה מזה שסכומם 20. עלינו למצוא מה **לא** יכול להיות ערכו של n.
נבדוק את התשובות.

נבדוק את תשובה (1): נחפש 6 מספרים שלמים, חיוביים ושונים שסכומם 20. נתחיל מהמספרים הקטנים ביותר האפשריים – 1 ומעלה.

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$

סכומם של המספרים הקטנים ביותר גדול מ-20. לא ניתן להקטין אף אחד מהמספרים שכן עליהם להיות שונים זה מזה וחיוביים. על כן, ערכו של n לא יכול להיות 6. **תשובה נכונה.**

טיפ: מכיוון שהצבנו את התשובות, ברגע שמצאנו תשובה נכונה אין צורך להמשיך לבדוק את שאר התשובות, אך למען שלמות ההסבר נפסול אותן:

נבדוק את תשובה (2): ישנם 2 מספרים שלמים, חיוביים ושונים שסכומם 20. למשל:

$15 + 5 = 20$

התשובה נפסלת.

נבדוק את תשובה (3): ישנם 3 מספרים שלמים, חיוביים ושונים שסכומם 20. למשל:

$10 + 7 + 3 = 20$

התשובה נפסלת.

נבדוק את תשובה (4): ישנם 5 מספרים שלמים, חיוביים ושונים שסכומם 20. למשל:

$1 + 2 + 3 + 4 + 10 = 20$

התשובה נפסלת.

דרך ב' – הבנה

נתון כי סכומם של n מספרים שלמים, חיוביים ושונים שווה ל-20. מנתוני השאלה אנו מבינים כי קיימת מגבלה מסוימת למספר האיברים שמרכיבים את הסכום (אחרת n יכול להיות שווה לכל מספר).
ניתן להבין כי אין מניעה ש-$n = 2$ (למשל: $3 + 17$), אך ברור ש-n לא יכול להיות גדול מדי אחרת לא יתאפשר שסכומם של מספרים שלמים, חיוביים ושונים יהיה רק 20, (נקצין ונגיד שברור ש-n לא יכול להיות 100 מספרים שלמים, חיובים ושונים שסכומם 20) ולכן נוכל מיד לסמן את התשובה הגדולה ביותר.

8. תשובה (2) נכונה. שאלה 15 מתוך 20 בפרק.

נתון שכל מגבת שמינית נקשרה בסרט אדום וכל מגבת עשירית נקשרה בסרט כחול. ראשית, עלינו למצוא את המגבת הראשונה שנקשרה בשני הסרטים, כלומר המגבת הראשונה שמספרה מתחלק גם ב-8 וגם ב-10 – נזהה כי זוהי המגבת ה-40 (המכנה המשותף הקטן ביותר של 8 ו-10).
לאחר שמצאנו את המגבת הראשונה, ניתן להבין כי החוקיות הזו תמשיך, ולכן כל 40 מגבות תיקשר מגבת בשני סרטים (40, 80, 120 וכן הלאה – בקפיצות של 40). נתון כי יוצרו 200 מגבות בסך הכול, ולכן מספר המגבות שנקשרו בשני הסרטים הוא 5 $\left(\frac{200}{40}\right)$. ניתן גם למנות את המגבות המתאימות (כפולות של 40 עד המגבת ה-200) – 40, 80, 120, 160, 200.

---

9. תשובה (4) נכונה. שאלה 15 מתוך 20 בפרק.

יובל הזמין 5 בנים ו-7 בנות למסיבת יום הולדתו. למסיבה הגיעו 8 מוזמנים. ידוע שכל בן הביא 2 בלונים וכל בת הביאה 3 בלונים. עלינו לחשב את טווח הבלונים האפשרי שהובאו למסיבה.

ראשית, נחשב את מספר הבלונים המקסימאלי. מאחר שכל בת מביאה 3 בלונים, נצא מנקודת הנחה שכמה שיותר בנות הגיעו, משמע כל 7 הבנות. כאמור, למסיבה הגיעו 8 מוזמנים ולכן הגיע גם בן אחד. נחשב את מספר הבלונים שהובאו למסיבה במקרה זה:

$7 \cdot 3 + 2 = 21 + 2 = 23$

שנית, נחשב את מספר הבלונים המינימאלי. כל בן מביא רק 2 בלונים ולכן נניח שכמה שיותר בנים הגיעו. כלומר כל הבנים הגיעו, 5 בנים. מכיוון שלמסיבה הגיעו בסך הכל 8 מוזמנים ומתוכם 5 בנים, למסיבה הגיעו גם 3 בנות. נחשב את מספר הבלונים שהובאו למסיבה במקרה זה:

$5 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 10 + 9 = 19$

נסכם, הטווח המדויק של מספר הבלונים שהובאו למסיבה הוא 19 – 23.

---

10. תשובה (2) נכונה. שאלה 16 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – ניסוי וטעיה

נתון כי דורית השיבה על 45 שאלות – היא קיבלה 2 נקודות על כל תשובה נכונה, ואיבדה נקודה אחת על כל תשובה לא נכונה. אי-מתן תשובה אינו משפיע, ולכן ניתן להתעלם מ-5 השאלות שעליהן דורית לא השיבה.

ניתן לראות שכל הציונים המוצעים בתשובות נמצאים באותו טווח, ועל כן עלינו לנסות להגיע לציונים בטווח זה. לשם כך, ננסה להגיע למצב שבו דורית תצבור מעט יותר נקודות מהציונים המוצעים בתשובות בזכות התשובות הנכונות, וכך הורדת הנקודות בעקבות התשובות שאינן נכונות תביא אותנו לציון מתאים.

ננסה, לדוגמה, לראות מה הציון שתקבל אם תענה על 40 תשובות נכונה וב-5 השאלות הנותרות תטעה: כל תשובה נכונה מזכה אותה ב-2 נקודות, ולכן על 40 תשובות נכונות דורית תקבל 80 נקודות ($2 \cdot 40$). כל טעות מורידה לה נקודה, ולכן 5 טעויות יורידו לה 5 נקודות. כלומר, במקרה זה הציון של דורית יהיה 75 ($80 - 5$).

הציונים המוצעים בתשובות נמוכים מציון זה, אך אנחנו מאוד קרובים. אם נשנה רק תשובה אחת מנכונה ללא נכונה (כלומר שדורית תענה על 39 שאלות נכונה במקום על 40), במקום שהתשובה תעלה את ציונה ב-2 נקודות היא תוריד לה נקודה. לכן, הציון במקרה זה יהיה נמוך ב-3 נקודות מהציון שמצאנו בבדיקה הקודמת – 72.
תשובה (2) נכונה.

ניתן גם לבדוק את הציון באופן מלא: כל תשובה נכונה מזכה את דורית ב-2 נקודות, ולכן על 39 תשובות נכונות דורית תקבל 78 נקודות ($2 \cdot 39$). כל טעות מורידה לה נקודה, ולכן 6 טעויות יורידו לה 6 נקודות. כלומר, במקרה זה הציון של דורית יהיה 72 ($78 - 6$).

דרך ב' – פתרון מתמטי

נתון כי דורית השיבה על 45 שאלות – היא קיבלה 2 נקודות על כל תשובה נכונה, ואיבדה נקודה אחת על כל תשובה לא נכונה.

נגדיר שהיו לדורית x תשובות נכונות. היא קיבלה 2 נקודות על כל תשובה נכונה, ולכן התשובות הנכונות יזכו אותה ב-$2x$ נקודות.
נתון כי דורית השיבה על 45 שאלות בסך הכול, ולכן ב-$(45 - x)$ שאלות היא טעתה. על כל תשובה שגויה היא איבדה נקודה אחת, ולכן היא הפסידה $(45 - x)$ נקודות.
לכן, ציונה יהיה:

$$2x - (45 - x) = 2x - 45 + x = 3x - 45$$

כעת, נבחן את התשובות ונבדוק איזה מהציונים אפשרי (נזכור ש-x מייצג את מספר השאלות שעליהן ענתה דורית נכונה, ולכן חייב להיות מספר שלם):

<u>נבדוק את תשובה (1)</u>:

$$3x - 45 = 71$$
$$3x = 116$$

116 אינו מתחלק ב-3, התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (2)</u>:

$$3x - 45 = 72$$
$$3x = 117$$
$$x = 39$$

הגענו ל-x שלם, ולכן זו **התשובה הנכונה**.

טיפ: שימו לב שניתן לקבוע לפי סימני חלוקה האם מספרים מתחלקים ב-3 או לא ולחסוך זמן יקר (לדוגמה, סכום הספרות של 116 (8) אינו מתחלק ב-3, ועל כן מספר זה אינו מתחלק ב-3).

11. תשובה (2) נכונה. שאלה 21 מתוך 25 בפרק.

דרך א' – ניסוי וטעייה

כאשר המטבע נפל על "עץ" אברהם קיבל 3 שקלים, וכאשר המטבע נפל על "פלי" אברהם קיבל שקל אחד. ננסה למצוא אילו 6 הטלות מעניקות לאברהם סכום אשר מתחלק ב-5.

לשם כך, נתחיל מהסכום המינימלי וממנו נעלה "שלב-שלב". הסכום המינימלי יתקבל כאשר בכל 6 ההטלות המטבע ייפול על פלי. במצב כזה אברהם יקבל בסך הכול 6 שקלים.

$$1+1+1+1+1+1=6$$

סכום זה אינו מתחלק ב-5, ועל כן נבדוק את המינימום הבא – נשנה את אחת ההטלות מ"פלי" ל"עץ". במצב כזה אברהם יקבל בסך הכול 8 שקלים.

$$1+1+1+1+1+3=8$$

גם סכום זה אינו מתחלק ב-5, ועל כן נבדוק את המינימום הבא – נשנה הטלה נוספת מ"פלי" ל"עץ". במצב כזה אברהם יקבל בסך הכול 10 שקלים.

$$1+1+1+1+3+3=10$$

קיבלנו סכום שמתחלק ב-5 ומופיע בתשובות, ועל כן **תשובה (2) נכונה.**

דרך ב' – מינימום מקסימום/חוקיות/זוגיות

ראשית, אנו יכולים להבין כי לסכום הכסף שאברהם יקבל יש טווח אשר בעזרתו נוכל לפסול חלק מהתשובות; הסכום המינימלי יתקבל אם בכל 6 ההטלות המטבע ייפול על "פלי". במצב כזה אברהם יקבל בסך הכול 6 שקלים.

$$1+1+1+1+1+1=6$$

מכאן שתשובה (1) נפסלת, שהרי היא קטנה מהסכום המינימלי האפשרי.

כעת, נמצא את סכום הכסף המקסימלי האפשרי שאברהם יכול היה לקבל; המקסימום יתקבל אם בכל 6 ההטלות המטבע ייפול על "עץ". במצב כזה אברהם יקבל בסך הכול 18 שקלים.

$$3+3+3+3+3+3=18$$

מכאן שגם תשובה (4) נפסלת, שהרי היא גדולה מהסכום המקסימלי האפשרי.

כעת, ניתן להכריע בין שתי התשובות הנותרות בעזרת <u>זוגיות</u>; הכסף שאברהם יקבל הוא למעשה סכום של 6 מספרים אי-זוגיים (1 או 3). סכום של 6 מספרים אי-זוגיים יהיה תמיד זוגי, ועל כן תשובה (3) נפסלת.

$$\overbrace{\text{אז}+\text{אז}}^{\text{זוגי}}+\overbrace{\text{אז}+\text{אז}}^{\text{זוגי}}+\overbrace{\text{אז}+\text{אז}}^{\text{זוגי}}=\text{זוגי}$$

פסלנו 3 תשובות, ועל כן **תשובה (2) נכונה**.

12. תשובה (1) נכונה. שאלה 17 מתוך 20 בפרק.

עלינו למצוא את טווח מספר הכבשים השחורות שקפצו משדה א׳ לשדה ב׳. ידוע שבסך הכל היו 14 כבשים בשדה א׳, לפחות חצי מהן קפצו לשדה ב׳ ולאחר מכן נשארו בשדה א׳ לפחות 3 כבשים שחורות.

תחילה נחשב את המספר המינימאלי של כבשים שחורות שקפצו לשדה ב׳. כאמור, ידוע שלפחות חצי מהכבשים קפצו לשדה ב׳, אולם הן אינן בהכרח שחורות. ייתכן שכל הכבשים שקפצו לשדה ב׳ הן לבנות למשל, וכל אלה שנשארו בשדה א׳ הן שחורות. על כן, המינימום הוא 0.

טיפ: כבר בשלב זה אנו יכולים לפסול את תשובות (2), (3) ו-(4) ולסמן את תשובה (1). למען שלמות ההסבר, נמשיך בבדיקה.

כדי למצוא את המספר המקסימלי של כבשים שחורות שקפצו לשדה ב׳, נניח שנשארו כמה שפחות כבשים בשדה א׳, דהיינו רק 3 הכבשים השחורות שנתון לנו שנותרו בשדה זה. על כן, 11 כבשים לכל היותר קפצו לשדה ב׳. ניתן להניח שכל הכבשים הללו הן שחורות ולכן המקסימום הוא 11.

---

13. תשובה (3) נכונה. שאלה 17 מתוך 20 בפרק.

לרחל סחורה שמשקלה הכולל הוא 22 ק״ג ועליה לחלק אותה ל-4 חבילות. נתונה טבלת מחירי משלוח לפי משקל ועלינו לקבוע מה המחיר הנמוך ביותר אותו תשלם רחל עבור המשלוח.

מהתבוננות בטבלה ניתן לראות כי ככל שהמשקל עולה, כך המחיר לק״ג יורד. משמע, המשלוח נהיה משתלם יותר ככל ששולחים יותר ק״ג בחבילה אחת.
למען שלמות ההסבר, נחשב את מחירו של ק״ג בכל חבילה. כאמור, ניתן לבצע הערכת סדר גודל ואין צורך לחשב במדויק.
בחבילה במשקל 1 ק״ג, המחיר לכל ק״ג שנשלח הוא 2 ₪.
בחבילה שמשקלה 3 ק״ג, המחיר לכל ק״ג שנשלח הוא $1\frac{2}{3}$ ₪ $\left(\frac{5}{3}\right)$.
בחבילה שמשקלה 5 ק״ג, המחיר לכל ק״ג שנשלח הוא $1\frac{3}{5}$ ₪ $\left(\frac{8}{5}\right)$.
בחבילה שמשקלה 7 ק״ג, המחיר לכל ק״ג שנשלח הוא $1\frac{2}{7}$ ₪ $\left(\frac{9}{7}\right)$.

לאור המסקנה שמצאנו לעיל, נשאף לשלוח כמה שיותר חבילות שמשקלן 7 ק״ג. אם נשלח 3 חבילות כאלה, משקל הכולל יהיה 21 ק״ג ($3 \cdot 7$) ומחירן 27 ₪ ($3 \cdot 9$). נותר לנו 1 ק״ג נוסף לשלוח, ונשלח אותו בחבילה הזולה ביותר שמחירה 2 ₪. בסך הכל המחיר המינימלי שתצטרך רחל לשלם הוא 29 ₪ ($27 + 2$).

---

14. תשובה (2) נכונה. שאלה 17 מתוך 20 בפרק.

כדי לחשב את זמן המשחק המקסימלי שהשחקנים צריכים לשחק עד שיובטח שאחד מהם יצבור 3 נקודות, נשתמש בחוק מרפי ונבדוק את המצב "הגרוע" ביותר, כלומר ננסה ליצור מצב שהשחקנים ישחקו כמה שיותר משחקים בלי מבלי שאחד מהם יצבור 3 נקודות.

הדרך לעשות זאת היא להעניק ניצחון למשתתף אחר בכל סיבוב כדי לנסות למנוע להגיע ל-3 ניצחונות של אחד המשתתפים, למשל:
בסיבוב הראשון ינצח יואל.
בסיבוב השני ינצח מיכה.
בסיבוב השלישי ינצח נחום.
בסיבוב הרביעי ינצח יואל.
בסיבוב החמישי ינצח מיכה.
בסיבוב השישי ינצח נחום.

עד כה השחקנים שיחקו שישה סיבובים ואף אחד מהם עוד לא צבר 3 נקודות. בסיבוב הבא (השביעי) המנצח יצבור את הנקודה השלישית שלו והמשחק כולו יסתיים.
לפיכך, אורך המשחק המקסימלי הוא 7 סיבובים. כל סיבוב הוא 6 דקות, ולכן אורך המחשק הכולל הוא 42 דקות $(6 \cdot 7)$.

---

15. תשובה (3) נכונה. שאלה 17 מתוך 20 בפרק.

עלינו למצוא את החלק היחסי המקסימלי של הבנות בכיתה. חלק זה הוא למעשה שבר שהמונה שלו הוא מספר הבנות בכיתה והמכנה שלו הוא מספר כל הילדים בכיתה. על מנת ששבר זה יהיה כמה שיותר גדול, המונה צריך להיות גדול ככל הניתן, והמכנה – קטן ככל הניתן. לכן, נבחר את מספר הבנות המקסימלי ואת מספר הבנים המינימלי.
מספר הבנות המקסימלי הוא 8 ומספר הבנים המינימלי הוא 4. במקרה זה יש סך הכול 12 ילדים בכיתה וחלקן של הבנות יהיה $\frac{8}{12} \Leftarrow \frac{2}{3}$.

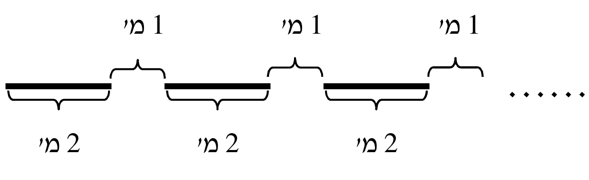
---

16. תשובה (4) נכונה. שאלה 18 מתוך 20 בפרק.

נתון כי לאורך פס הפרדה מקווקו ישנם קטעים צבועים שאורך כל אחד מהם 2 מ' ובין כל שני קטעים שכאלה יש מרחק של מטר אחד. עלינו לקבוע כמה קטעים צבועים יש לכל היותר לאורך כביש שאורכו 101 מ'. מאחר שאיננו יכולים לבדוק זאת באופן ידני, נתחיל בבדיקה כדי להבין את החוקיות.

הכביש מתחיל בקטע צבוע שאורכו 2 מ', קטע ריק של 1 מ' ולאחר מכן קטע צבוע נוסף. מתחילת הקטע הצבוע הראשון ועד תחילת הקטע הצבוע השני יש מרחק של 3 מ'. מתחילת הקטע הצבוע השני ועד תחילת הקטע הצבוע השלישי ישנו מרחק של 3 מ' נוספים וכך הלאה. כלומר, לאחר כל 3 מ' מתחיל קטע צבוע חדש.

כעת, משמצאנו את החוקיות, נבין כמה קטעים שאורכם 3 מ' יש בכביש שאורכו 101 מ'. המספר הקרוב ביותר ל-101 שמתחלק ב-3 הוא 99. לאורך 99 מ' ישנם 33 קטעים צבועים $\left(\frac{99}{3}\right)$. מכיוון שהתחלנו בקטע צבוע, כביש זה מסתיים בקטע שאינו צבוע, כך:



לאחר 33 הקטעים הללו (שאורכם כאמור 99 מ'), נותר לנו עוד קטע כביש באורך 2 מטרים (אורך הכביש הכולל הוא 101 מ') בו ניתן להכניס קטע צבוע נוסף. כלומר, לאורך הכביש הנ"ל יש לכל היותר 34 קטעים צבועים.

---

17. תשובה (1) נכונה. שאלה 18 מתוך 20 בפרק.

לגבריאל 4 חבלים באורכים 15 מ׳, 8 מ׳, 3 מ׳ ו-2 מ׳. גבריאל יכול לקצר כל אחד מהחבלים לחצי מאורכו באמצעות קיפולו לשניים. עלינו לקבוע לאיזה מאורכי החבל שבתשובות לא יוכל להגיע גבריאל.

<u>נבדוק את תשובה (1):</u> כדי להגיע לאורך של $4\frac{1}{2}$ מ׳, יצטרך גבריאל לחצות את אחד החבלים כך שאורכו לא יהיה שלם. משמע, גבריאל בהכרח ישתמש בחבל שאורכו המקורי אי-זוגי (15 מ׳ או 3 מ׳).
אם יחצה גבריאל את החבל שאורכו 15 מ׳ הוא יגיע לאורך של $7\frac{1}{2}$ מ׳. אפשרות זו ארוכה מדי.
אם יחצה גבריאל את החבל שאורכו 3 מ׳ הוא יגיע לאורך של $1\frac{1}{2}$ מ׳. כדי להגיע לאורך הרצוי של $4\frac{1}{2}$ מ׳, יצטרך גבריאל להוסיף לחבל החצוי עוד 3 מ׳. מאחר שלא קיים חבל נוסף באורך זה, או לחלופין חבל באורך 6 מ׳ שניתן לחצות, אורך זה אינו אפשרי. **תשובה נכונה.**

טיפ: מכיוון שהצבנו את התשובות, ברגע שמצאנו תשובה נכונה אין צורך להמשיך לבדוק את שאר התשובות, אך למען שלמות ההסבר נפסול אותן:

<u>נבדוק את תשובה (2):</u> כדי להגיע לאורך של 9 מ׳, יוכל גבריאל לחצות את החבל שאורכו 2 מ׳ ולהגיע לחבל שאורכו 1 מ׳. אליו יחבר את החבל שאורכו 8 מ׳.

<u>נבדוק את תשובה (3):</u> כדי להגיע לאורך של 14 מ׳ יוכל גבריאל לחצות כל חבל שברשותו (הוא יוותר עם חבלים שאורכיהם 7.5 מ׳, 4 מ׳, 1.5 מ׳ ו-1 מ׳) ולחבר את כולם.

<u>נבדוק את תשובה (4):</u> כדי להגיע לאורך של $16\frac{1}{2}$ מ׳, יוכל גבריאל לחצות את החבל שאורכו 3 מ׳ ולהגיע לחבל שאורכו $1\frac{1}{2}$ מ׳. אליו יחבר את החבל שאורכו 15 מ׳.

---

18. תשובה (4) נכונה. שאלה 18 מתוך 20 בפרק.

בשאלה זו אנו מתבקשים לקבוע כמה סכומי כסף שונים ניתן לשלם במדויק באמצעות 3 מטבעות של 5 שקלים ו-2 מטבעות של שקל אחד. נמנה את האפשרויות ידנית ובאופן מסודר.

ניתן להשתמש רק במטבעות של 5 שקלים:
מטבע אחד – 5 ₪, שני מטבעות – 10 ₪, שלושה מטבעות – 15 ₪. 3 אפשרויות.

ניתן להשתמש רק במטבעות של שקל:
מטבע אחד – 1 ₪, שני מטבעות – 2 ₪. 2 אפשרויות.

כעת נשלב בין המטבעות:

מטבע אחד של 5 ₪ ומטבע אחד של 1 ₪ ⇐ 6 ₪.
מטבע אחד של 5 ₪ ושני מטבעות של 1 ₪ ⇐ 7 ₪.

שני מטבעות של 5 ₪ ומטבע אחד של 1 ₪ ⇐ 11 ₪.
שני מטבעות של 5 ₪ ושני מטבעות של 1 ₪ ⇐ 12 ₪.

שלושה מטבעות של 5 ₪ ומטבע אחד של 1 ₪ ⇐ 16 ₪.
שלושה מטבעות של 5 ₪ ושני מטבעות של 1 ₪ ⇐ 17 ₪.

בסך הכול ישנן 11 אפשרויות (2 + 2 + 2 + 2 + 3).

---

19. תשובה (1) נכונה. שאלה 20 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – ניסוי וטעייה

בכיתה של 21 תלמידים, ל- $\frac{1}{3}$ מהתלמידים יש שער ארוך. כלומר, ל-7 תלמידים יש שער ארוך $\left(\frac{21}{3}\right)$. ידוע שמספר הבנות בכיתה קטן ממספר הבנים בכיתה וגדול ממספר התלמידים שיש להם שער ארוך. עלינו למצוא את טווח מספר הבנים בכיתה.

מספר הבנות בכיתה גדול ממספר התלמידים שיש להם שיער ארוך. כלומר, מספר הבנות המינימלי יכול להיות 8 (1 + 7). במקרה זה, מספר הבנים בכיתה יהיה 13 (8 – 21).

מספר הבנות בכיתה קטן ממספר הבנים בכיתה. על כן, מספר הבנות המקסימלי יכול להיות 10, שכן כל מספר גבוה מ-10 יביא לכך שהבנות יהוו רוב בכיתה. במקרה זה, מספר הבנים בכיתה יהיה 11 (10 – 21).

לסיכום, מספר הבנים בכיתה הוא בין 11 ל-13.

דרך ב' – הצבת תשובות

נציב את התשובות ונראה איזו תשובה מהווה את הטווח המדויק של מספר הבנים בכיתה.
לפי התשובות מספר הבנים המינימאלי הוא 9 או 11. עלינו לבדוק את המספר הקטן יותר מבין האופציות (9) כדי להכריע האם הוא הקצה התחתון ביותר של הטווח. מפני שאם אלו האופציות היחידות, 11 בוודאות אפשרי, אך אין זה אומר שהוא המספר הקטן ביותר (אלא רק שהוא אפשרי) ובהחלט יתכן שגם 9 יקיים את הנתונים:
אם בכיתה ישנם 9 בנים, אזי ישנן 12 בנות (9 – 21). במקרה זה יש רוב בנות בכיתה, עובדה שאינה מתיישבת עם הנתונים. על כן, המספר המינימאלי של בנים בכיתה הוא 11 ולא 9. תשובות (3) ו- (4) נפסלות.

עתה נבדוק את הקצה המקסימאלי – האם בכיתה ישנם 13 או 17 בנים. על פי אותה הבנה, כעת נבדוק את התשובה הגדולה יותר מבין האפשרויות כדי לקבוע מהו מספר הבנים המקסימאלי בכיתה:
הואיל ובכיתה יש 17 בנים, אז ישנן עוד 4 בנות (17 – 21). גם מצב זה אינו מתיישב עם הנתון שבכיתה יש יותר בנות מאשר תלמידים עם שיער ארוך (כלומר אמורות להיות יותר מ-7 בנות). ולכן המספר המקסימאלי של בנים בכיתה הוא 13 ולא 17.
כלומר, טווח הבנים הוא בין 11 ל-13.

---

20. תשובה (4) נכונה. שאלה 20 מתוך 20 בפרק.

ידוע לנו כי חקלאי אחד קוטף 10 ק״ג תפוחים בשעה, וכי הוספתו של כל חקלאי מגדילה את תפוקת כל אחד מהחקלאים ב-2 ק״ג בשעה. 8 חקלאים קטפו תפוחים במשך שעה. עלינו לקבוע כמה ק״ג תפוחים הם קטפו בסך הכל.

תחילה, נבין כמה ק״ג תפוחים קטף כל חקלאי בשעה. החקלאי ה-1 קטף 10 ק״ג תפוחים בשעה.
כאשר הצטרף החקלאי ה-2, כל אחד מהם קטף 12 ק״ג תפוחים בשעה (2 + 10).
כאשר הצטרף החקלאי ה-3, כל אחד מהם קטף 14 ק״ג תפוחים בשעה (2 + 12).
כאשר הצטרף החקלאי ה-4, כל אחד מהם קטף 16 ק״ג תפוחים בשעה (2 + 14).
כאשר הצטרף החקלאי ה-5, כל אחד מהם קטף 18 ק״ג תפוחים בשעה (2 + 16).
כאשר הצטרף החקלאי ה-6, כל אחד מהם קטף 20 ק״ג תפוחים בשעה (2 + 18).
כאשר הצטרף החקלאי ה-7, כל אחד מהם קטף 22 ק״ג תפוחים בשעה (2 + 20).
כאשר הצטרף החקלאי ה-8, כל אחד מהם קטף 24 ק״ג תפוחים בשעה (2 + 22).

על כן, לאורך שעה קטפו 8 החקלאים 192 ק״ג תפוחים (24 · 8).

שימו לב, אם הצטרפו לחקלאי הראשון עוד 7 חקלאים, וכל אחד מהם הגדיל את התפוקה ב-2 ק״ג, בסך הכל הגדילו שבעת החקלאים את התפוקה ב-14 ק״ג (2 · 7). התפוקה המקורית הייתה 10 ק״ג לשעה. על כן, התפוקה של כל חקלאי היא 24 ק״ג לשעה (14 + 10).

כלליות

יחסים זהים

חלק גדול מאוד מהבעיות בבחינה מתבסס על ההבנה של יחסים דומים בין זוגות של מספרים.

דוגמה:

ב-5 תבניות ניתן לאפות 30 עוגיות.
כמה עוגיות ניתן לאפות ב-20 תבניות?

(1) 100 (2) 120 (3) 150 (4) 180

פתרון -
נרשום את הנתונים בטבלת יחסים. מכיוון שהיחס בין 5 ל-30 הוא מספר שלם (פי 6), קל למצוא את התשובה כמעט ללא חישוב:

תבניות		עוגיות	
5	$\Leftarrow$	30	כדי להגיע מ-5 ל-30 כפלנו פי 6, ולכן נכפול גם את 20 פי 6, ונקבל 120
20	$\Leftarrow$	?	

שימו לב! ניתן להתייחס גם ליחס האנכי בין המספרים - כדי להגיע מ-5 ל-20 כפלנו פי 4, ולכן ניתן לכפול את 30 פי 4, ולקבל 120.

ערך משולש / כפל באלכסון

לעיתים, היחס בין המספרים אינו מספר שלם. במקרים אלו, מומלץ להשתמש בשיטה שנקראת "ערך משולש" או "כפל באלכסון".

דוגמה:

בכל 6 דקות פותר רונן 15 תרגילים.
כמה תרגילים יפתור רונן ב-8 דקות?

(1) 18 (2) 20 (3) 21 (4) 24

פתרון - נרשום את הנתונים בטבלת יחסים.

דקות		תרגילים	
6	$\Leftarrow$	15	על-מנת למצוא את המספר החסר עלינו לכפול את המספרים באלכסון, ולחלק למספר שנשאר.
8	$\Leftarrow$	?	

נכפול בין 8 ו-15 (שנמצאים באלכסון אחד לשני) ונחלק ב-6:

$$\frac{8 \cdot 15}{6} = 20$$

יחס

בשאלות אלו עלינו להבין מה היחס בין גדלים שונים, מה יכול להיות סכומם או הפרשם וכדומה.

יחס - יחס מתמטי הוא צורה מילולית להבעת שבר.

כיוון היחס - יחס נקרא משמאל לימין: $3:5 \Leftarrow$ שלוש לחמש.

הרחבה וצמצום - יחס הוא כמו שבר, ולכן ניתן להרחיב ולצמצם אותו.
לדוגמה, היחס 2:3 שווה ליחס 4:6.
נהוג לרשום את היחס בצורה המצומצמת ביותר שניתן.

יחס וכמות - מיחס לא ניתן להסיק על כמות. לדוגמה, אם היחס בין מספר הבלונים לבין מספר הפרחים הוא 2:3, המשמעות היא שעל כל 2 בלונים יש 3 פרחים. עם זאת, אנחנו לא יודעים **כמה** בלונים ופרחים יש - יכולים להיות 2 בלונים ו-3 פרחים, 4 בלונים ו-6 פרחים, 12 בלונים ו-18 פרחים וכו'.

כדאי לבטא את הכמות באמצעות x. למשל: בלונים - 2x, פרחים כ-3x.

התאמת יחידות היחס

גילי שתה $\frac{3}{5}$ מכמות המים שהיתה בבקבוק

המשמעות של קו שבר היא "מתוך". לכן, 3 **מתוך** 5 הם החלק שגילי שתה **מתוך** המים בבקבוק - המים בבקבוק: 5x, וגילי שתה מתוכם 3x.

משכורתו של אביב גדולה פי $2\frac{1}{2}$ ממשכורתו של גפן

משכורתו של גפן היא x ומשכורתו של אביב היא $2\frac{1}{2}x$. ניתן ואפילו עדיף להרחיב כך שמשכורתו של אביב היא 5x ומשכורתו של גפן היא 2x.

היחס בין מספר הבנים לבין מספר הבנות הוא 4:7

המשמעות היא שעל כל 4 בנים יש 7 בנות: בנים: 4x, בנות: 7x. (האיבר הראשון בעברית - הבנים, מתאים למספר הראשון - 4, לפי סדר הקריאה - בעברית קוראים מימין, יחס קוראים משמאל)

בעיות חלוקה

דוגמה:

היחס בין הבנים לבנות בכיתה מסוימת הוא 2:3.
מה **יכול להיות** מספר הבנות בכיתה זו?

(1) 10 (2) 12 (3) 13 (4) 14

פתרון -

היחס בין הבנים הוא 2:3 - המשמעות היא שיש 2x בנים ו-3x בנות.
לפיכך, מספר הבנות חייב להתחלק ב-3. מבין המספרים בתשובות רק 12 מתחלק ב-3.

תשובה (2) נכונה.

בעיות חישוב

בשאלות אלו עלינו פשוט לחשב את מה שנדרש בהתאם לנתוני השאלה.

דוגמה:

על מנת להכין פיצה משפחתית, יש צורך ב-400 גרם בצק, 100 גרם גבינה ושתי עגבניות. מחיר 100 גרם בצק הוא 5 שקלים, מחיר 100 גרם גבינה הוא 7 שקלים ומחיר עגבנייה הוא חצי שקל. מחירה של פיצה משפחתית הוא 49 שקלים. בהנחה שבהכנת הפיציה אין עלויות נוספות, מה ההפרש בין מחיר הפיצה לעלות ההכנה שלה?

(1) 36 (2) 28 (3) 21 (4) 14

פתרון -

נחשב תחילה כמה עולה לעמית להכין פיצה משפחתית:

<u>בצק</u> - 100 גרם עולים 5 שקלים ולכן 400 גרם עולים 20 שקלים.

<u>גבינה</u> - 100 גרם גבינה עולים 7 שקלים.

<u>עגבניה</u> - עגבניה אחת עולה חצי שקל ולכן 2 עגבניות עולות שקל אחד.

נחשב את ההפרש: $49 - 20 - 7 - 1 = 21$

בעיות הבנה

שאלות הנפתרות כמעט ללא חישוב - פשוט להבין מה רוצים בשאלה.

דוגמה:

בחברה א', עלות כל דקת שיחה **או חלק ממנה** היא 2 שקלים.

בחברה ב', העלות של כל 10 דקות שיחה **או חלק מהן** היא 15 שקלים.

מה יהיה ההפרש במחיר שיחה במשך 22.5 דקות בין שתי החברות?

(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4

פתרון -

נחשב את העלות בכל אחת מהחברות:

<u>חברה א'</u> - עלות 22 דקות תהיה 44 שקלים. עלות חצי דקה נוספת תהיה 2 שקלים - סה"כ: 46 שקלים.

<u>חברה ב'</u> - עלות 20 דקות שיחה תהיה 30 שקלים. עלות 2.5 דקות נוספות תהיה 15 שקלים - סה"כ: 45 שקלים.

ההפרש בין החברות: $46 - 45 = 1$

בניית משוואה/ביטוי

בחלק מהבעיות בבחינה (אחוזים, ממוצעים, תנועה וכו') יהיה צורך לבנות ביטוי או משוואה כדי לפתור אותן.

דוגמה:

במשרד מסוים תוכננו 5 חדרים שיאכלסו כל אחד מספר שווה של עובדים. בפועל, חדר אחד הוסב למחסן ולכן היה צורך להוסיף לכל אחד מהחדרים שנשארו שני עובדים. כמה עובדים היו אמורים להיות בכל אחד מהחדרים על פי התכנון?

(1) 8 (2) 6 (3) 5 (4) 4

פתרון -

נבנה משוואה בהתאם לנתונים. x - מספר העובדים בחדר:

$$5x = 4(x + 2) \quad \Rightarrow \quad 5x = 4x + 8 \quad \Rightarrow \quad x = 8$$

"תן למסכן"

כאשר אנו בונים משוואה, עלינו להגיע לשוויון בין שני האגפים. טעות נפוצה היא להגדיל את האגף הלא נכון במשוואה. טכניקה שעוזרת לנו לעשות זאת היא "תן למסכן".

דוגמה:

אורי גדול מירון ב-4 שנים. לפני 3 שנים, היה גילו של אורי כפול מגילו של ירון.
בן כמה ירון כיום?

(1) 13 (2) 5 (3) 8 (4) 7

פתרון -

נסמן את גילו של ירון ב-x:

	אורי	ירון
היום:	$x + 4$	x
לפני 3 שנים:	$(x + 4) - 3$	$x - 3$

הטעות הנפוצה היא להגדיל את הצד הגדול (אורי), אולם זה בדיוק להיפך - על מנת להשוות בין האגפים עלינו להגדיל את האגף **הקטן**.

"**תן למסכן**" - נבדוק איזה מהאגפים "מסכן" יותר (קטן יותר), ואותו נגדיל (נכפיל אותו או נוסיף לו - בהתאם לנתוני השאלה). במקרה זה, ירון הוא "המסכן" (הוא צעיר יותר), ולכן עלינו לכפול את ירון פי 2.
נבנה את המשוואה:

$$2 \cdot (x - 3) = x + 4 - 3 \quad \Rightarrow \quad 2x - 6 = x + 1 \quad \Rightarrow \quad x = 7$$

הצבת תשובות

מי שמתקשה בבניית משוואה, יכול פשוט להציב תשובות, ולבדוק איזו תשובה מסתדרת עם הנתונים בשאלה:

תשובה (1) - לפני 3 שנים ירון היה בן 8 ואורי בן 16 - ההפרש אינו 4.

תשובה (2) - לפני 3 שנים ירון היה בן 2 ואורי בן 4 - ההפרש אינו 4.

תשובה (3) - לפני 3 שנים ירון היה בן 5 ואורי בן 10 - ההפרש אינו 4.

תשובה (4) - לפני 3 שנים ירון היה בן 4 ואורי בן 8 - ההפרש הוא 4.

תרגול שאלות מבחינות אמת

1. מחיר צנצנת דבש הוא $\frac{x^2+18}{x}$ שקלים. מחיר צנצנת ריבה הוא x שקלים.

אם מחיר צנצנת דבש גבוה פי 3 ממחיר צנצנת ריבה,

מה מחיר צנצנת ריבה (בשקלים)?

(1) 4.5 (2) 2.5 (3) 3 (4) 4

---

2. באגרטל יש פרחים ב-3 צבעים: סגול, אדום וצהוב.
מספר הפרחים הסגולים גדול פי 2 ממספר הפרחים האדומים.
מספר הפרחים האדומים גדול פי 2 ממספר הפרחים הצהובים.

איזה מן המספרים הבאים יכול להיות המספר **הכולל** של הפרחים באגרטל?

(1) 6
(2) 14
(3) 17
(4) 18

---

3. סנונית אפריקנית מסוגלת לעוף ללא עצירה מרחק של 700 ק"מ כאשר היא נושאת משקל של 100 גרם.
כל גרם נוסף שתישא הסנונית יקטין את המרחק ב-3 ק"מ.

לאיזה מרחק (בק"מ) מסוגלת סנונית אפריקנית לעוף ללא עצירה כאשר היא נושאת משקל של 137 גרם?

(1) 589
(2) 289
(3) 361
(4) 401

---

4. 3 משפחות יצאו לטיול: משפחה אחת בת 2 נפשות, אחת בת 3 נפשות ואחת בת 4 נפשות. הטיול עלה 360 שקלים, וכל משפחה שילמה את חלקה היחסי בעלות הטיול בהתאם למספר הנפשות שבה.

כמה שילמה המשפחה בת 2 הנפשות (בשקלים)?

(1) 40
(2) 60
(3) 80
(4) 120

פתרתי ______________ שאלות ב ______________ דקות, ______________ תשובות נכונות

.5 לענבר היו n תפוחים (n הוא מספר שלם). היא אכלה 3 תפוחים. לאחר מכן, היא נתנה לעודד $\frac{1}{2}$ ממספר התפוחים שנשארו לה (היא נתנה לו מספר שלם של תפוחים). לבסוף היא הכינה רסק משני תפוחים שלמים.

איזה מן המספרים הבאים יכול להיות ערכו של n?

(1) 5 (2) 6 (3) 8 (4) 9

.6 בחנות מסוימת ספר בישול עולה 20 שקלים יותר מספר שירה.
שלומית קנתה בחנות זו 4 ספרי בישול ו-6 ספרי שירה, ושילמה אותו סכום בעבור ספרי הבישול ובעבור ספרי השירה.

כמה שקלים עולה **ספר בישול** בחנות?

(1) 50
(2) 60
(3) 70
(4) 80

.7 יואב נתן $\frac{1}{5}$ משכרו לחגית, ואחר כך נתן 200 שקלים לאסף.

אם נשארו לו 600 שקלים, מה היה שכרו (בשקלים)?

(1) 1,000 (2) 2,000 (3) 1,500 (4) 2,500

.8 למר כהן יש x ילדים, ולכל אחד מהם יש x ילדים.

כמה נכדים יש למר כהן?

(1) 2^x
(2) $2x$
(3) x^2
(4) x^3

פתרתי ____________ שאלות ב ____________ דקות, ____________ תשובות נכונות

.9 בחנות פרחים מסוימת יש פרחים צהובים ואדומים.
כמות הצוף בפרח צהוב גדולה פי $\frac{3}{2}$ מכמות הצוף בפרח אדום.

באיזה מן הזֵרים הבאים כמות הצוף הגדולה ביותר?

(1) זר של 6 פרחים שכולם צהובים
(2) זר של 8 פרחים שכולם אדומים
(3) זר של 2 פרחים צהובים ו-3 פרחים אדומים
(4) זר של 5 פרחים צהובים ו-2 פרחים אדומים

.10 במחיר של 6 מחברות אפשר לקנות 2 קלסרים ו-4 עפרונות.
מחירו של קלסר גבוה פי 2 ממחיר עיפרון.

כמה **קלסרים** אפשר לקנות במחיר של 9 מחברות?

(1) 6
(2) 8
(3) 10
(4) 5

.11 ענת בחרה מספר כלשהו x ועשתה את הפעולות הבאות, זו אחר זו:
היא חילקה את x ב-9,
מהתוצאה שהתקבלה היא החסירה 4,
את ההפרש שהתקבל היא הכפילה ב-5,
ולמכפלה שהתקבלה היא הוסיפה 20.
לאחר כל הפעולות שעשתה, קיבלה ענת שוב את המספר שבחרה, x.

$x = ?$

(1) 1 (2) 0 (3) $\frac{9}{5}$ (4) 45

.12 ב-1 זוז יש 6 מעות, ו-1 זוז שווה $\frac{1}{4}$ דינר.

כמה מעות יש ב-1 דינר?

(1) $1\frac{1}{2}$ (2) $6\frac{1}{4}$ (3) 10 (4) 24

פתרתי ____________ שאלות ב ____________ דקות, ____________ תשובות נכונות

13. סוחר מכר סחורה, במחיר אחיד, בשני מקומות שונים. במקום הראשון הוא מכר $\frac{1}{3}$ מהסחורה, ובמקום השני מכר $\frac{1}{4}$ מן הסחורה **שנותרה** לאחר המכירה הראשונה.
בסך הכול קיבל הסוחר 210 שקלים עבור הסחורה שמכר.

כמה שקלים היה מקבל הסוחר אילו היה מוכר את כל הסחורה?

(1) 315
(2) 360
(3) 420
(4) 204

---

14. קופסת קפה מכילה 150 כפיות קפה ומחירה 15 שקלים.
שקית סוכר מכילה 400 כפיות סוכר ומחירה 16 שקלים.

כמה שקלים עולה להכין כוס קפה שבה כפית קפה ו-2 כפיות סוכר (בהנחה ששאר המרכיבים ניתנים בחינם)?

(1) 0.12 (2) 0.18 (3) 0.22 (4) 0.26

---

15. סנאי אוגר במשך 5 ימים כמות אגוזים המספיקה ל-25 הימים הנותרים באותו חודש.
בכל יום מתוך 5 ימי האגירה הוא אוסף 20 אגוזים, ואוכל מתוכם x אגוזים.
בכל יום מ-25 הימים הנותרים הוא אוכל בדיוק 3 אגוזים, ומסיים כך בדיוק את האגוזים שאסף ב-5 הימים הראשונים.

$x = ?$

(1) 25
(2) 15
(3) 3
(4) 5

---

16. ענת מבוגרת מהילה ב-4 שנים, והיחס בין הגילים שלהן הוא 3 : 1.

מה יהיה היחס בין הגילים של ענת והילה **בעוד שנתיים**?

(1) 3 : 2 (2) 2 : 1 (3) 4 : 3 (4) 4 : 1

פתרתי ____________ שאלות ב ____________ דקות, ____________ תשובות נכונות

17. מחיר 1 ק"ג אגסים הוא x שקלים. מחיר 1 ק"ג בננות הוא y שקלים.
סכום מחירם של 1 ק"ג אגסים ו-1 ק"ג בננות הוא 13 שקלים.
מחירו של 1 ק"ג אגסים גבוה ב-3 שקלים ממחירו של 1 ק"ג בננות.

כמה שקלים ירוויח משה, אם ימכור x ק"ג אגסים ויקנה y ק"ג בננות?

(1) 10
(2) 23
(3) 39
(4) 69

---

18. בריבוע שלפניכם a, b, c ו-d הם מספרים גדולים מ-0. סכומי המספרים בכל אחד מהטורים שווים זה לזה, וסכומי המספרים בכל אחת מהשורות שווים זה לזה.

איזו מהטענות הבאות נובעת מכך **בהכרח**?

a	b
c	d

(1) $a = d$ ו- $b = c$
(2) $a \cdot d = b \cdot c$
(3) $a = b = c = d = 1$
(4) $a + d = c + b$

---

19. לקיסר הסיני לינג היה מחסן מלא אורז. בשנה מסוימת החלה בצורת קשה שנמשכה 3 שנים. בשנת הבצורת הראשונה חילק הקיסר לנתיניו $\frac{1}{5}$ מהאורז שבמחסנו, בשנה השנייה $\frac{1}{5}$ מהכמות שנותרה, וכך הלאה.

איזה חלק מכמות האורז שהייתה לקיסר לפני הבצורת נשארה במחסנו בתום 3 שנות הבצורת?

(1) $\frac{1}{125}$ (2) $\frac{1}{5}$ (3) $\frac{3}{5}$ (4) $\frac{64}{125}$

---

20. בסיפור ארוך יש 60,000 מילים ו-35 איורים.
בסיפור קצר יש 2,000 מילים ו-7 איורים.
"מידת החד-גוניות" של סיפור היא היחס בין מספר המילים למספר האיורים בסיפור.

פי כמה גדולה "מידת החד-גוניות" של סיפור ארוך מזו של סיפור קצר?

(1) $1\frac{3}{7}$ (2) 2 (3) 5 (4) 6

פתרתי ____________ שאלות ב ____________ דקות, ____________ תשובות נכונות

21. לזברה יש ראש אחד ו-4 רגליים.
ליען יש ראש אחד ו-2 רגליים.
בשדה שנמצאים בו רק זברות ויענים, יש 50 ראשים ו-120 רגליים.

כמה זברות יש בשדה?

(1) 10
(2) 20
(3) 32
(4) 35

---

22. בבוקר מסוים היה מספר המבקרים בעיר נופש שווה ל-$\frac{3}{4}$ ממספר כל התושבים בעיר.
מנתון זה נובע כי באותו בוקר היה מספר המבקרים בעיר _____ ממספר כל האנשים בעיר (תושבים ומבקרים).

(1) $\frac{5}{12}$
(2) $\frac{2}{5}$
(3) $\frac{2}{3}$
(4) $\frac{3}{7}$

---

23. תמר עובדת חמישה ימים בשבוע. בכל יום היא מגיעה לעבודה ב-08:00. יומיים בשבוע היא יוצאת באמצע היום להפסקה של שעתיים. תמר רוצה לעזוב את העבודה בכל יום באותה שעה.

מה צריכה להיות שעה זו כדי שתמר תעבוד 30 שעות בשבוע? (הפסקות אינן נחשבות זמן עבודה).

(1) 14:00
(2) 14:22
(3) 14:48
(4) 15:04

---

24. אורך זנבה של איגואנה הוא $\frac{2}{5}$ מהאורך הכולל של גופה.

אורך זנבה של זיקית הוא $\frac{1}{5}$ מהאורך הכולל של גופה.

נתון: אורך זנבה של איגואנה גדול פי 10 מאורך זנבה של זיקית.

מה היחס בין אורכה הכולל של איגואנה לבין אורכה הכולל של זיקית?

(1) $5 : 1$
(2) $2 : 1$
(3) $20 : 1$
(4) $15 : 1$

---

25. לאיציק ולדני יחד יש 20 קלפים.
איציק העביר 7 קלפים לדני, וכעת נותרו לאיציק 2 קלפים פחות מלדני.

$$\frac{\text{מספר הקלפים שהיו לאיציק לפני ההעברה}}{\text{מספר הקלפים שהיו לדני לפני ההעברה}} = ?$$

(1) 1
(2) 2
(3) 3
(4) 4

---

26. ירון לווה מסיגל סכום כסף מסוים, וב- $\frac{1}{3}$ ממנו קנה בוטנים.
אם ייתן ירון לסיגל $\frac{3}{4}$ מכמות הבוטנים כחלק מהחזר החוב,
יהיה החוב הנותר 3.60 שקלים.

כמה כסף לווה ירון מסיגל (בשקלים)?

(1) 7.20
(2) 6.00
(3) 5.40
(4) 4.80

פתרתי ______ שאלות ב ______ דקות, ______ תשובות נכונות

27. המורה של טל לא היה מרוצה מהישגי הכיתה במבחן, והוא שינה את כל הציונים בכיתה לפי הכלל הבא: כל ציון הוכפל ב-$\frac{1}{2}$, ולתוצאה הוספו 20 נקודות.
ציונו של טל ירד בעקבות השינוי.

איזו מהטענות הבאות נכונה בהכרח בנוגע לציונו **המקורי** של טל?

(1) הוא היה נמוך מ-80
(2) הוא היה גבוה מ-80
(3) הוא היה נמוך מ-40
(4) הוא היה גבוה מ-40

---

28. רונן קיבל חבילת סוכריות וחילק אותה ל-2 עֲרֵמות (לאו דווקא שוות בגודלן).
ביום הראשון הוא אכל $\frac{1}{4}$ מהסוכריות שבאחת הערמות.
ביום השני הוא אכל $\frac{1}{8}$ מהסוכריות שבערמה האחרת, ואז נשארו לו ערמות של 14 ו-9 סוכריות (לאו דווקא בסדר זה).

כמה סוכריות קיבל רונן?

(1) 24
(2) 28
(3) 46
(4) 148

---

29. למלך ארתור ולמלך ג'ורג' היו כובעים באותה כמות. המלך ארתור חילק את כובעיו שווה בשווה בין 6 פקידיו, והמלך ג'ורג' חילק את כובעיו שווה בשווה בין 30 פקידיו.
כל פקיד של המלך ארתור קיבל פי 5 כובעים יותר מכל פקיד של המלך ג'ורג'.

כמה כובעים היו לכל אחד מהמלכים?

(1) אי-אפשר לדעת לפי הנתונים
(2) 30
(3) 60
(4) 120

פתרתי ____________ שאלות ב ____________ דקות, ____________ תשובות נכונות

.30 n אנשים יושבים בחדר. ברגע מסוים קם אחד מהם, נותן שקל אחד לכל אחד מהאחרים ויוצא מהחדר. מיד אחר כך קם עוד אחד מהאנשים, נותן שקל אחד לכל אחד מהנותרים בחדר ויוצא, וכך הלאה.

אם בתחילה היו לכל אחד מ-n האנשים n שקלים בדיוק,
כמה שקלים ייוותרו בידי האיש הרביעי כשיֵצא מהחדר?

(1) $n-4$

(2) 7

(3) $n-3$

(4) 12

תשובות

שאלה	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
תשובה	3	2	1	3	4	2	1	3	4	1

שאלה	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
תשובה	2	4	3	2	4	2	3	1	4	4

שאלה	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
תשובה	1	4	3	1	4	4	4	2	1	2

פתרתי 30 שאלות - ______________ נכונות, ______________ אחוזי הצלחה

1. תשובה (3) נכונה. שאלה 1 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הצבת תשובות
נציב את התשובות ונבדוק איזו תשובה מקיימת את הנתונים.
טיפ: תמיד נתחיל להציב מההצבה הנוחה ביותר (במקרה הזה תשובה (3) או (4)).

נציב את תשובה (3): אם $x = 3$, נקבל:
מחירה של צנצנת דבש שווה ל-9 שקלים.

$$\frac{3^2+18}{3} = \frac{27}{3} = 9$$

מחירה של צנצנת ריבה שווה ל-3 שקלים.
בהצבה זו קיבלנו שאכן מחיר צנצנת דבש גבוה פי 3 ממחיר צנצנת ריבה, ועל כן זו **התשובה הנכונה**.

טיפ: מכיוון שהצבנו את התשובות אין צורך להמשיך לבדוק, אך למען שלמות ההסבר נפסול את שאר התשובות.

פסילת תשובה (1): אם $x = 4.5$, נקבל:
מחירה של צנצנת דבש שווה ל-8.5 שקלים.

$$\frac{4.5^2+18}{4.5} = \frac{38.25}{4.5} = 8.5$$

מחירה של צנצנת ריבה שווה ל-4.5 שקלים.
בהצבה זו לא קיבלנו שמחיר צנצנת דבש גבוה פי 3 ממחיר צנצנת ריבה, ועל כן התשובה נפסלת.

פסילת תשובה (2): אם $x = 2.5$, נקבל:
מחירה של צנצנת דבש שווה ל-9.7 שקלים.

$$\frac{2.5^2+18}{2.5} = \frac{24.25}{2.5} = 9.7$$

מחירה של צנצנת ריבה שווה ל-2.5 שקלים.
בהצבה זו לא קיבלנו שמחיר צנצנת דבש גבוה פי 3 ממחיר צנצנת ריבה, ועל כן התשובה נפסלת.

פסילת תשובה (4): אם $x = 4$, נקבל:
מחירה של צנצנת דבש שווה ל-8.5 שקלים.

$$\frac{4^2+18}{4} = \frac{34}{4} = 8.5$$

מחירה של צנצנת ריבה שווה ל-4 שקלים.
בהצבה זו לא קיבלנו שמחיר צנצנת דבש גבוה פי 3 ממחיר צנצנת ריבה, ועל כן התשובה נפסלת.

דרך ב׳ – בניית משוואה

נתון כי מחירה של צנצנת דבש גבוה פי 3 ממחיר צנצנת ריבה, לכן ניתן לבנות משוואה ע״פ עיקרון ״תן למסכן״ – נכפול פי 3 את המחיר של צנצנת ריבה ונשווה את התוצאה למחיר צנצנת דבש.

$\cdot x \quad \cdot 1$

$$3 \cdot x = \frac{x^2+18}{x}$$

$$3x^2 = x^2 + 18$$

$$2x^2 = 18$$

$$x^2 = 9$$

$$x = \pm 3$$

x מייצג מחיר, ועל כן אינו יכול להיות מספר שלילי. מכאן שמחירה של צנצנת ריבה הוא 3 שקלים.

.2 תשובה (2) נכונה. שאלה 1 מתוך 20 בפרק.

באגרטל יש פרחים ב-3 צבעים. נתון היחס בין מספרי הפרחים ועלינו לקבוע איזה מהמספרים שבתשובות יכול להיות המספר הכולל של פרחים באגרטל. מאחר שמספר הפרחים הצהובים הוא הקטן ביותר, נציב x בתור מספר זה.

מספר הפרחים האדומים גדול פי 2 ממספר הפרחים הצהובים. כלומר, יש 2x פרחים אדומים.
מספר הפרחים הסגולים גדול פי 2 ממספר הפרחים האדומים. כלומר, יש 4x פרחים סגולים.

בסך הכל, יש באגרטל 7x פרחים (x + 2x + 4x). לפיכך, מספר הפרחים הכולל צריך להיות כפולה של 7, שכן x הוא בהכרח מספר שלם.

התשובה היחידה שמהווה כפולה של 7 היא תשובה (2) – 14.

.3 תשובה (1) נכונה. שאלה 2 מתוך 20 בפרק.

עלינו לקבוע לאיזה מרחק מסוגלת לעוף הסנונית ללא עצירה, תוך שהיא נושאת משקל של 137 גרם. ידוע שהסנונית מסוגלת לעוף למרחק של 700 ק״מ כשהיא נושאת 100 גרם, וכל גרם נוסף מקטין את המרחק ב-3 ק״מ.

טיפ: נשים לב שכל התשובות מספיק רחוקות זו מזו ולכן מספיק לבצע הערכת סדר גודל כדי לקבוע את המרחק אליו תוכל הסנונית להגיע, בלי לחשב במדויק.
כאמור, כל גרם מעבר ל-100 גרם מקטין את המרחק ב-3 ק״מ. הסנונית נושאת 37 גרמים נוספים שכל אחד מהם מקטין את המרחק אליו תוכל להגיע ב-3 ק״מ. לכן, המרחק הפוטנציאלי של הסנונית יקטן פי $3 \cdot 37$ שזה מעט יותר מ-100.
לפיכך, המרחק אליו תוכל להגיע הסנונית הוא כ-600 (700-100).
מכאן שרק תשובה (1) מתאימה, ולכן ניתן לפסול את שאר התשובות. למען שלמות ההסבר, נראה את החישוב המלא והמדויק:

הסנונית נושאת 37 גרם נוספים (100 – 137), שכל אחד מהם מקטין את המרחק ב-3 ק״מ. בסך הכול, יקטינו 37 הגרמים הללו את המרחק ב-111 ק״מ ($3 \cdot 37$). נחשב את המרחק שאליו מסוגלת הסנונית לעוף כעת:

$$700 - 111 = 589$$

---

4. תשובה (3) נכונה. שאלה 2 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – חישוב

לטיול יצאו 3 משפחות – משפחה בת 4 נפשות, משפחה בת 3 נפשות ומשפחה בת 2 נפשות. עלות הטיול הכוללת הייתה 360 ₪. בסך הכול יצאו לטיול 9 נפשות (2 + 3 + 4), ועל כן כל אחת שילמה 40 ₪ $\left(\frac{360}{9}\right)$. לפיכך, המשפחה בת 2 הנפשות שילמה 80 ₪ ($2 \cdot 40$).

דרך ב' – יחסים

כאמור, לטיול יצאו 9 נפשות. עלות הטיול הכוללת הייתה 360 ₪. עלינו לקבוע כמה שילמה המשפחה בת 2 הנפשות. נציב נתונים אלה בריבוע יחסים:

<u>נפשות</u>	<u>עלות</u>
9	360
2	?

$\cdot 40$

ניתן לזהות יחס אופקי של פי 40 בין 9 ל-360, ולכן נרחיב גם את 2 פי 40 $\Leftarrow$ 80.

דרך ג' – הצבת תשובות

ידוע כי לטיול יצאו 9 נפשות בסך הכול (4 + 3 + 2) ושכל משפחה שילמה את החלק היחסי שלה ממחיר הטיול הכולל. נבדוק את התשובות ונמצא את המחיר לנפש אחת ששילמה המשפחה בת שתי הנפשות. לפי זה נחשב את המחיר הכולל ונראה האם הוא מתאים לנתוני השאלה.

<u>נבדוק את תשובה (1):</u>

הואיל והמשפחה בת שתי הנפשות שילמה 40 ₪ על הטיול, אזי כל נפש במשפחה עלתה 20 ₪ $\left(\frac{40}{2}\right)$. לפיכך, מחיר הטיול הכולל עבור 9 נפשות היה 180 ₪ ($9 \cdot 20$). לא מתאים, התשובה נפסלת.

טיפ: נשים לב שהמחיר הכולל של הטיול שקיבלנו הוא 180 ₪ שהוא מהווה בדיוק מחצית מהמחיר הנתון בשאלה, לכן ניתן לקבוע כי המחיר אותו שילמה המשפחה בת שתי הנפשות היה כפול מ-40, קרי 80 ₪. כלומר ניתן לסמן את תשובה (3) ישירות. למען שלמות ההסבר נוכיח כי תשובה (3) היא התשובה הנכונה ונפסול את תשובות (2) ו-(4):

<u>נבדוק את תשובה (3):</u>

הואיל והמשפחה בת שתי הנפשות שילמה 80 ₪ על הטיול, אזי כל נפש במשפחה עלתה 40 ₪ $\left(\frac{80}{2}\right)$. לפיכך, מחיר הטיול הכולל עבור 9 נפשות היה 360 ₪ ($9 \cdot 40$). מתאים, **תשובה נכונה.**

<u>נבדוק את תשובה (2):</u>

הואיל והמשפחה בת שתי הנפשות שילמה 60 ₪ על הטיול, אזי כל נפש במשפחה עלתה 30 ₪ $\left(\frac{60}{2}\right)$. לפיכך, מחיר הטיול הכולל עבור 9 נפשות היה 270 ₪ ($9 \cdot 30$). לא מתאים, התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (4):</u>

הואיל והמשפחה בת שתי הנפשות שילמה 120 ₪ על הטיול, אזי כל נפש במשפחה עלתה 60 ₪ $\left(\frac{120}{2}\right)$. לפיכך, מחיר הטיול הכולל עבור 9 נפשות היה 540 ₪ ($9 \cdot 60$). לא מתאים, התשובה נפסלת.

5. תשובה (4) נכונה. שאלה 2 מתוך 20 בפרק.

נציב את התשובות במקום n ונבדוק איזו תשובה מניבה תוצאה הגיונית.

<u>נבדוק את תשובה (1)</u>: נציב $n = 5$. לענבר היו 5 תפוחים. היא אכלה 3 תפוחים ולכן נשארו לה עוד 2. היא נתנה לעודד חצי מכמות התפוחים (חצי מ-2) כלומר היא נתנה לו תפוח אחד ונשאר לה אחד. עתה עליה להכין רסק משני תפוחים. לענבר אין מספיק תפוחים להכנת הרסק. התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (2)</u>: נציב $n = 6$. לענבר היו 6 תפוחים. היא אכלה 3 תפוחים ולכן נשארו לה עוד 3. ידוע כי היא נתנה לעודד חצי מכמות התפוחים (חצי מ-3) ועודד קיבל מספר שלם של תפוחים. מכיוון שחצי מ-3 הוא אינו מספר שלם התשובה נפסלת.

עם ההבנה הזו <u>ניתן לפסול גם את תשובה (3)</u> מכיוון שגם היא מספר זוגי. לאחר שנחסר ממספר זוגי 3, נקבל מספר אי זוגי שלא ניתן לחלק אותו לשני חצאים. לכן, התשובה הנכונה חייבת להיות אי-זוגית.

טיפ: מכיוון שפסלנו 3 תשובות ניתן לסמן את תשובה (4) גם בלי לבדוק אותה, אך למען שלמות ההסבר נבדוק גם אותה:

<u>נבדוק את תשובה (4)</u>: נציב $n = 9$. לענבר היו 9 תפוחים. היא אכלה 3 תפוחים ולכן נשארו לה עוד 6. היא נתנה לעודד חצי מכמות התפוחים (חצי מ-6) כלומר היא נתנה לו 3 תפוחים ונשארו לה עוד 3. עתה עליה להכין רסק משני תפוחים. יש לה מספיק תפוחים להכנת הרסק. **תשובה נכונה.**

---

6. תשובה (2) נכונה. שאלה 3 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הצבת תשובות

נתון שספר בישול עולה 20 שקלים יותר מספר שירה. מחירם של 4 ספרי בישול שווה למחירם של 6 ספרי שירה. עלינו למצוא את מחירו של ספר בישול. אנו יכולים לבדוק את התשובות עד שנמצא תשובה אשר מקיימת את כל הנתונים.

<u>נבדוק את תשובה (1)</u>: אם ספר בישול עולה 50 שקלים, ספר שירה עולה 30 שקלים $(50 - 20)$.

4 ספרי בישול עולים 200 שקלים $(4 \cdot 50)$ ו-6 ספרי שירה עולים 180 שקלים $(6 \cdot 30)$. מחירים אלה אינם שווים, התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (2)</u>: אם ספר בישול עולה 60 שקלים, ספר שירה עולה 40 שקלים $(60 - 20)$.

4 ספרי בישול עולים 240 שקלים $(4 \cdot 60)$ ו-6 ספרי שירה עולים 240 שקלים $(6 \cdot 40)$. מחירים אלה שווים, **תשובה נכונה.**

טיפ: מכיוון שהצבנו את התשובות, ברגע שמצאנו תשובה נכונה אין צורך להמשיך לבדוק את שאר התשובות, אך למען שלמות ההסבר נפסול אותן:

<u>נבדוק את תשובה (3)</u>: אם ספר בישול עולה 70 שקלים, ספר שירה עולה 50 שקלים $(70 - 20)$.

4 ספרי בישול עולים 280 שקלים $(4 \cdot 70)$ ו-6 ספרי שירה עולים 300 שקלים $(6 \cdot 50)$. מחירים אלה אינם שווים, התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (4)</u>: אם ספר בישול עולה 80 שקלים, ספר שירה עולה 60 שקלים $(80 - 20)$.

4 ספרי בישול עולים 320 שקלים $(4 \cdot 80)$ ו-6 ספרי שירה עולים 360 שקלים $(6 \cdot 60)$. מחירים אלה אינם שווים, התשובה נפסלת.

דרך ב' – פתרון מתמטי

עלינו למצוא את מחירו של ספר בישול. נציב x בתור מחיר זה. נתון שמחירו של ספר שירה נמוך ב-20 שקלים, כלומר, x – 20. ידוע לנו שמחירם של 4 ספרי בישול שווה למחירם של 6 ספרי שירה. נבנה משוואה המתארת קשר זה:

$4 \cdot x = 6 \cdot (x - 20)$

$4x = 6x - 120$

$2x = 120$

$x = 60$

כלומר, מחירו של ספר בישול הוא 60 שקלים.

---

7. תשובה (1) נכונה. שאלה 4 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הצבת תשובות

ידוע שיואב נתן $\frac{1}{5}$ משכרו לחגית ו-200 שקלים לאסף. לאחר מכן, נותרו לו 600 שקלים. עלינו למצוא את שכרו. ניתן לבדוק את התשובות ולחפש תשובה אשר מתאימה לכל הנתונים.

טיפ: בהצבת תשובות, כדאי להתחיל בתשובות הנוחות יותר.

<u>נבדוק את תשובה (1):</u> יואב נתן לחגית $\frac{1}{5}$ מ-1,000 $\Leftarrow$ 200 $\left(\frac{1{,}000}{5}\right)$. בנוסף, הוא נתן 200 שקלים לאסף. נחשב כמה כסף נותר לו:

$1{,}000 - 200 - 200 = 600$

מתאים, **תשובה נכונה.**

טיפ: מכיוון שהצבנו את התשובות, ברגע שמצאנו תשובה נכונה אין צורך להמשיך לבדוק את שאר התשובות, אך למען שלמות ההסבר נפסול אותן:

<u>נבדוק את תשובה (2):</u> יואב נתן לחגית $\frac{1}{5}$ מ-2,000 $\Leftarrow$ 400 $\left(\frac{2{,}000}{5}\right)$. בנוסף, הוא נתן 200 שקלים לאסף. נחשב כמה כסף נותר לו:

$2{,}000 - 400 - 200 = 1{,}400$

לא מתאים, התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (3):</u> יואב נתן לחגית $\frac{1}{5}$ מ-1,500 $\Leftarrow$ 300 $\left(\frac{1{,}500}{5}\right)$. בנוסף, הוא נתן 200 שקלים לאסף. נחשב כמה כסף נותר לו:

$1{,}500 - 300 - 200 = 1{,}000$

לא מתאים, התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (4):</u> יואב נתן לחגית $\frac{1}{5}$ מ-2,500 $\Leftarrow$ 500 $\left(\frac{2{,}500}{5}\right)$. בנוסף, הוא נתן 200 שקלים לאסף. נחשב כמה כסף נותר לו:

$2{,}500 - 500 - 200 = 1{,}800$

לא מתאים, התשובה נפסלת.

דרך ב' – פתרון מתמטי

נציב בתור שכרו של יואב x. ידוע שיואב נתן $\frac{1}{5}$ משכרו לחגית. לפיכך, נותרו לו $\frac{4}{5}$ משכרו $\Leftarrow$ $\frac{4}{5}x$. בנוסף, יואב נתן לאסף 200 שקלים. בשלב זה נותרו ליואב $\frac{4}{5}x - 200$ שקלים. ידוע לנו שסכום זה שווה 600. נתאר זאת באופן אלגברי:

$$\frac{4}{5}x - 200 = 600$$

$$\frac{4x}{5} = 800$$

$$4x = 800 \cdot 5$$

$$x = \frac{800 \cdot 5}{4} = 200 \cdot 5 = 1{,}000$$

לפיכך, שכרו של יואב היה 1,000 שקלים.

דרך ג' – חישוב מהסוף

ניתן בשאלה הזו לעבוד בכיוון ההפוך, מהסוף להתחלה. נתחיל מסכום הכסף הסופי שנשאר ליואב (600 שקלים).
הוא הגיע לסכום הזה לאחר שהוא נתן לאסף 200 שקל, כלומר לפני כן היה לו 800 שקלים (200 + 600).
בהמשך לכך, 800 השקלים הללו התקבלו לאחר שהוא נתן לחגית $\frac{1}{5}$ מכספו, קרי 800 שקלים הם למעשה $\frac{4}{5}$ משכרו ההתחלתי.
ברגע שמצאנו ש- $\frac{4}{5}$ מסך כל השכר הם 800, ננסה למצוא מה היה השכר השלם באמצעות יחסים:

חלק	סכום
$\frac{4}{5}$	800
$\frac{1}{5}$	200
$\frac{5}{5}$	1,000

$:4$

$\cdot 5$

כלומר, השלם שממנו 800 מהווים $\frac{4}{5}$ הוא 1,000.

.8 תשובה (3) נכונה. שאלה 4 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הצבת מספרים
למר כהן יש x ילדים ולכל אחד מהם x ילדים. עלינו לקבוע כמה נכדים יש למר כהן. ניתן להציב מספר נוח במקום x. נשים לב כי במקרה זה לא כדאי להציב $x = 1$ או $x = 2$, שכן במקרים אלה מספר תשובות יהיו שוות זו לזו (למשל, אם נציב $x = 1$, תשובות (3) ו-(4) יהיו זהות וכן תשובות (1) ו-(2) יהיו זהות. אם נציב $x = 2$, תשובות (1), (2) ו-(3) יהיו זהות). לפיכך, נציב $x = 3$.

אם למר כהן יש 3 ילדים, ולכל אחד מהם 3 ילדים, יש לו 9 נכדים.

כעת, נציב גם בתשובות $x = 3$ ונחפש תשובה השווה ל-9. נשים לב שמכיוון שהשתמשנו בהצבת מספרים במקום הנעלמים, עלינו לפסול 3 תשובות בטרם נוכל לסמן תשובה נכונה.

(1) $2^x \Rightarrow 2^3 = 8$ $\Rightarrow$ לא מתאים, התשובה נפסלת

(2) $2x \Rightarrow 2 \cdot 3 = 6$ $\Rightarrow$ לא מתאים, התשובה נפסלת

(3) $x^2 \Rightarrow 3^2 = 9$ $\Rightarrow$ **מתאים**

(4) $x^3 \Rightarrow 3^3 = 27$ $\Rightarrow$ לא מתאים, התשובה נפסלת

פסלנו 3 תשובות ועל כן תשובה (3) נכונה.

דרך ב'- פתרון מתמטי
כאמור, למר כהן יש x ילדים. לכל אחד מהם יש x ילדים. כדי לדעת כמה נכדים יש לו, נכפול את מספר ילדיו במספר הילדים של ילדיו :

$$x \cdot x = x^2$$

.9 תשובה (4) נכונה. שאלה 4 מתוך 20 בפרק.

כשהפרופורציה מבוטאת באמצעות שבר באמצע המשפט, ניתן להגדיר את הקבוצה הראשונה בתור המונה והקבוצה השנייה בתור המכנה. כך אנו שומרים על הפרופורציה ומוצאים הצבה פשוטה בקלות.

נתון שכמות הצוף בפרח צהוב גדולה פי $\frac{3}{2}$ מכמות הצוף בפרח אדום.

על כן, נציב שכמות הצוף בפרח אדום היא 2 וכמות הצוף בפרח צהוב היא 3. כך מצאנו הצבה נוחה בה שמרנו על הפרופורציה הנתונה בשאלה.

כעת נבדוק מה כמות הצוף בכל זר :

<u>תשובה (1) :</u> זר של 6 פרחים צהובים $\Leftarrow$ $6 \cdot 3 = 18$

<u>תשובה (2) :</u> זר של 8 פרחים צהובים $\Leftarrow$ $8 \cdot 2 = 16$

<u>תשובה (3) :</u> זר של 2 פרחים צהובים ו-3 פרחים אדומים $\Leftarrow$ $2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 6 + 6 = 12$

<u>תשובה (4) :</u> זר של 5 פרחים צהובים ו-2 פרחים אדומים $\Leftarrow$ $5 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 15 + 4 = 19$

תשובה (4) נכונה.

---

10. תשובה (1) נכונה. שאלה 8 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הצבת מספרים

בשאלה זו אנו מתבקשים למצוא כמה קלסרים ניתן לקנות במחיר של 9 מחברות. לשם כך, עלינו לדעת מה מחירן של 9 מחברות ומה מחירו של כל קלסר.

נתון שמחירו של קלסר גבוה פי 2 ממחירו של עיפרון. נציב שמחיר עיפרון הוא 1 ₪ ומכאן שמחיר קלסר הוא 2 ₪.

כעת, עלינו למצוא את מחירה של כל מחברת. לפי הנתון הראשון, מחירן של 6 מחברות שווה למחירים של 2 קלסרים ו-4 עפרונות. 2 קלסרים עולים 4 ₪ $(2 \cdot 2)$ ו-4 עפרונות עולים 4 ₪ $(4 \cdot 1)$. בסך הכול 8 ₪. כלומר, מחירן של 6 מחברות הוא 8 ₪ ועל כן מחירה של כל מחברת הוא $\frac{4}{3}$ ₪ $\left(\frac{8}{6}\right)$. כלומר, מחירן של 9 מחברות הוא 12 ₪ $\left(\frac{4}{3} \cdot 9\right)$.

מאחר שמצאנו שמחירו של קלסר הוא 2 ₪, במחירן של 9 מחברות (12 ₪) ניתן לקנות 6 קלסרים.

דרך ב' – פתרון מתמטי

נציב כי מחיר העיפרון הוא x ולפיכך מחירו של קלסר הוא 2x. מחירן של 6 מחברות שווה למחירים של 2 קלסרים ו-4 עפרונות. נבטא את מחירם של 2 הקלסרים ו-4 העפרונות באופן אלגברי:

$$2 \cdot 2x + 4 \cdot x = 4x + 4x = 8x$$

כלומר, מחירן של 6 מחברות הוא 8x ולפיכך מחירה של כל מחברת הוא $\frac{4x}{3}$ $\left(\frac{8x}{6}\right)$.

נחשב את מחירן של 9 מחברות:

$$\frac{4x}{3} \cdot 9 = 4x \cdot 3 = 12x$$

כאמור, מחירו של כל קלסר הוא 2x ומכאן שבמחיר של 9 מחברות (12x) ניתן לקנות 6 קלסרים.

11. תשובה (2) נכונה. שאלה 8 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – פתרון מתמטי
נעקוב אחר הפעולות שביצעה ענת ונבנה משוואה המתארת אותן.
ענת חילקה את x ב-9: $\frac{x}{9}$
מהתוצאה החסירה 4: $\frac{x}{9}-4$
את ההפרש הכפילה ב-5: $5\cdot\left(\frac{x}{9}-4\right)$
למכפלה היא הוסיפה 20: $5\cdot\left(\frac{x}{9}-4\right)+20$

לאחר כל הפעולות היא קיבלה את המספר x, כלומר, הביטוי שאליו הגענו שווה ל-x. נחשב:

$$5\cdot\left(\frac{x}{9}-4\right)+20=x$$

$$\frac{5x}{9}-20+20=x$$

$$\frac{5x}{9}=x$$

$$5x=9x$$

$$4x=0$$

$$x=0$$

דרך ב' – הצבת תשובות
נבצע את הפעולות המתוארות על כל תשובה ונבדוק האם התוצאה שווה למספר המקורי.

טיפ: כאשר עובדים עם התשובות, מומלץ להתחיל בבדיקת התשובות הנוחות ביותר. במקרה זה, תשובה נוחה תהיה תשובה אשר חלוקתה ב-9 תותיר מספר שלם.

<u>נבדוק את תשובה (2)</u>: $x = 0$
נחלק ב-9: $0 : 9 = 0$
נחסיר 4: $0 - 4 = -4$
נכפיל ב-5: $(-4)\cdot 5 = -20$
נוסיף 20: $-20 + 20 = 0$
לאחר שביצענו את הפעולות המתוארות אכן הגענו ל-0, המספר אותו הצבנו כ-x בתשובה זו. **תשובה נכונה.**

טיפ: מכיוון שהצבנו את התשובות, ברגע שמצאנו תשובה נכונה אין צורך להמשיך לבדוק את שאר התשובות, אך למען שלמות ההסבר נפסול את יתר התשובות.

בשלב זה התשובה הנוחה הבאה היא תשובה (4) מאחר שהיא מתחלקת ב-9:
<u>נבדוק את תשובה (4)</u>: $x = 45$
נחלק ב-9: $45 : 9 = 5$
נחסיר 4: $5 - 4 = 1$
נכפיל ב-5: $1 \cdot 5 = 5$
נוסיף 20: $5 + 20 = 25$
לאחר שביצענו את הפעולות המתוארות לא הגענו ל-45, המספר אותו הצבנו כ-x בתשובה זו. התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (1)</u>: $x = 1$

נחלק ב-9: $1:9 = \frac{1}{9}$

נחסיר 4: $\frac{1}{9} - 4 = \frac{1}{9} - \frac{36}{9} = -\frac{35}{9}$

נכפיל ב-5: $-\frac{35}{9} \cdot 5 = -\frac{175}{9}$

נוסיף 20: $-\frac{175}{9} + 20 = -\frac{175}{9} + \frac{180}{9} = \frac{5}{9}$

לאחר שביצענו את הפעולות המתוארות לא הגענו ל-1, המספר אותו הצבנו כ-x בתשובה זו. התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (3)</u>: $x = \frac{9}{5}$

נחלק ב-9: $\frac{9}{5}:9 = \frac{1}{5}$

נחסיר 4: $\frac{1}{5} - 4 = \frac{1}{5} - \frac{20}{5} = -\frac{19}{5}$

נכפיל ב-5: $-\frac{19}{5} \cdot 5 = -19$

נוסיף 20: $-19 + 20 = 1$

לאחר שביצענו את הפעולות המתוארות לא הגענו ל-$\frac{9}{5}$, המספר אותו הצבנו כ-x בתשובה זו. התשובה נפסלת.

---

12. תשובה (4) נכונה. שאלה 9 מתוך 20 בפרק.

עלינו לקבוע כמה מעות יש ב-1 דינר. ידוע לנו שב-1 זוז יש 6 מעות. כמו כן, זוז 1 שווה $\frac{1}{4}$ דינר. לפיכך, 4 זוזים שווים דינר 1.

אם 4 זוזים שווים דינר 1, וכל אחד מהם שווה 6 מעות, הרי שבדינר 1 יש 24 מעות $(6 \cdot 4)$.

ניתן לראות זאת גם בטבלת יחסים -

<u>דינר</u>	<u>זוז</u>	<u>מעות</u>
$\frac{1}{4}$	1	6
1	?	?

$\cdot 4$ $\cdot 6$

ניתן לזהות יחס אופקי בין דינר לזוז של פי 4 בין $\frac{1}{4}$ ל-1, ולכן נרחיב גם את 1 פי 4 $\Leftarrow$ 4.

עתה נזהה יחס אופקי בין זוז למעות של פי 6 בין 1 ל-6, לכן נרחיב גם את 4 פי 6 $\Leftarrow$ 24.

לפיכך, 1 דינר = 4 זוז = 24 מעות.

---

13. תשובה (3) נכונה. שאלה 10 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הצבת מספרים

ניתן לראות שבשאלה הסוחר מכר $\frac{1}{3}$ מסחורתו ולאחר מכן מכר $\frac{1}{4}$ מהסחורה שנותרה. נוכל להציב במקום סחורתו מספר נוח שיקל על החישוב. ניתן לראות שהסוחר חילק את סחורתו ב-3 ולאחר מכן שוב ב-4, נציב מספר שמתחלק ב-12 כדי להבטיח שהחלוקה תתקיים בשלמות. נניח שלסוחר סחורה המתחלקת ב-12 (למשל 12 כדורים).

במקום הראשון הסוחר מכר $\frac{1}{3}$ מהכדורים שלו, כלומר 4 כדורים $\left(\frac{12}{3}\right)$ ונותרו לו 8 כדורים. במקום השני הוא מכר $\frac{1}{4}$ מ-8 הכדורים שהיו לו, כלומר 2 כדורים $\left(\frac{8}{4}\right)$. עד כה הסוחר מכר 6 כדורים $(2 + 4)$ ונותרו לו 6 נוספים. על 6 הכדורים שמכר הוא קיבל 210 ₪, לכן אם הוא היה מוכר גם את 6 הכדורים הנוספים הוא היה מקבל גם עליהם 210 ₪ והרווח הסופי שלו היה 420 ₪.

דרך ב' – פתרון מתמטי

סוחר מכר חלק מסחורתו וקיבל עבורה 210 ₪. עלינו לקבוע כמה שקלים היה מקבל הסוחר אילו מכר את כל סחורתו. לשם כך, תחילה נבין איזה חלק מסחורתו מכר.

ראשית, הסוחר מכר $\frac{1}{3}$ מסחורתו. בשלב זה נותרו לו $\frac{2}{3}$ מהסחורה. לאחר מכן, הוא מכר $\frac{1}{4}$ מ-$\frac{2}{3}$ שנותרו לו. משמע, מכר $\frac{1}{6}$ מסחורתו המקורית $\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}\right)$. לפיכך, בסך הכל הוא מכר $\frac{1}{2}$ מסחורתו $\left(\frac{3}{6} = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}\right)$.

אם בעבור חצי מהסחורה הוא קיבל 210 ₪, הרי שעל כולה הוא היה מקבל 420 ₪ $(2 \cdot 210)$.

דרך ג' – הצבת תשובות

נבדוק בכל אחת מהתשובות את התהליך המתואר לעיל ונחפש תשובה אשר מתאימה לכל הנתונים.

טיפ: בהצבת תשובות, כדאי להתחיל בתשובות הנוחות יותר.

<u>נבדוק את תשובה (2):</u> אם בעבור כל הסחורה המוכר היה מקבל 360 ₪, הרי שעל $\frac{1}{3}$ ממנה הוא היה מקבל 120 ₪ $\left(\frac{360}{3}\right)$. לאחר מכן הוא מכר $\frac{1}{4}$ מהסחורה שנותרה לו. נותרה לו סחורה שערכה הכספי הוא 240 ₪ $(120 - 360)$ ועל כן בעבור חלק זה הוא היה מקבל 60 ₪ $\left(\frac{240}{4}\right)$. בסך הכל, הוא היה מקבל עבור הסחורה שמכר 180 ₪ $(60 + 120)$. ידוע לנו שהוא קיבל 210 ₪. לא מתאים, התשובה נפסלת.

<u>שימו לב</u>, בשלב זה ניתן לבצע הערכת סדר גודל. כאשר הצבנו כי ערך כל סחורתו של הסוחר הוא 360 ₪, גילינו שהכסף שקיבל עבור חלק מהסחורה היה נמוך מדי. על כן, ניתן להסיק כי ערכה של כל הסחורה גבוה מ-360 ₪. התשובה היחידה שמתאימה היא תשובה (3) וניתן לסמנה מבלי לבדוק אותה. למען שלמות ההסבר נבדוק את נכונותה:

<u>נבדוק את תשובה (3):</u> אם בעבור כל הסחורה המוכר היה מקבל 420 ₪, הרי שעל $\frac{1}{3}$ ממנה הוא היה מקבל 140 ₪ $\left(\frac{420}{3}\right)$. לאחר מכן הוא מכר $\frac{1}{4}$ מהסחורה שנותרה לו. נותרה לו סחורה שערכה הכספי הוא 280 ₪ $(140 - 420)$ ועל כן בעבור חלק זה הוא היה מקבל 70 ₪ $\left(\frac{280}{4}\right)$. בסך הכל, הוא היה מקבל עבור הסחורה שמכר 210 ₪ $(70 + 140)$. מתאים, **תשובה נכונה.**

טיפ: מכיוון שהצבנו את התשובות, ברגע שמצאנו תשובה נכונה אין צורך להמשיך לבדוק את שאר התשובות, אך למען שלמות ההסבר נפסול אותן:

<u>נבדוק את תשובה (1):</u> אם בעבור כל הסחורה המוכר היה מקבל 315 ₪, הרי שעל $\frac{1}{3}$ ממנה הוא היה מקבל 105 ₪ $\left(\frac{315}{3}\right)$. לאחר מכן הוא מכר $\frac{1}{4}$ מהסחורה שנותרה לו. נותרה לו סחורה שערכה הכספי הוא 210 ₪ (315 – 105) ועל כן בעבור חלק זה הוא היה מקבל 52.5 ₪ $\left(\frac{210}{4}\right)$. אין צורך להשלים את החישוב מכיוון שסכום הכסף שקיבל חייב להיות שלם. לא מתאים, התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (4):</u> אם בעבור כל הסחורה המוכר היה מקבל 204 ₪, הרי שעל $\frac{1}{3}$ ממנה הוא היה מקבל 68 ₪ $\left(\frac{204}{3}\right)$. לאחר מכן הוא מכר $\frac{1}{4}$ מהסחורה שנותרה לו. נותרה לו סחורה שערכה הכספי הוא 136 ₪ (204 – 68) ועל כן בעבור חלק זה הוא היה מקבל 34 ₪ $\left(\frac{136}{4}\right)$. בסך הכל, הוא היה מקבל עבור הסחורה שמכר 102 ₪ (34 + 68). ידוע לנו שהוא קיבל 210 ₪. לא מתאים, התשובה נפסלת.

---

14. תשובה (2) נכונה. שאלה 12 מתוך 20 בפרק.

ידוע שקופסת קפה מכילה 150 כפיות קפה ומחירה 15 ₪, ואילו שקית סוכר מכילה 400 כפיות סוכר ומחירה 16 ₪. עלינו לחשב מה מחירה של כוס קפה המכילה כפית קפה ו-2 כפיות סוכר.

תחילה, נחשב את מחירה של כפית קפה בעזרת ריבוע יחסים:

<u>כפיות</u>	<u>מחיר</u>
150	15
1	?

:10

בין 150 ל-15 ניתן לזהות יחס אופקי של חלוקה ב-10, ולכן נחלק גם את 1 ב-10 $\Leftarrow$ 0.1.
לפיכך, מחירה של כפית קפה הוא 0.1 ₪.

כעת, נחשב את מחירן של 2 כפיות סוכר בעזרת ריבוע יחסים:

<u>כפיות</u>	<u>מחיר</u>
400	16
2	?

:200

בין 400 ל-2 ניתן לזהות יחס אנכי של חלוקה ב-200, ולכן נחלק גם את 16 ב-200 $\Leftarrow$

$$\frac{16}{200}=\frac{8}{100}=0.08$$

לפיכך, מחירן של 2 כפיות סוכר הוא 0.08 ₪.

לסיכום, מחירה של כוס הקפה המדוברת הוא 0.18 ₪ (0.1 + 0.08).

---

15. תשובה (4) נכונה. שאלה 12 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – חישוב
סנאי אוגר במשך 5 ימים אגוזים עבור 25 הימים הבאים. בכל אחד מימי העבודה הוא אוסף 20 אגוזים, שהם בסך הכול 100 אגוזים ($20 \cdot 5$). כמו כן, בכל יום עבודה הסנאי אוכל x אגוזים. עלינו למצוא את x.

נתון שהסנאי אוכל 3 אגוזים בדיוק בכל אחד מ-25 הימים הבאים. משמע, הסנאי אוכל במהלך הימים הללו 75 אגוזים בסך הכל ($3 \cdot 25$). בנוסף, ידוע לנו שבתום כל הימים נגמרים לסנאי כל האגוזים. לפיכך, את 25 האגוזים הנותרים ($25 - 100$) הוא כבר צרך בחמשת ימי העבודה. על כן, בכל יום הוא אכל 5 אגוזים $\left(\frac{25}{5}\right)$ $\Leftarrow$ $x = 5$.

דרך ב' – הצבת תשובות
נציב את התשובות במקום x ונבדוק איזו תשובה מקיימת את הנתונים.

<u>נבדוק את תשובה (1):</u> אם $x = 25$ אזי בכל יום מתוך חמשת ימי האגירה הסנאי אגר 20 אגוזים ואכל 25 מתוכם. נתון זה כמובן אינו מתאפשר משום שהסנאי אוכל יותר ממה שהוא אסף. התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (2):</u> אם $x = 15$ אזי בכל יום מתוך חמשת ימי האגירה הסנאי אגר 20 אגוזים ואכל 15 מתוכם. לפיכך, בכל יום מימי האגירה לסנאי נותרו 5 אגוזים ($15 - 20$) כלומר בסה"כ יש לו 25 אגוזים (5 אגוזים בכל אחד מחמשת הימים $\Leftarrow$ $5 \cdot 5$). בהמשך החודש הסנאי אוכל 3 אגוזים בכל אחד מ-25 הימים הנותרים, כלומר 75 אגוזים ($3 \cdot 25$). אך בתשובה שהצבנו לסנאי ישנם רק 25 אגוזים. לא מתאים, התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (3):</u> אם $x = 3$ אזי בכל יום מתוך חמשת ימי האגירה הסנאי אגר 20 אגוזים ואכל 3 מתוכם. לפיכך, בכל יום מימי האגירה לסנאי נותרו 17 אגוזים ($3 - 20$) כלומר בסה"כ יש לו 85 אגוזים (17 אגוזים בכל אחד מחמשת הימים $\Leftarrow$ $5 \cdot 17$). בהמשך החודש הסנאי אוכל 3 אגוזים בכל אחד מ-25 הימים הנותרים, כלומר 75 אגוזים ($3 \cdot 25$) ומסיים את מאגר האגוזים. אך בתשובה שהצבנו לסנאי יישארו עוד 10 אגוזים ($75 - 85$). לא מתאים, התשובה נפסלת.

טיפ: כיוון שפסלנו 3 תשובות, ניתן לסמן את תשובה (4) מבלי לבדוק אותה. למען שלמות ההסבר, נבדוק את נכונותה:

<u>נבדוק את תשובה (4):</u> אם $x = 5$ אזי בכל יום מתוך חמשת ימי האגירה הסנאי אגר 20 אגוזים ואכל 5 מתוכם. לפיכך, בכל יום מימי האגירה לסנאי נותרו 15 אגוזים ($5 - 20$) כלומר בסה"כ יש לו 75 אגוזים (15 אגוזים בכל אחד מחמשת הימים $\Leftarrow$ $5 \cdot 15$). בהמשך החודש הסנאי אוכל 3 אגוזים בכל אחד מ-25 הימים הנותרים, כלומר 75 אגוזים ($3 \cdot 25$) ומסיים את מאגר האגוזים. מתאים, **תשובה נכונה.**

דרך ג' – פתרון מתמטי
במהלך חמשת ימי האגירה הראשונים בחודש, הסנאי אוסף 20 אגוזים ואוכל x מתוכם, כלומר ניתן לבטא את מספר האגוזים שנותרו לסנאי בכל יום כ- ($x - 20$). מכיוון שהסנאי אגר מספר זה של אגוזים בכל אחד מחמשת ימי האגירה, בסך הכול הסנאי אגר:

$$5(20 - x)$$

עוד נתון כי במהלך 25 הימים הנותרים בחודש הסנאי אכל 3 אגוזים בכל יום וסיים את מאגרו. כלומר הסנאי אכל 75 אגוזים ($3 \cdot 25$).
מכאן שמספר האגוזים שנותרו לסנאי לאחר ימי האגירה שווה ל-75. נבנה את המשוואה:

$$5(20 - x) = 75$$

ניתן לחלק את שני אגפי המשוואה ב-5:

$$20 - x = 15$$
$$5 = x$$

16. תשובה (2) נכונה. שאלה 12 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – ניסוי וטעייה

ניתן להבין כי גיליהן של ענת והילה קטנים יחסית (שהרי ענת מבוגרת מהילה פי 3 וההפרש ביניהן הוא רק 4 שנים), ועל כן ניתן למצוא בקלות את הגילים אשר מקיימים את הנתונים.

אם הילה בת שנה, ענת בת 3 (לפי יחס הגילים). ההפרש ביניהן אינו 4 שנים ועל כן אלו אינם הגילים המתאימים.
אם הילה בת שנתיים, ענת בת 6 (לפי יחס הגילים). ההפרש ביניהן הוא אכן 4 שנים ($6 - 2$), ועל כן אלו גיליהן היום.
בעוד שנתיים תהיה ענת בת 8 והילה בת 4. והיחס ביניהן יהיה 8:4 ← 2:1.

דרך ב' – יחסים

ידוע כי ענת מבוגרת מהילה ב-4 שנים. בנוסף, גילה של ענת מהווה 3 יחידות יחס לעומת גילה של הילה המהווה יחידת יחס אחת, כלומר גילה של ענת גדול ב-2 יחידות יחס מגילה של הילה.
לפיכך, 2 יחידות יחס שוות ל-4 שנים, ומכאן שגילה של הילה (המהווה יחידת יחס אחת) הוא שנתיים, וגילה של ענת המבוגרת ממנה בארבע שנים הוא 6.
בעוד שנתיים תהיה ענת בת 8 והילה בת 4. והיחס ביניהן יהיה 8:4 ← 2:1.

דרך ג' – פתרון מתמטי

נציב את גילה של הילה כ-H. ידוע כי ענת מבוגרת מהילה בארבע שנים, ולכן גילה הוא $H + 4$.
עוד נתון כי ענת מבוגרת מהילה פי 3, לכן כדי לבנות את משוואת גילן נשתמש בעיקרון "תן למסכן" ונרחיב את גילה של הילה פי 3:

$$3H = H + 4$$
$$2H = 4$$
$$H = 2$$

כלומר, גילה של הילה הוא שנתיים, וגילה של ענת המבוגרת ממנה בארבע שנים הוא 6.
בעוד שנתיים תהיה ענת בת 8 והילה בת 4. והיחס ביניהן יהיה 8:4 ← 2:1.

17. תשובה (3) נכונה. שאלה 12 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – חישוב

עלינו למצוא כמה שקלים ירוויח משה אם ימכור x ק"ג אגסים (במחיר x ₪ לקילו) ויקנה y ק"ג בננות (במחיר y ₪ לקילו). לשם כך, עלינו למצוא את ערכיהם של x ו-y.

הקשר בין x ל-y מתואר בנתונים. ראשית, נתון שמחירם של 1 ק"ג אגסים (x) ו-1 ק"ג בננות (y) שווה ל-13 שקלים בסך הכול. נתאר קשר זה באמצעות משוואה:

$$x + y = 13$$

כמו כן, נתון שמחירו של 1 ק"ג אגסים גבוה ב-3 ₪ ממחירו של 1 ק"ג בננות. נתאר זאת באמצעות משוואה, לפי עיקרון "תן למסכן" – נוסיף 3 למחיר ק"ג בננות.

$$x = y + 3$$

כעת נציב את ערכו של x מהמשוואה השנייה במשוואה הראשונה:

$$x + y = 13 \Rightarrow y + 3 + y = 13$$
$$2y + 3 = 13$$
$$2y = 10$$
$$y = 5$$

כעת נציב את ערכו של y במשוואה השנייה כדי למצוא את x:

$$x = y + 3 \Rightarrow x = 5 + 3 = 8$$

עתה, נציב את הערכים שמצאנו במקרה המתואר בשאלה:

משה ימכור 8 ק"ג אגסים במחיר 8 ₪ לקילו ⇐ יכניס 64 ₪ $(8 \cdot 8)$.

משה יקנה 5 ק"ג בננות במחיר 5 ₪ לקילו ⇐ יוציא 25 ₪ $(5 \cdot 5)$.

כלומר, משה ירוויח 39 ₪ $(64 - 25)$.

דרך ב' – הבנה אלגברית

אם משה ימכור x ק"ג אגסים במחיר x ₪ לקילו, הכנסתו תהיה שווה ל-x^2.

כמו כן, אם משה יקנה y ק"ג בננות במחיר y ₪ לקילו, הוצאותיו יהיו שוות ל-y^2.

הרווח של משה שווה להכנסה פחות ההוצאה, משמע: $x^2 - y^2$.

ניתן לפשט משוואה זו באמצעות נוסחת כפל מקוצר:

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$$

נמצא את ערכם של שני הביטויים שלעיל – $(x + y)$ ו- $(x - y)$.

ידוע לנו שמחירם של 1 ק"ג אגסים (x) ו-1 ק"ג בננות (y) שווה ל-13 שקלים, כלומר:

$$x + y = 13$$

בנוסף, נתון שמחירו של 1 ק"ג אגסים גבוה ב-3 ₪ ממחירו של 1 ק"ג בננות, ועל כן ההפרש בין המחירים הוא 3, כלומר:

$$x - y = 3$$

כעת, משמצאנו את ערכי הביטויים, נציב אותם בביטוי המתאר את הרווח של משה:

$$(x - y)(x + y) \Rightarrow 3 \cdot 13 = 39$$

<u>שימו לב,</u> יש מי שמצא מיד ששני המספרים היחידים שסכומם 13 וההפרש ביניהם הוא 3 הם 5 ו-8. אם לא מצאתם את המספרים, ניתן לפתור באופן אלגברי כמתואר לעיל.

18. תשובה (1) נכונה. שאלה 13 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הצבת מספרים

נציב: $a = 1$, $b = 2$. נתון שסכומי המספרים בכל השורות שווים זה לזה. נתבונן בריבוע. לפי נתון זה, סכום השורה הראשונה שווה לסכום השורה השנייה $\Leftarrow$ 3. לשם כך, נציב גם בשורה השנייה את המספרים 1 ו-2.
בנוסף, סכומי המספרים בכל טור שווים זה לזה. לפיכך, נציב: $c = 2$, $d = 1$.

1	2	= 3
c	d	= 3
=	=	
?	?	

$\Leftarrow$

1	2	= 3
2	1	= 3
=	=	
3	3	

כעת, נציב גם בתשובות $a = 1$, $b = 2$, $c = 2$, $d = 1$, ונחפש תשובה נכונה בהכרח. נשים לב שמכיוון שהשתמשנו בהצבת מספרים במקום הנעלמים, עלינו לפסול 3 תשובות בטרם נוכל לסמן תשובה נכונה.

<u>נבדוק את תשובה (1):</u> $a = d$ ו- $b = c$ $\Leftarrow$ $1 = 1$ ו- $2 = 2$. **מתאים.**

<u>נבדוק את תשובה (2):</u> $a \cdot d = b \cdot c$ $\Leftarrow$ $1 \cdot 1 \stackrel{?}{=} 2 \cdot 2$.
לא מתאים, התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (3):</u> $a = b = c = d = 1$ $\Leftarrow$ ידוע לנו ש-b ו-c שווים 2.
לא מתאים, התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (4):</u> $a + d = c + b$ $\Leftarrow$ $1 + 1 \stackrel{?}{=} 2 + 2$.
לא מתאים, התשובה נפסלת.

פסלנו 3 תשובות ועל כן תשובה (1) נכונה.

דרך ב' – פתרון מתמטי

בריבוע שלפנינו, סכומי השורות שווים זה לזה, וכן סכומי הטורים שווים זה לזה. נבטא קשרים אלה באופן אלגברי כדי להבין איזו טענה נובעת מהם בהכרח:

$$a + b = c + d$$
$$a + c = b + d$$

כדי להסיק מהמשוואות הללו טענה כלשהי, נקשר ביניהן. נתחיל בחיבור המשוואות:

$$+\begin{cases} a + b = c + d \\ a + c = b + d \end{cases}$$

$$2a + b + c = c + b + 2d$$
$$2a = 2d$$
$$a = d$$

לפיכך, נציב באחת המשוואות (בראשונה למשל) במקום $a \Leftarrow d$.

$$d + b = c + d$$

נעביר אגפים ונקבל:

$$b = c$$

לסיכום, ניתן לטעון כי בהכרח $a = d$ ו- $b = c$. משמע, תשובה (1) נכונה.

19. תשובה (4) נכונה. שאלה 14 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הצבת מספרים

לקיסר מחסן של אורז, ממנו הוא מחלק בכל שנה $\frac{1}{5}$ לנתיניו ($\frac{1}{5}$ מהכמות במחסן באותה שנה). עלינו לקבוע איזה חלק מכמות האורז ההתחלתית נשארה במחסנו לאחר 3 שנים של חלוקה כמתואר לעיל. נציב מספר נוח בתור כמות האורז שבמחסנו של הקיסר. מכיוון שהוא מחלק את כמות האורז ב-5 שלוש פעמים, נציב מספר המתחלק ב-125 (5^3). ניתן לראות שגם בתשובות המכנים הם 5 ו-125, ולכן נציב מספר שמתחלק במספרים הללו, למשל, 125 ק״ג.

בשנה ה-1 העביר הקיסר לנתיניו $\frac{1}{5}$ מ-125 $\Leftarrow$ 25 ק״ג $\left(\frac{125}{5}\right)$. נותרו לו 100 ק״ג במחסן ($125 - 25$).

בשנה ה-2 העביר הקיסר לנתיניו $\frac{1}{5}$ מ-100 $\Leftarrow$ 20 ק״ג $\left(\frac{100}{5}\right)$. נותרו לו 80 ק״ג במחסן ($100 - 20$).

בשנה ה-3 העביר הקיסר לנתיניו $\frac{1}{5}$ מ-80 $\Leftarrow$ 16 ק״ג $\left(\frac{80}{5}\right)$. נותרו לו 64 ק״ג במחסן ($80 - 16$).

לפיכך, לקיסר נותרו 64 ק״ג מתוך 125 ק״ג $\Leftarrow$ $\frac{64}{125}$.

דרך ב' – פתרון מתמטי

בכל שנה נותן הקיסר לנתיניו $\frac{1}{5}$ מכמות האורז שלו. לפיכך, בכל שנה נשאר לקיסר $\frac{4}{5}$ מכמות האורז. ידוע לנו שהתהליך חזר על עצמו במשך 3 שנים, ועל כן זהו הביטוי המתאר את החלק שנותר לקיסר לאחר 3 שנים:

$$\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}=\frac{64}{125}$$

---

20. תשובה (4) נכונה. שאלה 14 מתוך 20 בפרק.

נתון ש-״מידת החד-גוניות״ של סיפור היא היחס בין מספר המילים שבו למספר האיורים. עלינו לקבוע פי כמה גדולה ״מידת החד-גוניות״ של סיפור ארוך מזו של סיפור קצר. לשם כך, נמצא את ״מידת החד-גוניות״ של כל סיפור.

״מידת החד-גוניות״ של סיפור ארוך:

$$\frac{60{,}000}{35}$$

״מידת החד-גוניות״ של סיפור קצר:

$$\frac{2{,}000}{7}$$

כדי למצוא את פי כמה גדולה מידת החד-גוניות של סיפור ארוך משל סיפור קצר, נחלק אותן זו בזו:

$$\frac{\frac{60{,}000}{35}}{\frac{2{,}000}{7}}=\frac{60{,}\cancel{000}\cdot 7}{2{,}\cancel{000}\cdot 35}=\frac{30}{5}=6$$

לפיכך, ״מידת החד-גוניות״ של סיפור ארוך גדולה פי 6 מזו של סיפור קצר.

---

21. תשובה (1) נכונה. שאלה 14 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – בדיקת תשובות

בשדה יש רק זברות ויענים. לכל זברה ראש אחד ו-4 רגליים, ולכל יען ראש אחד ו-2 רגליים. נתון שבשדה יש 50 ראשים (כלומר, 50 בעל חיים) ו-120 רגליים, ועלינו לקבוע כמה זברות יש. נבדוק את התשובות ונחפש תשובה המתאימה לנתונים:

<u>נבדוק את תשובה (1):</u> אם בשדה יש 10 זברות, יש בו 40 יענים (10 – 50). לכל זברה 4 רגליים, ולכל הזברות יחד 40 רגליים (4 · 10). לכל יען 2 רגליים, ולכל היענים יחד 80 רגליים (2 · 40). בסך הכול 120 רגליים (80 + 40). **תשובה נכונה.**

טיפ: מכיוון שהצבנו את התשובות, ברגע שמצאנו תשובה נכונה אין צורך להמשיך לבדוק את שאר התשובות, אך למען שלמות ההסבר נפסול אותן:

<u>נבדוק את תשובה (2):</u> אם בשדה יש 20 זברות, יש בו 30 יענים (20 – 50). לכל זברה 4 רגליים, ולכל הזברות יחד 80 רגליים (4 · 20). לכל יען 2 רגליים, ולכל היענים יחד 60 רגליים (2 · 30). בסך הכל 140 רגליים (60 + 80). לא מתאים, התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (3):</u> אם בשדה יש 32 זברות, יש בו 18 יענים (32 – 50). לכל זברה 4 רגליים, ולכל הזברות יחד 128 רגליים (4 · 32). זה כבר יותר מכמות הרגליים הכללית, לכן אין צורך לחשב כמה רגליים יש ליענים. לא מתאים, התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (4):</u> אם בשדה יש 35 זברות, יש בו 15 יענים (35 – 50). לכל זברה 4 רגליים, ולכל הזברות יחד 140 רגליים (4 · 35). זה כבר יותר מכמות הרגליים הכללית, לכן אין צורך לחשב כמה רגליים יש ליענים. לא מתאים, התשובה נפסלת.

דרך ב' – פתרון מתמטי

נסמן את מספר הזברות – z. מכיוון שבשדה יש 50 ראשים (משמע, 50 בעלי חיים), מספר היענים יהיה $z - 50$.
כאמור, לכל זברה 4 רגליים ולכל יען 2 רגליים. בסך הכול בשדה 120 רגליים. נתאר קשר זה באופן אלגברי:

$$4 \cdot z + 2 \cdot (50 - z) = 120$$
$$4z + 100 - 2z = 120$$
$$2z = 20$$
$$z = 10$$

לפיכך, בשדה 10 זברות.

.22 תשובה (4) נכונה. שאלה 15 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הצבת מספרים

נתון שמספר המבקרים בעיר מסוימת היה שווה ל- $\frac{3}{4}$ ממספר התושבים בעיר. עלינו לקבוע איזה חלק מכלל האנשים בעיר היוו המבקרים בו. לשם כך, נציב מספר נוח בתור מספר התושבים בעיר.

כאשר הפרופורציה מבוטאת באמצעות שבר באמצע המשפט, ניתן להגדיר את הקבוצה הראשונה (במקרה זה המבקרים) בתור המונה והקבוצה השנייה (התושבים בעיר) בתור המכנה. כך אנו שומרים על הפרופורציה ומוצאים הצבה פשוטה בקלות.

באותו הבוקר, מספר המבקרים בעיר היה שווה ל- $\frac{3}{4}$ ממספר התושבים בה.

לכן, נציב שמספר המבקרים בעיר הוא 3 ומספר התושבים בעיר הוא 4. לפיכך, כלל האנשים בעיר הם 7 (4 + 3).

על כן, מספר המבקרים (3) מהווים מתוך כלל האנשים (7) $\frac{3}{7}$.

דרך ב' – פתרון מתמטי

נציב בתור מספר התושבים בעיר x. אם בעיר יש x תושבים, היו בה $\frac{3}{4}x$ מבקרים. כדי להבין מה חלקם של המבקרים מתוך כלל האנשים בעיר, נחשב כמה אנשים היו בעיר:

$$\frac{3}{4}x + x = \frac{3x}{4} + \frac{4x}{4} = \frac{7x}{4}$$

כעת נחשב את חלקם של המבקרים ממספר זה:

$$\frac{\frac{3x}{4}}{\frac{7x}{4}} = \frac{3x \cdot 4}{7x \cdot 4} = \frac{3}{7}$$

.23 תשובה (3) נכונה. שאלה 15 מתוך 20 בפרק.

תמר עובדת חמישה ימים בשבוע, ובשניים מתוכם היא לוקחת הפסקה של שעתיים. בסך הכל מעוניינת תמר לעבוד 30 שעות בשבוע ולצאת בכל יום באותה שעה.

תחילה, נבין כמה שעות בשבוע צריכה תמר להיות נוכחת במקום העבודה. כאמור, תמר עובדת 30 שעות בשבוע ובנוסף, היא לוקחת 4 שעות הפסקה (2 · 2). בסך הכול, תמר נוכחת במקום העבודה במשך 34 שעות בשבוע (30 + 4). עלינו לחלק את השעות הללו ל-5 ימי עבודה שווים באורכם:

$$\frac{34}{5} = \frac{30}{5} + \frac{4}{5} = 6\frac{4}{5}$$

$\frac{1}{5}$ של שעה שווה ל-12 דקות $\left(\frac{60}{5}\right)$ ועל כן $\frac{4}{5}$ שווֹת ל-48 דקות (4 · 12). לפיכך, כל יום עבודה של תמר אורך 6:48 שעות. כאמור, היא מתחילה את עבודתה ב-8:00 ולכן עליה לצאת מהעבודה בכל יום ב-14:48.

.24 תשובה (1) נכונה. שאלה 15 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הצבת מספרים
עלינו למצוא את היחס בין אורכה הכולל של איגואנה לבין אורכה הכולל של זיקית. כיוון שנתונים יחסים ואין מספר שנוח לעבוד איתו, נציב מספרים בהתאם לנתונים.

טיפ: כשהפרופורציה מבוטאת באמצעות שבר באמצע המשפט, ניתן להגדיר את הגורם הראשון בתור המונה ואת הגורם השני בתור המכנה. כך אנו שומרים על הפרופורציה ומוצאים הצבה פשוטה בקלות.

נתון לנו כי אורך זנבה של איגואנה הוא $\frac{2}{5}$ מהאורך הכולל של גופה.

על כן, נציב כי אורך הזנב הוא 2 ואורך גופה 5. כך מצאנו הצבה נוחה בה שמרנו על הפרופורציה הנתונה בשאלה. נעשה את אותו הדבר גם בנתון השני:

אורך זנבה של זיקית הוא $\frac{1}{5}$ מהאורך הכולל של גופה. לכן, נציב כי אורך הזנב הוא 1 ואורך גופה 5.

כמו כן, נתון כי אורך זנבה של איגואנה גדול פי 10 מאורך זנבה של זיקית. לכן, נשנה את ההצבה שלנו כך שתתאים לנתון זה; את אורך זנבה של האיגואנה נגדיל מ-2 ל-10 (כדי שיהיה ארוך פי 10 מזנב זיקית, שאורכו 1). כלומר, כפלנו ב-5, וכדי לשמור על היחס בין אורך זנבה של האיגואנה לגופה, נכפול גם את אורך גופה פי 5 : 25.

כעת, כל ההצבות שלנו תואמות את הנתונים. היחס בין אורכה הכולל של האיגואנה לבין אורכה הכולל של הזיקית יהיה 5 : 25, ולאחר צמצום - 1 : 5.

דרך ב' – פתרון מתמטי
אנו מתבקשים לקבוע מה היחס בין אורכה הכולל של איגואנה לבין אורכה הכולל של זיקית. נציב x בתור אורך זנב הזיקית. נתון כי אורך זנבה של איגואנה גדול פי 10 מאורך זנבה של זיקית ולכן אורך זנב האיגואנה 10x. כעת ניעזר בנתונים הללו כדי לקבוע מה אורך גופן של זיקית ואיגואנה.

אורך זנבה של איגואנה הוא 10x והוא מהווה $\frac{2}{5}$ מהאורך הכולל של גופה. ניעזר בטבלת יחסים כדי למצוא את אורך גופה:

יחס	אורך
2	10x
5	?

$\cdot 5x$

ניתן לזהות יחס אופקי של פי 5x בין 2 ל-10x, ולכן נרחיב גם את 5 פי 5x ⇐ 25x.

אורך זנבה של זיקית הוא x והוא מהווה $\frac{1}{5}$ מהאורך הכולל של גופה. ניעזר בטבלת יחסים כדי למצוא את אורך גופה:

יחס	אורך
1	x
5	?

$\cdot 5$

ניתן לזהות יחס אנכי של פי 5 בין 1 ל-5, ולכן נרחיב גם את x פי 5 ⇐ 5x.

כאמור, עלינו לקבוע מה היחס בין אורכה הכולל של איגואנה לבין אורכה הכולל של זיקית. יחס זה הוא 5x : 25x ⇐ 1 : 5.

25. תשובה (4) נכונה. שאלה 18 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – חישוב מהסוף

עלינו למצוא כמה קלפים היו לאיציק ולדני לפני ההעברה. אנו יכולים להשתמש במידע על המצב הנוכחי ומשם ללכת אחורה בסיפור.

ידוע לנו שכעת לאיציק יש 2 קלפים פחות מלדני, וכן ידוע שבסך הכול יש להם 20 קלפים. יש מי שמיד יראה את המספרים המתאימים. אם המספרים אינם "קופצים", ניתן להתחיל ממצב בו מספר הקלפים שלהם היה שווה. במצב זה לכל אחד היו 10 קלפים. נתחיל מלהפחית קלף אחד מאיציק ולהעביר לדני – איציק נותר עם 9 קלפים ודני עם 11. אלה הם המספרים המתאימים.

	דני	איציק
אחרי ההעברה	11	9

כעת נגיע למצב שהיה לפני ההעברה. איציק העביר 7 קלפים לדני, זאת אומרת שלפני ההעברה היו לאיציק 7 קלפים יותר מאשר לאחריה. לדני היו לפני ההעברה 7 קלפים פחות מאשר לאחריה.

	דני	איציק
אחרי ההעברה	11	9
לפני ההעברה	$11-7=4$	$9+7=16$

כלומר, היחס הוא: $\frac{16}{4}=4$.

דרך ב' – הצבת תשובות

בתשובות נתון היחס בין מספר קלפיו של איציק לפני ההעברה לבין מספר קלפיו של דני לפני ההעברה. כיוון שנתון היחס וכן הערך המספרי של הסכום, אנו יכולים לחשב את מספרי הקלפים של כל אחד לפני ההעברה. לאחר שנמצא מה היה לפני ההעברה, נחשב את מספרי הקלפים לאחר ההעברה באמצעות החסרת 7 מקלפיו של דני והוספת 7 לקלפיו של איציק, ונבדוק האם ההפרש ביניהם הוא 2, כפי שנתון בשאלה.

<u>נבדוק את תשובה (1)</u>: לפי תשובה זו היחס הוא 1, כלומר מספרי הקלפים שהיו ברשותם לפני ההעברה שווים. לשניהם יחד יש 20 קלפים, ועל כן לפני ההעברה לכל אחד מהם היו 10 קלפים. מכאן שלפי תשובה זו לדני יש 17 קלפים לאחר ההעברה (10+7) ולאיציק יש 3 (10-7). ההפרש ביניהם אינו 2 ועל כן התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (2)</u>: לפי תשובה זו, היחס הוא 2. ניתן, לדוגמה, לבטא אותו כך:

$$\frac{\text{איציק לפני ההעברה}}{\text{דני לפני ההעברה}}=\frac{2x}{x}$$

לפי תשובה זו, ישנם בסך הכול 3x קלפים, ונתון לנו כי יש להם יחד 20 קלפים. 20 אינו מתחלק ב-3, ועל כן התשובה נפסלת – אין מספר שלם של קלפים שיאפשר מצב כזה.

<u>נבדוק את תשובה (3)</u>: לפי תשובה זו, היחס הוא 3. ניתן, לדוגמה, לבטא אותו כך:

$$\frac{\text{איציק לפני ההעברה}}{\text{דני לפני ההעברה}}=\frac{3x}{x}$$

בסך הכול יש 4x קלפים, ונתון לנו כי יש להם יחד 20 קלפים, לכן:

$$4x=20$$
$$x=5$$

כלומר, לאיציק היו לפני ההעברה 15 קלפים (3·5) ולדני 5 (1·5).

מכאן שלפי תשובה זו לדני יש 12 קלפים לאחר ההעברה (5+7) ולאיציק יש 8 (15-7). ההפרש ביניהם אינו 2 ועל כן התשובה נפסלת.

טיפ: פסלנו 3 תשובות ועל כן ניתן לסמן את תשובה (4) מבלי לבדוק אותה, אולם למען שלמות ההסבר נבדוק את נכונותה:

נבדוק את תשובה (4): לפי תשובה זו, היחס הוא 4. ניתן, לדוגמה, לבטא אותו כך:

$$\frac{\text{איציק לפני ההעברה}}{\text{דני לפני ההעברה}} = \frac{4x}{x}$$

בסך הכול יש 5x קלפים, ונתון לנו כי יש להם יחד 20 קלפים, לכן:

$$5x = 20$$
$$x = 4$$

כלומר, לאיציק היו לפני ההעברה 16 קלפים (4·4) ולדני 4 (1·4).

מכאן שלפי תשובה זו לדני יש 11 קלפים לאחר ההעברה (7+4) ולאיציק יש 9 (7-16). ההפרש ביניהם הוא אכן 2 ועל כן זו התשובה הנכונה.

דרך ג' – פתרון מתמטי

אנו יכולים להציב נעלם במספר קלפיו של איציק לפני ההעברה, נציב x.

ידוע שלאיציק ולדני יש יחד 20 קלפים, כלומר מספר קלפיו של דני לפני ההעברה הוא $(20 - x)$.

לאחר ההעברה מספר קלפיו של דני גדל ב-7 ושל איציק קטן ב-7.

	דני	איציק
לפני ההעברה	$20 - x$	x
לאחר ההעברה	$20 - x + 7 = 27 - x$	$x - 7$

ידוע שאחרי ההעברה לאיציק נותרו 2 קלפים פחות מלדני. נשווה בין מספרי הקלפים לאחר ההעברה באמצעות הוספת 2 קלפים לאיציק (לפי עיקרון "תן למסכן"):

$$x - 7 + 2 = 27 - x$$
$$x - 5 = 27 - x$$
$$2x = 32$$
$$x = 16$$

כלומר, לאיציק היו 16 קלפים לפני ההעברה ולדני היו 4 $(20 - 16 = 4)$. היחס הוא: $\frac{16}{4} = 4$.

.26 תשובה (4) נכונה. שאלה 19 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – יחסים

ירון לווה מסיגל סכום כלשהו של כסף. הוא השתמש ב- $\frac{1}{3}$ מסכום זה לקניית בוטנים. ירון נתן לסיגל $\frac{3}{4}$ מהבוטנים כהחזר כספי. כאמור, $\frac{1}{3}$ מהחוב נוצל לקניית בוטנים ומתוך חלק זה, $\frac{3}{4}$ הוחזר לסיגל ע"י התשלום בבוטנים, כלומר, $\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}$ מהחוב הכולל $\Leftarrow$ $\frac{1}{4}$ מהחוב.

עתה, לאחר ששילם רבע מהחוב, נותרו לו 3.60 ₪ לשלם. לפיכך, סכום זה מהווה $\frac{3}{4}$ מהחוב. נציב נתונים אלה בטבלת יחסים:

	חלק	סכום
:3	$\frac{3}{4}$	3.60
·4	$\frac{1}{4}$	1.20
	$\frac{4}{4}$	4.80

לפיכך, הסכום אותו לווה ירון הוא 4.80 שקלים.

דרך ב' – הצבת התשובות

עלינו לגלות כמה כסף ירון לווה מסיגל. ניתן לבדוק את התשובות ולחפש תשובה אשר מתאימה לכל הנתונים.

טיפ: בהצבת תשובות, כדאי להתחיל בתשובות הנוחות יותר.

<u>נבדוק את תשובה (2):</u>

ירון לווה 6.00 ₪ מסיגל והוציא $\frac{1}{3}$ מהם על בוטנים. משמע, ירון שילם 2.00 ₪ על בוטנים $\left(\frac{6.00}{3}\right)$.

ירון החזיר לסיגל $\frac{3}{4}$ מערך זה, שהם 1.50 ₪ $\left(\frac{3}{4}\cdot 2\right)$.

במקרה זה החוב שנותר לירון לשלם לסיגל הוא 4.50 ₪ (6.00 – 1.50). ידוע שהחוב הנותר הוא 3.60 ₪ לא מתאים, התשובה נפסלת.

<u>שימו לב</u> שלא רק שהתשובה הנ"ל איננה מתאימה לנתוני השאלה, אלא שהחוב המתקבל לפיה הוא <u>גבוה</u> מדי. לכן עלינו לחפש תשובה הנמוכה מתשובה זו (נמוכה מ-6.00 ₪). לפיכך, לפי הבנה זו אנו יכולים לפסול מיידית את תשובה (1) שהיא גדולה יותר.

<u>נבדוק את תשובה (3):</u>

ירון לווה 5.40 ₪ מסיגל והוציא $\frac{1}{3}$ מהם על בוטנים. משמע, ירון שילם 1.80 ₪ על בוטנים $\left(\frac{5.40}{3}\right)$.

ירון החזיר לסיגל $\frac{3}{4}$ מערך זה, שהם 1.35 ₪ $\left(\frac{3}{4}\cdot 1.80\right)$.

אין צורך לחשב את החוב הכולל שכן ידוע לנו שהספרה השנייה אחרי הנקודה העשרונית (ספרת המאיות) צריכה להיות 0 ולא 5. לא מתאים, התשובה נפסלת.

טיפ: כיוון שפסלנו 3 תשובות, ניתן לסמן את תשובה (4) מבלי לבדוק אותה. למען שלמות ההסבר, נבדוק את נכונותה:

<u>נבדוק את תשובה (4):</u>

ירון לווה 4.80 ₪ מסיגל והוציא $\frac{1}{3}$ מהם על בוטנים. משמע, ירון שילם 1.60 ₪ על בוטנים $\left(\frac{4.80}{3}\right)$.

ירון החזיר לסיגל $\frac{3}{4}$ מערך זה, שהם 1.20 ₪ $\left(\frac{3}{4}\cdot 1.60\right)$.

במקרה זה החוב שנותר לירון לשלם לסיגל הוא 3.60 ₪ (4.80 – 1.20). מתאים, **תשובה נכונה.**

למען שלמות ההסבר נוכיח כי תשובה (1) אינה נכונה:

<u>נבדוק את תשובה (1):</u>

ירון לווה 7.20 ₪ מסיגל והוציא $\frac{1}{3}$ מהם על בוטנים. משמע, ירון שילם 2.40 ₪ על בוטנים $\left(\frac{7.20}{3}\right)$.

ירון החזיר לסיגל $\frac{3}{4}$ מערך זה, שהם 1.80 ₪ $\left(\frac{3}{4}\cdot 2.40\right)$.

במקרה זה החוב שנותר לירון לשלם לסיגל הוא 5.40 ₪ (7.20 – 1.80). ידוע שהחוב הנותר הוא 3.60 ₪ לא מתאים, התשובה נפסלת.

דרך ג' – פתרון מתמטי

ירון לווה מסיגל סכום כסף מסוים, שאותו עלינו למצוא. נציב x בתור סכום זה. ירון קנה בוטנים ב- $\frac{1}{3}$ מסכום זה, כלומר ב- $\frac{1}{3}$x. לאחר מכן, הוא נתן לסיגל $\frac{3}{4}$ מהבוטנים כדי להחזיר את החוב. ערכם הכספי של הבוטנים הללו הוא $\frac{3}{4}$ ממחיר הבוטנים:

$$\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}x=\frac{x}{4}$$

בנוסף לכסף שהחזיר לה, נותרו לו 3.60 ₪ לשלם. הסכום הכולל הוא למעשה x, סכום הכסף שירון לווה מסיגל.

נתאר זאת באופן אלגברי ונמצא את x:

$$\frac{x}{4}+3.60=x$$

נסדר אגפים:

$$3.60=\frac{3}{4}x$$

נכפול את שני האגפים ב-4 ונחלק ב-3:

$$\frac{3.60\cdot 4}{3}=x$$

$$x=1.20\cdot 4=4.80$$

---

27. תשובה (4) נכונה. שאלה 19 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הבנה

המורה כפל כל ציון ב- $\frac{1}{2}$. משמע, הקטין כל ציון לכדי חצי מהציון המקורי. לאחר מכן, הוסיף המורה 20 נקי' לציון הסופי. אם 20 הנקודות שהוסיף המורה לציון היו שוות בדיוק ל- $\frac{1}{2}$ אותו הפחית מהציון, הציון לא ישתנה. כדי שתרחיש זה יקרה, הציון המקורי צריך להיות 40 (שכן חצי ממנו שווה ל-20). כאשר ציון זה יוקטן, הוא יהפוך ל-20. לאחר מכן, יוסיפו לו 20 נקודות ולכן הוא יישאר זהה.

אם לעומת זאת הציון המקורי היה גבוה יותר, הקטנתו לכדי חצי תגרום לאובדן של יותר מ-20 נקודות (למשל, הקטנה של 60 תפחית 30 נקודות), וכך ההוספה של 20 הנקודות לא תפצה על כך. במקרה זה, הציון הסופי יהיה קטן יותר מהציון המקורי. לפיכך, ניתן לקבוע שהציון המקורי של טל היה גדול מ-40.

דרך ב' – פתרון מתמטי
נציב בתור ציונו המקורי של טל x. נתאר את התהליך שביצע המורה.

המורה כפל כל ציון בחצי ⇐ $\frac{x}{2}$
לאחר מכן הוא הוסיף לציון 20 נקודות ⇐ $\frac{x}{2}+20$
ידוע לנו שציון זה קטן מהציון המקורי. נתאר קשר זה באופן אלגברי:

$$\frac{x}{2}+20<x$$

נעביר אגפים:

$$20<\frac{x}{2}$$

נכפול ב-2:

$$40<x$$

לפיכך, הציון המקורי של טל היה גבוה מ-40.

דרך ג' – הצבת מספרים
התשובות מגדירות תחומים שונים של ציונים אפשריים אותם קיבל טל. נוכל להציב ציון רנדומאלי בתור ציונו של טל, ולבדוק האם ציון זה מקיים את נתוני השאלה. בהתאם לתוצאה שנקבל, נוכל לפסול תשובות שהציון אינו תואם את הטווח שלהן.

נניח למשל כי טל קיבל במבחן 60. נבדוק כיצד יושפע ציון זה מפעולת המורה:
המורה הכפיל את הציון ב- $\frac{1}{2}$ ⇐ 30.
לאחר מכן הוסיף 20 נקודות ⇐ 50.

לפיכך, ציונו של טל נפגע מפעולת המורה. כלומר, הציון 60 עשוי להיות הציון שקיבל במבחן.

כעת, נציב בתשובות את הציון 60 ונבדוק באיזו תשובה מופיע הטווח המתאים (נשים לב שמכיוון שהשתמשנו בהצבת מספרים, עלינו לפסול 3 תשובות בטרם נוכל לסמן תשובה נכונה).

(1) הציון היה נמוך מ-80 ⇐ 60 נמוך מ-80 ⇐ **מתאים**

(2) הציון היה גבוה מ-80 ⇐ 60 לא גבוה מ-80 ⇐ לא מתאים, התשובה נפסלת

(3) הציון היה נמוך מ-40 ⇐ 60 לא נמוך מ-40 ⇐ לא מתאים, התשובה נפסלת

(4) הציון היה גבוה מ-40 ⇐ 60 גבוה מ-40 ⇐ **מתאים**

קיבלנו שתשובות (1) ו-(4) מתאימות, לכן נבצע הצבה נוספת שתפסול את אחת מהן. נציב למשל שציונו של טל היה 100. ציון זה תואם את הטווח של תשובה (4) – גבוה מ-40, אך לא תואם את תשובה (1) – הוא אינו נמוך מ-80, לכן ציון זה יפסול בוודאות את אחת התשובות. נבדוק כיצד הושפע ציון זה מפעולת המורה:
המורה הכפיל את הציון ב- $\frac{1}{2}$ ⇐ 50.
לאחר מכן הוסיף 20 נקודות ⇐ 70.
לפיכך, ציונו של טל נפגע מפעולת המורה. כלומר, הציון 100 עשוי להיות הציון שקיבל במבחן.

(1) הציון היה נמוך מ-80 ⇐ 100 לא נמוך מ-80 ⇐ לא מתאים, התשובה נפסלת

(4) הציון היה גבוה מ-40 ⇐ 100 גבוה מ-40 ⇐ **מתאים**

.28 תשובה (2) נכונה. שאלה 19 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הערכת סדר גודל

רונן חילק את הסוכריות שהיו לו ל-2 ערמות שאינן בהכרח שוות בגודלן. הוא אכל $\frac{1}{4}$ מהסוכריות שבערמה הראשונה ו- $\frac{1}{8}$ מהסוכריות שבערמה השנייה. לאחר מכן, נותרו לו 23 סוכריות (14 + 9).

מהנתונים שלעיל ניתן להסיק כי הוא אכל לפחות סוכרייה אחת מכל ערמה (לא ייתכן שמספר הסוכריות שאכל אינו שלם ולכן הוא אכל לכל הפחות 2 סוכריות משתי הערמות יחד). לפיכך, היו לו <u>לפחות</u> 25 סוכריות (2 + 23). בשלב זה ניתן לפסול את תשובה (1).

כמו כן, ידוע לנו שהוא אכל פחות מחצי מכל ערמה. כלומר, הוא בהכרח אכל פחות מחצי מכל הסוכריות שהיו לו. אם הוא היה אוכל בדיוק חצי, יכולנו להסיק שהיו לו בהתחלה 46 סוכריות ולאחר שאכל 23 מהן, נותרו לו 23 סוכריות. אולם, כאמור, רונן אכל פחות מחצי מהסוכריות שקיבל ועל כן <u>נותרו לו יותר מחצי</u> מהסוכריות שקיבל. אם 23 סוכריות הן יותר מחצי ממספר הסוכריות שקיבל, הרי שהוא בהכרח קיבל פחות מ-46 סוכריות. בשלב זה ניתן לפסול את תשובות (3) ו-(4). התשובה היחידה שמתאימה היא תשובה (2).

דרך ב' – יחסים

רונן חילק את הסוכריות שהיו לו ל-2 ערמות שאינן בהכרח שוות בגודלן. הוא אכל $\frac{1}{4}$ מהסוכריות שבערמה הראשונה ו- $\frac{1}{8}$ מהסוכריות שבערמה השנייה. לאחר שאכל $\frac{1}{4}$ מהסוכריות שבערמה הראשונה, בערמה זו נותרו עוד $\frac{3}{4}$ ממספר הסוכריות שהיו בה. באותו אופן בערמה השנייה נותרו $\frac{7}{8}$ ממספר הסוכריות ההתחלתי שהיו בה. עוד נתון כי בערמות נותרו 9 ו-14 סוכריות.

ניתן לראות כי מפני שבערמה הראשונה נותר חלק המהווה $\frac{3}{4}$ מתוך מספר הסוכריות ההתחלתי, מספר הסוכריות בערמה זו חייב להתחלק ב-3 (בהתאם למונה). באותו אופן מספר הסוכריות בערמה השנייה המהווה $\frac{7}{8}$ ממספר הסוכריות ההתחלתי, חייב להתחלק ב-7.

לפיכך, נוכל להתאים את מספר הסוכריות שנותר בכל ערמה לאחר שרונן אכל ממנה, בערמה הראשונה המספר מתחלק ב-3 ולכן בערמה זו נותרו 9 סוכריות; ובערמה השנייה מספר הסוכריות מתחלק ב-7 ולכן נותרו בה 14 סוכריות. עתה נוכל לחשב את מספר הסוכריות ההתחלתי בכל ערמה.

חלק		סוכריות
$\frac{3}{4}$	:3	9
$\frac{1}{4}$	·4	3
$\frac{4}{4}$		12

חלק		סוכריות
$\frac{7}{8}$	:7	14
$\frac{1}{8}$	·8	2
$\frac{8}{8}$		16

לפיכך, לפני שרונן אכל מהערמות, בערמה הראשונה היו 12 סוכריות ובערמה השנייה היו 16 סוכריות, כלומר בשתי הערמות יחדיו היו 28 סוכריות (18 + 12).

דרך ג' – פתרון מתמטי

רונן חילק את הסוכריות שהיו לו ל-2 ערמות שאינן בהכרח שוות בגודלן. נציב בתור מספר הסוכריות בערמה הראשונה x ובתור מספר הסוכריות בערמה השנייה y.

ביום הראשון רונן אכל $\frac{1}{4}$ מהסוכריות בערמה הראשונה. לכן נותרו בה $\frac{3}{4}$ מהסוכריות $\Leftarrow$ $\frac{3}{4}x$.

בנוסף, ביום השני רונן אכל $\frac{1}{8}$ מהסוכריות בערמה השנייה. לכן נותרו בה $\frac{7}{8}$ מהסוכריות $\Leftarrow$ $\frac{7}{8}y$.

ידוע לנו שבערמות נותרו 14 ו-9 סוכריות. נבחן את המצבים השונים כדי לבדוק כמה סוכריות נותרו בערמה הראשונה וכמה נותרו בערמה השנייה.

אם בערמה הראשונה נותרו 14 סוכריות, נחשב כמה סוכריות היו בה מלכתחילה (נמצא את x):

$$\frac{3}{4}x = 14$$

נכפול את שני האגפים ב-4 ונחלק ב-3:

$$x = \frac{14 \cdot 4}{3}$$

כעת ניתן לראות כי x אינו שלם, שכן $14 \cdot 4$ לא מתחלק ב-3. מספר הסוכריות חייב להיות שלם ולכן תרחיש זה אינו אפשרי. לפיכך, בערמה הראשונה נותרו 9 סוכריות. נמצא את x:

$$\frac{3}{4}x = 9$$

נכפול את שני האגפים ב-4 ונחלק ב-3:

$$x = \frac{9 \cdot 4}{3} = 3 \cdot 4 = 12$$

לפיכך, <u>בערמה הראשונה היו 12 סוכריות</u>.

כעת נבדוק כמה סוכריות היו בערמה השנייה (נמצא את y). אם בערמה הראשונה נותרו 9 סוכריות, הרי שבערמה השנייה נותרו 14 סוכריות:

$$\frac{7}{8}y = 14$$

נכפול את שני האגפים ב-8 ונחלק ב-7:

$$y = \frac{14 \cdot 8}{7} = 2 \cdot 8 = 16$$

לפיכך, <u>בערמה השנייה היו 16 סוכריות</u>.

בסך הכל, רונן קיבל 28 סוכריות ($x + y \;\Rightarrow\; 12 + 16$).

29. תשובה (1) נכונה. שאלה 19 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הצבת תשובות
נשאלנו כמה כובעים היו לכל אחד מהמלכים, לאור הידיעה שהמלך ארתור חילק את כובעיו לששת פקידיו ואילו המלך ג'ורג' חילק אותם בין 30 פקידיו. נתון שכל פקיד של המלך ארתור קיבל פי 5 כובעים מפקיד של המלך ג'ורג'. נבדוק איזו תשובה מקיימת את הנתונים.

<u>נבדוק את תשובה (2)</u>:
למלך ארתור 30 כובעים – כל פקיד קיבל 5 $\left(\frac{30}{6}\right)$. למלך ג'ורג' 30 כובעים - כל פקיד קיבל 1 $\left(\frac{30}{30}\right)$.
כל פקיד של המלך ארתור קיבל פי 5 כובעים מפקיד של המלך ג'ורג'. **מתאים.**

בדרך כלל, ברגע שמצאנו תשובה נכונה לא היה צורך לבדוק את שאר התשובות, אך עדיין איננו יכולים לפסול את תשובה (1) ועל כן נמשיך בבדיקת תשובה נוספת.

<u>נבדוק את תשובה (3)</u>:
לארתור 60 כובעים – כל פקיד קיבל 10 $\left(\frac{60}{6}\right)$. למלך ג'ורג' 60 כובעים – כל פקיד קיבל 2 $\left(\frac{60}{30}\right)$.
גם במקרה זה, כל פקיד של המלך ארתור קיבל פי 5 כובעים מפקיד של המלך ג'ורג'. **מתאים.**

מצאנו ששתי תשובות מקיימות את הנתונים, משמע לא ניתן לדעת כמה כובעים היו לכל מלך ועל כן **תשובה (1) נכונה**. למען שלמות ההסבר נבדוק גם את תשובה (4):
לארתור 120 כובעים – כל פקיד קיבל 20 $\left(\frac{120}{6}\right)$. לג'ורג' 120 כובעים – כל פקיד קיבל 4 $\left(\frac{120}{30}\right)$.
כל פקיד של המלך ארתור קיבל פי 5 כובעים מפקיד של המלך ג'ורג'. **מתאים.**

דרך ב' – הבנה
ניתן להבין כי למעשה נתונים אלו מתקיימים עבור כל שלם אפשרי. זאת משום שאותו מספר כובעים חולק לפי 5 יותר פקידים, ומכאן שבהכרח כל אחד מהם יקבל פי 5 פחות. לפיכך, לא ניתן לקבוע לפי הנתונים מהו מספר הכובעים של כל מלך.

דרך ג' – פתרון מתמטי
נציב x בתור מספר הכובעים שהיו לכל מלך.
ידוע שהמלך ארתור חילק את כובעיו שווה בשווה בין 6 פקידיו. כלומר, כל פקיד קיבל $\frac{x}{6}$ כובעים.
ידוע שהמלך ג'ורג' חילק את כובעיו שווה בשווה בין 30 פקידיו. כלומר, כל פקיד קיבל $\frac{x}{30}$ כובעים.
כל פקיד של המלך ארתור קיבל פי 5 כובעים מפקיד של המלך ג'ורג'. לכן, כדי לבנות את המשוואה נשתמש בעיקרון "תן למסכן" ונכפיל את מספר הכובעים שקיבל פקיד של המלך ג'ורג' פי 5.

$$\frac{x}{30}\cdot 5=\frac{x}{6} \quad\Rightarrow\quad \frac{x}{6}=\frac{x}{6}$$

משוואה זו מתקיימת עבור כל x ולכן לא ניתן לדעת מה ערכו, ומכאן שאין דרך לקבוע מה מספר הכובעים של כל מלך.

30. תשובה (2) נכונה. שאלה 20 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הצבת מספרים

בחדר היו n אנשים ולכל אחד מהם היו n שקלים. כל אחד בתורו חילק שקל לכל הנוכחים ויצא מהחדר. עלינו לקבוע כמה כסף היה לאיש הרביעי לאחר שיצא מהחדר. נציב מספר נוח עבור n: הוא לא יכול להיות קטן מ-4, שכן היו בחדר לכל הפחות 4 אנשים. נציב: $n = 4$.

לפיכך, בחדר היו 4 אנשים ולכל אחד מהם היו 4 שקלים. כל אחד משלושת האנשים הראשונים שיצאו נתן לאדם שנשאר שקל אחד. כלומר, היו לו 4 שקלים בהתחלה, והוא קיבל עוד 3 שקלים. משמע, היו לו 7 שקלים בשלב זה. כשהוא קם כדי לצאת מהחדר, לא נותר שם אף אחד מלבדו ולכן הוא לא חילק כסף. לפיכך, נותרו לו 7 שקלים.

כעת, נציב גם בתשובות $n = 4$ ונחפש תשובה השווה ל-7. נשים לב שמכיוון שהשתמשנו בהצבת מספרים במקום הנעלמים, עלינו לפסול 3 תשובות בטרם נוכל לסמן תשובה נכונה.

(1) $n - 4 \Rightarrow 4 - 4 = 0$ $\Rightarrow$ לא מתאים, התשובה נפסלת

(2) 7 $\Rightarrow$ **מתאים**

(3) $n - 3 \Rightarrow 4 - 3 = 1$ $\Rightarrow$ לא מתאים, התשובה נפסלת

(4) 12 $\Rightarrow$ לא מתאים, התשובה נפסלת

פסלנו 3 תשובות ועל כן תשובה (2) נכונה.

דרך ב' – פתרון מתמטי

ידוע לנו שבחדר היו n אנשים ולכל אחד מהם היו n שקלים. גם לאיש הרביעי היו n שקלים. בזמן שהוא ישב בחדר, יצאו שלושה אנשים וכל אחד מהם נתן לו שקל. על כן, בשלב זה היו לו $(n + 3)$ שקלים.

לפני שהוא יצא מהחדר, הוא חילק שקל לכל אחד מהנוכחים. נבין לכמה אנשים הוא חילק כסף. כאמור, בהתחלה היו בחדר n אנשים. 3 מהם יצאו ונותרו בחדר $(n - 3)$ אנשים, כולל את האיש הרביעי. כאשר האיש הרביעי קם, הוא חילק כסף לכל האנשים שהיו בחדר <u>מלבד הוא עצמו</u>. כלומר, הוא חילק כסף ל-$(n - 3 - 1)$ אנשים.

נסכם, לאיש הרביעי היו $(n + 3)$ שקלים והוא חילק לאנשים בחדר $(n - 4)$ שקלים. נחשב כמה שקלים נותרו לו:

$$n + 3 - (n - 4) = n + 3 - n + 4 = 7$$

אחוזים

בעיות אחוזים הן הסוג הנפוץ ביותר בבחינה. השליטה באחוזים דרושה לעיתים גם בשאלות הסקה מתרשים/מטבלה, וגם בבעיות מסוגים שונים: ממוצעים, תנועה, הספק, חפיפה (תחום משותף), הסתברות ובעיות שונות. לרוב, שאלות האחוזים המופיעות בבחינה הפסיכומטרית אינן מורכבות מידי, ודורשות ידע בסיסי בלבד של חישוב אחוז משלם. קיימות כמובן מספר שיטות המקלות על פתרון שאלות אחוזים, ומקצרות את התהליך החישובי.

מהו אחוז?

אחוז הוא חלק מתוך שלם כלשהו.

השלם תמיד מסומן כ- 100%, ולפי זה ניתן לחשב חלקים ממנו בהתאם לאחוזים. למשל:

50% הם חצי מהשלם, מכיוון ש- 50 הם חצי מ- 100.

25% הם רבע מהשלם, מכיוון ש- 25 הם רבע מ- 100.

20% הם חמישית מהשלם, מכיוון ש- 20 הם חמישית מ- 100.

המרת אחוז לשבר

כדי להציג אחוזים כשבר יש לרשום את האחוז כשבר רגיל שהמכנה שלו הוא 100 ולצמצמו:

$$50\% = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$$

$$20\% = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$$

$$37\% = \frac{37}{100}$$

המרת שבר לאחוז

כדי להציג שבר כאחוז יש להכפיל את השבר ב- 100%:

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{4} \cdot 100\% = \frac{1}{4} \cdot \frac{100\%}{1} = \frac{100\%}{4} = 25\%$$

$$\frac{3}{5} = \frac{3}{5} \cdot 100\% = \frac{3}{5} \cdot \frac{100\%}{1} = \frac{3}{1} \cdot \frac{20\%}{1} = \frac{60\%}{1} = 60\%$$

ניתן גם להרחיב את השבר כך שהמכנה שלו יהיה 100, ואז המונה שמתקבל הוא האחוז:

$$\frac{1}{4} = \frac{1 \cdot 25}{4 \cdot 25} = \frac{25}{100} = 25\%$$

$$\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 20}{5 \cdot 20} = \frac{60}{100} = 60\%$$

מעברי שברים/אחוזים שכדאי להכיר בעל פה:

$\frac{1}{2} = 0.5 = 50\%$

$\frac{1}{3} = 0.333 = 33\frac{1}{3}\%$

$\frac{1}{4} = 0.25 = 25\%$

$\frac{1}{5} = 0.2 = 20\%$

$\frac{1}{6} = 0.1666\ldots = 16\frac{2}{3}\%$

$\frac{1}{8} = 0.125 = 12.5\%$

$\frac{1}{10} = 0.1 = 10\%$

$\frac{1}{20} = 0.05 = 5\%$

כדאי גם להכיר את ההרחבות של השברים:

$\frac{2}{3} = 0.666 = 66\frac{2}{3}\%$

$\frac{3}{4} = 0.75 = 75\%$

$\frac{2}{5} = 0.4 = 40\%$	$\frac{3}{5} = 0.6 = 60\%$	$\frac{4}{5} = 0.8 = 80\%$
$\frac{3}{8} = 0.375 = 37.5\%$	$\frac{5}{8} = 0.625 = 62.5\%$	$\frac{7}{8} = 0.875 = 87.5\%$
$\frac{2}{10} = 0.2 = 20\%$	$\frac{3}{10} = 0.3 = 30\%$	... וכך הלאה
$\frac{3}{20} = 0.15 = 15\%$	$\frac{9}{20} = 0.45 = 45\%$	... וכך הלאה

משוואת האחוז

את רוב בעיות האחוזים במבחן ניתן לפתור באמצעות משוואת האחוז. על-מנת לבנות את משוואת האחוז, עלינו להפוך את האחוז לשבר רגיל, ולהציבו במשוואה המתארת את התרגיל.

$$\text{חלק} = \text{שלם} \cdot \frac{\text{אחוז}}{100}$$

הדבר החשוב ביותר בשאלות אחוזים הוא למצוא מיהו השלם. נעשה זאת בעזרת הכלל הבא:

אחרי ה-מ', בא השלם

דוגמה:

כמה הם 60% מתוך 200?

פתרון:

ראשית, נבין מיהו השלם. השלם הוא 200 מכיוון שהוא מופיע אחרי ה-מ':

נציג את האחוז כשבר רגיל, ונבנה משוואה בהתאם לנתונים:

$$60\% \cdot 200 = \frac{60}{100} \cdot 200 = \frac{60}{100} \cdot \frac{200}{1} = \frac{60}{1} \cdot \frac{2}{1} = \frac{120}{1} = 120$$

דוגמה:

A% מתוך 20 שווים ל-15. לכמה שווה A?

פתרון:

ראשית, נבין מיהו השלם. השלם הוא 20 מכיוון שהוא מופיע אחרי ה-מ':

נכתוב את האחוז כשבר רגיל, ונבנה משוואה בהתאם לנתונים:

$$\frac{A}{100} \cdot 20 = 15 \quad \rightarrow \quad \frac{20A}{100} = 15 \quad \rightarrow \quad 2A = 150 \quad \rightarrow \quad A = 75$$

דוגמה:

70% ממספר מסוים הם 56. כמה הם 30% מאותו מספר?

פתרון -

נציב x במקום המספר, ונבנה משוואה:

$$\frac{70}{100} \cdot x = 56 \quad \rightarrow \quad 70x = 5600 \quad \rightarrow \quad x = 80$$

מצאנו שהמספר הוא 80. כעת נחשב כמה הם 30% מתוכו:

$$\frac{30}{100} \cdot 80 = 24$$

אחוזים - שיטת 10%

בחלק מבעיות האחוזים ניתן לבצע חישובים מהירים בעל-פה, בעזרת שיטת 10%.
הרעיון מאחורי השיטה הוא שתמיד ניתן למצוא כמה הם 10% מכל מספר ללא צורך בחישוב, פשוט על ידי חלוקה ב-10.
באופן זה, ניתן לחשב כל אחוז שהוא כפולה של 10 בעל-פה ובמהירות. למשל:

10% מ-70 הם 7
10% מ-350 הם 35

אם המספר אינו מתחלק ב-10, אפשר להזיז את הנקודה העשרונית ספרה אחת שמאלה:
10% מ-66 הם 6.6

<u>דוגמה:</u>
כמה הם 20% מ-70?

<u>פתרון:</u>
נשתמש בשיטת ה- 10%.
10% מ-70 הם 7.
20% הם 2 פעמים 10%, ולכן 20% מ-70 הם 2 פעמים 7 ← 14.

<u>דוגמה:</u>
כמה הם 35% מ-50?

<u>פתרון:</u>
נשתמש בשיטת ה- 10%.
10% מ-50 הם 5.
5% מ-50 הם 2.5 (חצי מ-5)
35% הם 3 פעמים 10%, ועוד פעם אחת 5% ← $3\cdot 5 + 2.5 = 17.5$

<u>דוגמה:</u>
70% <u>מ</u>מספר מסוים הם 56. כמה הם 30% מאותו מספר?

<u>פתרון:</u>
אם 70% מהמספר הם 56, אז 10% מהמספר הם 8 (מחלקים את 56 ב-7).
לכן, 30% הם 24 (3 פעמים 8).

אחוזים נפוצים שכדאי לדעת בעל-פה

+10% ← 100 ← 110 ← 121 ← 133.1
+10% ← 200 ← 220 ← 242
+20% ← 100 ← 120 ← 144
+20% ← 200 ← 240 ← 288

טבלת אחוזים / ערך משולש

חלק גדול משאלות האחוזים בבחינה מתבסס על יחסים זהים, וניתן להשתמש גם כאן בטכניקה של ערך משולש.

דוגמה:

70% **<u>מ</u>**מספר מסוים הם 56. כמה הם 30% מאותו מספר?

פתרון -

נזהה כי השלם שלנו הוא ה"מספר המסוים".
נציב את הנתונים בטבלת אחוזים:

<u>אחוזים</u>		**<u>מספר</u>**
70%	=	56
30%	=	$\boxed{?}$

נחשב באמצעות ערך משולש - נכפול באלכסון ונחלק במה שנשאר:

$$\frac{30 \cdot 56}{70} = \frac{3 \cdot 56}{7} = \frac{3 \cdot 8}{1} = 24$$

אחוז מאחוז - הצבת 100

בשאלות בהן השלם אינו נתון, כדאי להציב במקומו את המספר 100. בשאלות אלו בדרך כלל לא נתבקש למצוא מספר כלשהו (מחיר, כמות), אלא לחשב **אחוז מתוך אחוז** אחר (אחוז מאחוז).

דוגמה:

משכורתו של קובי נמוכה ב-40% ממשכורתה של יפעת, ומשכורתה של יפעת גבוהה ב-20% ממשכורתו של לאון. בכמה אחוזים נמוכה משכורתו של קובי **<u>מ</u>**משכורתו של לאון?

פתרון -

מכיוון שהשלם לא נתון לנו, נציב במקומו 100.
על מנת לדעת מיהו השלם, נעבוד לפי הכלל: **<u>אחרי ה-מ' בא השלם</u>**

נציב: משכורתו של לאון = 100

משכורתה של יפעת גבוהה ממשכורתו של לאון ב-20% ← 120

משכורתו של קובי נמוכה משל יפעת ב-40% ← 72

משכורתו של קובי נמוכה ממשכורתו של לאון ב-28% (72 — 100).

דוגמה:

בסקר שנערך בקרב בני 20-30 נמצא כי 60% אינם מעשנים סיגריות כלל, ואילו 30% משאר הנשאלים מעשנים סיגריות עם פילטר. מהו אחוז המשתתפים בסקר המעשנים סיגריות ללא פילטר?

פתרון -

מכיוון שהשלם לא נתון לנו, נציב במקומו 100.

נציב: מספר המשתתפים בסקר = 100

אינם מעשנים = 60

מעשנים עם פילטר: 30% מהשאר (השאר הם 40) - 10% הם 4, ולכן 30% הם 12.

מעשנים בלי פילטר: $28 = 12 - 40$ (מצאנו שיש 40 מעשנים, מתוכם 12 עם פילטר, ולכן 28 בלי פילטר).

כאשר מחשבים אחוז מאחוז, הסדר אינו משנה:

27% מ-50 שווים ל-50% מ-27

תרגול שאלות מבחינות אמת

1. כמה הם 60% מ- $\frac{5}{6}$?

(1) $\frac{11}{6}$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) $\frac{5}{2}$ (4) $\frac{1}{6}$

---

2. בכד 50 כדורים.
כל אחד מהכדורים צבוע **באחד** מהצבעים הבאים: כחול, אדום או ירוק.
60% מהכדורים צבועים בצבע כחול.
60% מהכדורים **שאינם** צבועים בצבע כחול, צבועים באדום.

כמה כדורים צבועים בצבע ירוק?

(1) 6
(2) 8
(3) 10
(4) 14

---

3. בתחילת השנה היה מחיר בקבוק יין 60 שקלים. בסוף כל חודש עלה מחירו ב-50%.
לאחר כמה העלאות מחירים היה בפעם הראשונה מחיר הבקבוק מספר **לא שלם** של שקלים?

(1) 5
(2) 2
(3) 3
(4) 6

---

4. 50% מ-25% של x הם 7.

לְמה שווים $\frac{3}{8}$ מ-x?

(1) 21
(2) 17.5
(3) 14
(4) 10.5

פתרתי ____________ שאלות ב ____________ דקות, ____________ תשובות נכונות

5. יוסי זרק כדור באוויר כמה פעמים, ובכל פעם ניסה לתפוס אותו לפני שהגיע לרצפה. הוא הצליח לתפוס את הכדור ב-35% מהפעמים שבהן זרק אותו, ו-13 פעמים **לא** הצליח לתפוס אותו.

כמה פעמים זרק יוסי את הכדור?

(1) 21 (2) 22 (3) 23 (4) 20

---

6. מספר הבנים בכיתה הוא 12, והם מהווים בין 30% ל-60% מכל ילדי הכיתה.

כמה **בנות**, לכל היותר, יש בכיתה?

(1) 18
(2) 24
(3) 28
(4) 32

---

7. אימא הבטיחה לרני שדמי הכיס שלו יועלו ב-40%, אם יסכים להפריש לאחותו הקטנה 30% מדמי הכיס שיהיו לו לאחר ההעלאה.

כמה אחוזים מתוך הסכום שרני מקבל כעת הוא הסכום שיהיה בידיו לאחר ביצוע ההסכם?

(1) 100
(2) 102
(3) 110
(4) 98

---

8. נתון: $a + b = 150$
$a = b + 30$

כמה אחוזים מ-$(a+b)$ שווים ל-b?

(1) 25%
(2) 30%
(3) 36%
(4) 40%

פתרתי ____________ שאלות ב ____________ דקות, ____________ תשובות נכונות

9. נתון: 20% מ-2x שווים ל-10.

כמה אחוזים מ-x שווים ל-10?

(1) 10%

(2) 20%

(3) 25%

(4) 40%

---

10. בושם מתייקר בכל שנה ב-20% בהשוואה לשנה הקודמת.
אחרי שתי התייקרויות היה מחירו של הבושם גבוה ב-22 דולרים ממחירו בתחילת השנה הראשונה להפצתו.

מה היה מחירו (בדולרים) של הבושם בתחילת השנה הראשונה להפצתו?

(1) 11 (2) 50 (3) 30 (4) 44

---

11. באחד מבתי הספר, מספר התלמידים שהם בעלי אופניים גדול פי 4 ממספר התלמידים שאינם בעלי אופניים.
בקרב התלמידים שיש להם אופניים, 30% הם בעלי אופני הרים.

בקרב **כל** התלמידים בבית הספר, מה אחוז התלמידים **שאינם** בעלי אופני הרים?

(1) 70%

(2) 74%

(3) 75%

(4) 76%

---

12. ל-60% מהילדים בגן יש אחים.
ל-7 מהילדים שיש להם אחים יש רק אחים קטנים, ולכל האחרים יש רק אחים גדולים.
מספר הילדים בגן שיש להם אחים גדולים שווה למספר הילדים בגן שאין להם אחים כלל.

כמה ילדים יש בגן סך הכול?

(1) 17

(2) 20

(3) 35

(4) 45

פתרתי ____________ שאלות ב ____________ דקות, ____________ תשובות נכונות

13. מחירה החדש של מכונת כביסה גבוה ב-25% ממחירה המקורי.

כמה אחוזים צריך להפחית מהמחיר החדש כדי שמחירה של מכונת הכביסה יהיה גבוה ב-12.5% ממחירה המקורי?

(1) 10%
(2) 8%
(3) 12.5%
(4) 50%

---

14. x אחוזים מהכסף שבארנקו של ברק הם 100 שקלים.
y אחוזים מהכסף שבארנקו הם 140 שקלים.

מה נכון בהכרח?

(1) $4x = y$
(2) $7x = 5y$
(3) $y < x$
(4) $x + y \le 100$

---

15. במסיבה נופחו מספר שווה של בלונים אדומים וירוקים.
לאחר שהתפוצצו מחצית הבלונים שנופחו, נותרו 9 בלונים אדומים ו-3 בלונים ירוקים.

מה אחוז הבלונים הירוקים שהתפוצצו, מתוך כל הבלונים **שהתפוצצו** (האדומים והירוקים) במסיבה?

(1) 50%
(2) 60%
(3) $33\frac{1}{3}\%$
(4) 75%

---

16. בחדר נמצאים m אנשים. מתוכם, k חובשים כובע. אחוז החובשים כובע מצחייה מקרב החובשים כובע שווה לאחוז החובשים כובע מקרב m האנשים.

כמה אנשים חובשים כובע מצחייה?

(1) $\frac{k^2}{m}$ (2) $\frac{k}{m^2}$ (3) $\frac{k+m}{m}$ (4) $m-k$

---

17. חולצה שמחירה בתחילת העונה היה 150 שקלים נמכרה בסוף העונה בהנחה של $a\%$.
לאחר ההנחה היה מחיר החולצה 110 שקלים.

בין אילו שני מספרים נמצא המספר a?

(1) $10 < a < 20$
(2) $20 < a < 25$
(3) $25 < a < 35$
(4) $35 < a < 45$

---

18. לאבנר היו כמה עפרונות. הוא נתן $x\%$ מהם לגלעד, ומתוך העפרונות שנשארו לו הוא נתן $x\%$ לדניאל ($0 < x < 100$).

מה היחס בין מספר העפרונות שקיבל גלעד לבין מספר העפרונות שקיבל דניאל?

(1) $2 : 1$ (2) $x : \sqrt{x}$ (3) $x : \frac{100}{x}$ (4) $100 : (100 - x)$

---

19. מנחם קנה חולצה בהנחה. איזה מהנתונים הבאים אינו מספיק כדי שאדם אחר יֵדע מה היה מחיר החולצה (בשקלים) **לפני ההנחה**?

(1) היחס בין המחיר שמנחם שילם (בשקלים) למחיר החולצה לפני ההנחה (בשקלים)
(2) היחס בין אחוז ההנחה לסכום ההנחה (בשקלים)
(3) סכום ההנחה (בשקלים) והמחיר שמנחם שילם (בשקלים)
(4) אחוז ההנחה והמחיר שמנחם שילם (בשקלים)

---

20. אלה קנתה שמלה בהנחה של 20 שקלים. מחירה של השמלה **אחרי** ההנחה היה x שקלים.

מה היה אחוז ההנחה על השמלה?

(1) $\frac{20 \cdot 100}{x + 20}$

(2) $\frac{20x}{100}$

(3) $\frac{x + 20}{100}$

(4) $\frac{(x + 20) \cdot 100}{20}$

תשובות

שאלה	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
תשובה	2	2	3	1	4	3	4	4	4	2

שאלה	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
תשובה	4	3	1	2	4	1	3	4	1	1

פתרתי 20 שאלות - ______________ נכונות, ______________ אחוזי הצלחה

1. תשובה (2) נכונה. שאלה 2 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – חישוב

נחשב כמה הם 60% מ- $\frac{5}{6}$. נשתמש במשוואת האחוז:

$$\frac{60}{100}\cdot\frac{5}{6}=\frac{6}{10}\cdot\frac{5}{6}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$$

דרך ב' – הערכת סדר גודל

אנו נדרשים לחשב כמה הם 60% מתוך $\frac{5}{6}$. כלומר אנחנו מחפשים שבר שמהווה קצת יותר מחצי של $\frac{5}{6}$, כלומר קצת יותר מ- $\frac{2.5}{6}$ אך קטן מ- $\frac{5}{6}$ בעצמו.

קל מאוד לפסול את תשובות (1) ו-(3) אשר בשתיהן השבר גדול מ-1, ובפרט גדול מ- $\frac{5}{6}$.

נוסף על כך, תשובה (4) קטנה מדי והיא מהווה הרבה פחות מחצי של $\frac{5}{6}$ (היא מהווה חמישית מ- $\frac{5}{6}$).

.2 תשובה (2) נכונה. שאלה 2 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – חישוב מלא

בכד 50 כדורים שכל אחד מהם צבוע בכחול, אדום או ירוק. עלינו לקבוע כמה כדורים צבועים בירוק. לשם כך, נבין כמה כדורים צבועים בכחול וכמה כדורים צבועים באדום.

ידוע ש-60% מהכדורים צבועים בכחול.

טיפ: בשאלות אחוזים ניתן להחליף בין הערך המספרי של האחוז לערך המספרי של השלם המבוקש, כלומר – 60% מ-50 שווה ל-50% מ-60.

כמובן שקל יותר לחשב 50% (חצי) מ-60 ⇐ 30. לפיכך ישנם 30 כדורים כחולים.

אחרת, ניתן גם לחשב באמצעות שיטת ה-10% ⇐ 10% מ-50 הם 5. לכן, 60% מ-50, שהם 6 פעמים 10%, הם 30 כדורים כחולים (5 · 6).

בנוסף, ניתן לחשב זאת גם באמצעות משוואת האחוז:

$$\frac{60}{100}\cdot 50=\frac{60}{2}=30$$

ידוע ש-60% מהכדורים שאינם צבועים בכחול (20 כדורים), צבועים באדום.

60% מ-20 הם 6 פעמים 10% של 20 ⇐ 12 כדורים כחולים (2 · 6). ניתן לחשב גם כך:

$$\frac{60}{100}\cdot 20=\frac{60}{5}=12$$

כעת נחשב כמה כדורים נותרו. אלה הם הכדורים הצבועים בירוק:

$$50-30-12=8$$

דרך ב' – חישוב מקוצר

כאמור, בכד 50 כדורים בצבעים כחול, אדום וירוק. כדי לקבוע כמה כדורים ירוקים יש בכד, נבין מה חלקם באחוזים מכלל הכדורים בכד.

60% מהכדורים בכד צבועים בכחול. לפיכך, 40% מהכדורים בכד <u>אינם</u> צבועים בכחול.

60% מהכדורים <u>שאינם</u> צבועים בכחול (כדורים ירוקים ואדומים), צבועים באדום. לפיכך, 40% מהכדורים <u>שאינם</u> צבועים בכחול, צבועים בירוק.

כלומר, הכדורים הירוקים מהווים 40% מתוך 40% של כלל הכדורים בכד (50). נבטא זאת באופן אלגברי:

$$\frac{40}{100}\cdot\frac{40}{100}\cdot 50=\frac{4\cdot 4\cdot 5}{10}=\frac{4\cdot 4}{2}=8$$

.3 תשובה (3) נכונה. שאלה 5 מתוך 20 בפרק.

ניסוי וטעייה

נתון לנו כי מחירו ההתחלתי של בקבוק יין הוא 60 שקלים. נבדוק מה מחירו לאחר כל העלאת מחיר:

לאחר העלאה 1 ⇐ 50% מ-60 הם 30 ולכן המחיר היה <u>90 שקלים</u> (60+30).

לאחר העלאה 2 ⇐ 50% מ-90 הם 45 ולכן המחיר היה <u>135 שקלים</u> (90+45).

לאחר העלאה 3 ⇐ 50% מ-135 הם לא מספר שלם (135 אינו מתחלק ב-2), ולכן אין צורך לחשב במדויק וניתן לדעת שהמחיר לאחר העלאה זו היה מספר לא שלם. אם נחשב במדויק, 50% מ-135 הם 67.5 ולכן המחיר היה 202.5 שקלים (135+67.5).

4. תשובה (1) נכונה. שאלה 6 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – חישוב מקוצר

נתון ש-50% מ-25% של x הם 7. נהפוך את האחוזים הנתונים לשברים: $\frac{1}{2}$ מ- $\frac{1}{4}$ של x שווה 7.

משמע, $\frac{1}{8}$ של x זה 7 $\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\right)$. אם $\frac{1}{8}$ של x הם 7, הרי ש- $\frac{3}{8}$ של x הם 21 $(7\cdot 3)$.

דרך ב' – חישוב מלא

כאמור, $\frac{1}{8}$ של x הם 7. נתאר קשר זה באופן אלגברי במטרה לבודד את x:

$$\frac{1}{8}x = 7$$

נכפול את שני האגפים ב-8:

$$x = 56$$

כעת נחשב כמה הם $\frac{3}{8}$ של 56:

$$\frac{3}{8}\cdot 56 = 3\cdot 7 = 21$$

---

5. תשובה (4) נכונה. שאלה 7 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – ריבוע יחסים

יוסי תפס את הכדור 35% מהפעמים שבהן זרק אותו. כלומר, הוא לא הצליח 65% מהפעמים (35 – 100). ידוע לנו שחלק זה באחוזים שווה ל-13 פעמים. כאשר יש לנו התאמה בין אחוז לכמות, נוכל למצוא את השלם בעזרת ריבוע יחסים. עלינו לקבוע כמה פעמים יוסי זרק את הכדור, כלומר למצוא את גודל השלם.

אחוזים	פעמים
65	13
100	?

:5

ניתן לזהות יחס אופקי של חלוקה ב-5 בין 65 ל-13, ולכן נחלק גם את 100 ב-5 $\Leftarrow$ 20.

ניתן גם להשתמש בערך משולש:

$$\frac{13\cdot 100}{65} = \frac{100}{5} = 20$$

דרך ב' – הצבת תשובות

נציב את התשובות ונחפש תשובה ש-65% ממנה שווים ל-13.

טיפ: בהצבת תשובות, כדאי להתחיל בתשובות הנוחות יותר.

תשובה נכונה $\Rightarrow$ $\frac{65}{100}\cdot 20 = \frac{65}{5} = 13$ (4)

טיפ: מכיוון שהצבנו את התשובות, ברגע שמצאנו תשובה נכונה אין צורך להמשיך לבדוק את שאר התשובות, אך למען שלמות ההסבר נפסול אותן:

התוצאה אינה שלמה, התשובה נפסלת $\Rightarrow$ $\frac{65}{100}\cdot 21$ (2)

התוצאה אינה שלמה, התשובה נפסלת $\Rightarrow$ $\frac{65}{100}\cdot 22$ (3)

התוצאה אינה שלמה, התשובה נפסלת $\Rightarrow$ $\frac{65}{100}\cdot 23$ (4)

6. תשובה (3) נכונה. שאלה 7 מתוך 20 בפרק.

נתון שישנם 12 בנים בכיתה, והם מהווים בין 30% ל-60% מכל הילדים בכיתה. עלינו למצוא כמה בנות יש בכיתה <u>לכל היותר</u>. כעת, נבין שעל מנת שתהיינה <u>כמה שיותר</u> בנות, צריכים להיות <u>כמה שפחות</u> בנים. לכן, נבדוק כמה בנות יש כאשר 12 הבנים מהווים רק 30% מהכיתה. יש לנו התאמה בין אחוז למספר, ועל כן אנו יכולים לחשב כל חלק מהשלם. נבין כי אם הבנים הם 30%, הבנות תהיינה 70% הנותרים. נשתמש בטבלת יחסים:

אחוזים	מספר
30%	12
70%	?

<u>דרך א' – ערך משולש מלא</u>
נכפול את האיברים הנמצאים באלכסון ונחלק באיבר הנותר:

$$\frac{12 \cdot 70}{30} = \frac{12 \cdot 7}{3} = 4 \cdot 7 = 28$$

<u>דרך ב' - ערך משולש מקוצר</u>
ניתן גם לחשב באמצעות קשר אופקי, אם נתעלם מה-0 בעמודה הראשונה:

אחוזים	מספר
30%	12
70%	?

כאשר אנו מתעלמים מה-0, ניתן לזהות קשר אופקי של פי 4 מ-3 ל-12, ועל כן נתעלם מה-0 גם בשורה השנייה ונכפול את 7 פי 4 $\Leftarrow$ 28.

מצאנו שיש לכל היותר 28 בנות. תשובה (3) נכונה.

---

7. תשובה (4) נכונה. שאלה 8 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הצבת מספרים
דמי הכיס של דני הוגדלו והוקטנו במסגרת ההסכם עם אמו. עלינו לקבוע כמה אחוזים מהווה הסכום שיש בידיו כעת מתוך הסכום שהיה בידיו טרם ההסכם. נציב בתור סכום זה 100, שכן כאשר מדובר באחוזים, זהו בדרך כלל מספר נוח להצבה.

דמי הכיס של דני הוגדלו ב-40%. כלומר, כעת הם שווים 140 (40 + 100). לאחר מכן, דני נתן לאחותו 30% מהסכום החדש. 30% מ-140 הם 3 פעמים 10%, שהם 42 (3 · 14). ניתן לחשב זאת גם כך:

$$\frac{30}{100} \cdot 140 = 3 \cdot 14 = 42$$

לאחר שדני נתן לה 42 ₪, נותרו לו 98 ₪ (42 – 140).
98 ₪ מהווים 98% מ-100 ₪.

דרך ב' – פתרון מתמטי
נציב בתור דמי הכיס ההתחלתיים של דני – x. דמי הכיס שלו הועלו ב-40%. משמע, כעת ערכם הוא 140% מדמי הכיס ההתחלתיים – $\frac{140}{100}x$.

דני נתן לאחותו 30% מדמי הכיס החדשים, ועל כן נותרו לו 70% מסכום זה. נחשב:

$$\frac{70}{100} \cdot \frac{140}{100} \cdot x = \frac{7 \cdot 14}{100} \cdot x = \frac{98}{100} \cdot x$$

הביטוי $\frac{98}{100}$ מתאר 98%. כלומר, דמי הכיס של דני לאחר ההסכם עם אמו מהווים 98% מדמי הכיס שקיבל בטרם ההסכם.

---

8. תשובה (4) נכונה. שאלה 8 מתוך 20 בפרק.

נשאלנו כמה אחוזים מ-(a + b) שווים ל-b. נתון: $a + b = 150$. כלומר, עלינו למצוא כמה אחוזים מ-150 שווים ל-b. לשם כך, נצטרך למצוא את ערכו של המשתנה b.

נתבונן במשוואות הנתונות:

$a + b = 150$
$a = b + 30$

נציב את ערכו של a מהמשוואה השנייה במשוואה הראשונה:

$b + 30 + b = 150$
$2b + 30 = 150$
$2b = 120$
$b = 60$

שיטת ה-10%
10% מ-150 הם 15 ולפיכך 40% הם 60 $(15 \cdot 4)$.

ריבוע יחסים
כעת, עלינו לקבוע כמה אחוזים מתוך 150 שווים ל-60. כלומר, השלם הוא 150 והחלק מתוכו הוא 60. נתאר זאת בריבוע יחסים:

אחוזים	כמות
?	60
100%	150

נשתמש בערך משולש – נכפול את הערכים הנמצאים באלכסון זה לזה ונחלק באיבר הנותר.

$$\frac{60 \cdot 100}{150} = \frac{60 \cdot 2}{3} = 40$$

---

9. תשובה (4) נכונה. שאלה 10 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הבנה
ידוע לנו ש-20% מ-2x שווים ל-10.
עלינו לקבוע כמה אחוזים מ-x שווים ל-10.
השלם קטן פי 2 מ-2x ל-x, ולכן החלק המספרי צריך לגדול פי 2 כדי לפצות על כך. למשל, 10% מ-100 הם 10. אם נרצה לקחת חלק מ-50 (שלם הקטן פי 2 מ-100), אשר שווה גם הוא ל-10, נצטרך לקחת 20% (פי 2 אחוזים מ-10%). על כן, 40% מ-x שווים ל-10.

דרך ב' – פתרון מתמטי
בעזרת המידע שניתן לנו, אפשר למצוא את x. נתון ש-20% מ-2x שווים ל-10:

$$\frac{20}{100} \cdot 2x = 10$$

$$\frac{1}{5} \cdot 2x = 10$$

נכפול את שני האגפים ב-5 ונחלק ב-2:

$$x = \frac{10 \cdot 5}{2} = 25$$

כעת נחשב איזה חלק מ-25 מהווה 10: נרחיב את השבר כדי שיהיה 100 במכנה.

$$\frac{10}{25} = \frac{40}{100}$$

כלומר, 10 מהווה 40% מתוך 25 $\Leftarrow$ 40% מ-x שווים ל-10.

10. תשובה (2) נכונה. שאלה 12 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הצבת תשובות

בושם מתייקר בכל שנה ב-20% ממחירו האחרון. לאחר שתי התייקרויות, מחירו היה גבוה ב-22 דולר בהשוואה למחירו לפני שתיהן. עלינו לקבוע מה היה מחירו לפני ההתייקרויות. נציב את התשובות ונחפש תשובה המתאימה לנתונים.

טיפ: בהצבת תשובות, כדאי להתחיל בתשובות הנוחות יותר.

<u>נבדוק את תשובה (2) :</u> המחיר המקורי של הבושם היה 50.

10% של 50 הם 5 ועל כן התייקרות של 20% שווה ל-10. לאחר ההתייקרות הראשונה המחיר היה 60.

10% של 60 הם 6 ועל כן התייקרות של 20% שווה ל-12. לאחר ההתייקרות השנייה המחיר היה 72.

ההפרש בין המחיר הנוכחי למחיר המקורי הוא 22 (50 – 72). מתאים, **תשובה נכונה.**

טיפ: מכיוון שהצבנו את התשובות, ברגע שמצאנו תשובה נכונה אין צורך להמשיך לבדוק את שאר התשובות, אך למען שלמות ההסבר נפסול אותן :

<u>נבדוק את תשובה (3) :</u> המחיר המקורי של הבושם היה 30.

10% של 30 הם 3 ועל כן התייקרות של 20% שווה ל-6. לאחר ההתייקרות הראשונה המחיר היה 36.

10% של 36 הם 3.6 ועל כן התייקרות של 20% שווה ל-7.2. אין צורך להמשיך את החישוב מפני שהתוצאה אינה שלמה. לא מתאים, התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (4) :</u> המחיר המקורי של הבושם היה 44.

10% של 44 הם 4.4 ועל כן התייקרות של 20% שווה ל-8.8. לאחר ההתייקרות הראשונה המחיר היה 52.8. אין צורך להמשיך את החישוב מפני שהתוצאה אינה שלמה. לא מתאים, התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (1) :</u> המחיר המקורי של הבושם היה 11.

10% של 11 הם 1.1 ועל כן התייקרות של 20% שווה ל-2.2. לאחר ההתייקרות הראשונה המחיר היה 13.2. אין צורך להמשיך את החישוב מפני שהתוצאה אינה שלמה. לא מתאים, התשובה נפסלת.

דרך ב' – יחסים

נציב שהמחיר של הבושם לפני ההתייקרויות היה 100% (שלם כלשהו).

לאחר התייקרות אחת, המחיר גדל ב-20% ⇐ 120%.

בהתייקרות הבאה מחיר הבושם גדל שוב ב-20% אבל מתוך השלם החדש (מתוך 120%). 10% מ-120% הם 12%, ולכן התייקרות של 20% היא תוספת של 24% ⇐ 144% (24% + 120%).

כלומר מחיר הבושם התייקר מ-100% ל-144%, התייקרות של 44%.

נתון שהתייקרות זו שווה ל-22 דולר.

עתה, יש לנו התאמה בין אחוז לכמות וממנה נוכל למצוא את השלם בעזרת ריבוע יחסים. עלינו לקבוע מה היה מחיר הבושם ההתחלתי. כלומר, מה גודל השלם (100%).

<u>אחוזים</u>	<u>דולר</u>
44	22
100	?

:2

ניתן לזהות יחס אופקי של חלוקה ב-2 בין 44 ל-22, ולכן נחלק גם את 100 ב-2 ⇐ 50.

דרך ג' – פתרון מתמטי

נציב x בתור מחירו המקורי של הבושם. לאחר ההתייקרות הראשונה, מחירו היה 120% מהמחיר האחרון (100% + התייקרות של 20%) $\Leftarrow \frac{120}{100}x$.

לאחר ההתייקרות השנייה מחירו של הבושם היה 120% מ- $\frac{120}{100}x \Leftarrow \frac{120}{100}\cdot\frac{120}{100}x$.

מחירו החדש של הבושם גבוה ב-22 דולר ממחירו המקורי. משמע, ההפרש בין המחיר החדש למחיר המקורי הוא 22. נבטא זאת באופן אלגברי ונבודד את x :

$$\frac{120}{100}\cdot\frac{120x}{100}-x=22$$

נצמצם את השברים :

$$\frac{12\cdot 12x}{100}-x=22$$

ניצור מכנה משותף 100 :

$$144x-100x=2200$$

$$44x=2200$$

נחלק את שני האגפים ב-44 :

$$x=50$$

.11 תשובה (4) נכונה. שאלה 13 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הצבת מספרים

בשאלה זו אין נתון מספרי, ולכן אנו יכולים להציב מספר שבעזרתו נפתור את השאלה בקלות. כאשר השאלה עוסקת באחוזים, מומלץ להציב 100 בתור השלם אשר ממנו נלקח האחוז. במקרה זה, אנו נשאלים מה אחוז התלמידים שאינם בעלי אופני הרים <u>מתוך כל תלמידי בית הספר</u>. כלומר, השלם הוא כל התלמידים בבית הספר.

נציב שבבית הספר ישנם 100 תלמידים. נתון שמספר התלמידים שהם בעלי אופניים גדול פי 4 ממספר התלמידים שאינם בעלי אופניים. נציב שישנם x תלמידים שאינם בעלי אופניים, ומכאן שיש 4x תלמידים שהם בעלי אופניים. כלומר, ישנם בסך הכול 5x תלמידים בבית הספר (x + 4x). הצבנו שיש 100 תלמידים בבית הספר ולכן :

$$5x = 100$$

$$x = 20$$

כלומר, ל-20 תלמידים אין אופניים ול-80 תלמידים (20 · 4) יש אופניים.

מתוך בעלי האופניים (80 לפי ההצבה שלנו), 30% הם בעלי אופני הרים. נחשב כמה הם 30% מ-80 : 10% שווים ל-8. על כן, 30% שווים 24 (3 · 8). נשאלנו מה אחוז התלמידים <u>שאינם</u> בעלי אופני הרים. אם ל-24 תלמידים מתוך 100 יש אופני הרים, ל-76 אין. 76 מהווים 76% מתוך 100.

דרך ב' – פתרון מתמטי

נניח שבבית הספר יש x תלמידים. נתון שמספר התלמידים שהם בעלי אופניים גדול פי 4 ממספר התלמידים שאינם בעלי אופניים. כלומר, ישנן בסך הכול 5 קבוצות שיחד מהוות את כל תלמידי בית הספר. ל- $\frac{1}{5}$ מהתלמידים אין אופניים ול- $\frac{4}{5}$ יש. כלומר, ל- $\frac{4}{5}x$ יש אופניים.

ל-30% <u>מתוך התלמידים שיש להם אופניים</u>, יש אופני הרים. כלומר :

$$\frac{30}{100}\cdot\frac{4}{5}x=\frac{6}{100}\cdot\frac{4}{1}x=\frac{24}{100}x$$

מכאן של-24% מתוך כל תלמידי בית הספר יש אופני הרים. על כן, ל-76% מהם אין אופני הרים (24 – 100).

---

12. תשובה (3) נכונה. שאלה 13 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הצבת תשובות
נציב את התשובות ונחפש תשובה המקיימת את נתוני השאלה.

<u>נבדוק את תשובה (1)</u>: לפי תשובה זו, בגן יש 17 ילדים בסך הכול. נתון כי ל-60% מהילדים בגן יש אחים. עתה נשים לב כי 60% מתוך 17 הם מספר לא שלם, ולא יכול להיות מספר לא שלם של ילדים. התשובה נפסלת.

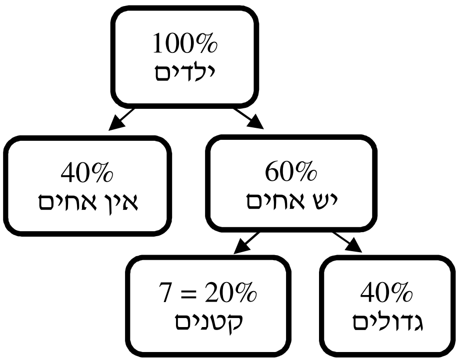
<u>נבדוק את תשובה (2)</u>: לפי תשובה זו, בגן יש 20 ילדים בסך הכול. נתון כי ל-60% מהילדים בגן יש אחים, נחשב בכמה ילדים מדובר: 10% מ-20 הם 2, ולכן 60% מ-20 הם 12 (6 · 2). כלומר, ישנם 12 ילדים שיש להם אחים, ול-8 הילדים הנותרים (20 – 12) אין אחים כלל. נתון כי מתוך 12 הילדים שיש להם אחים, ל-7 יש רק אחים קטנים, ולכל האחרים יש רק אחים גדולים. מכאן שישנם 5 ילדים שיש להם רק אחים גדולים (12 – 7). מספר הילדים שיש להם אחים גדולים (5) אינו שווה למספר הילדים שאין להם אחים כלל (8). תשובה זו אינה תואמת את הנתונים ולכן נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (3)</u>: לפי תשובה זו, בגן יש 35 ילדים בסך הכול. נתון כי ל-60% מהילדים בגן יש אחים, נחשב בכמה ילדים מדובר: 10% מ-35 הם 3.5, ולכן 60% מ-35 הם 21 (6 · 3.5).
כלומר, יש 21 ילדים שיש להם אחים, ול-14 הילדים הנותרים (35 – 21) אין אחים כלל. נתון כי מתוך 21 הילדים שיש להם אחים, ל-7 יש רק אחים קטנים, ולכל האחרים יש רק אחים גדולים. מכאן שישנם 14 ילדים שיש להם רק אחים גדולים (21 – 7). מספר הילדים שיש להם אחים גדולים (14) אכן שווה למספר הילדים שאין להם אחים כלל (14). התשובה תואמת את הנתונים, ועל כן זו **התשובה הנכונה**.

טיפ: מכיוון שהצבנו את התשובות, ברגע שמצאנו תשובה נכונה אין צורך להמשיך לבדוק את שאר התשובות, אך למען שלמות ההסבר נפסול את תשובה (4):

<u>נבדוק את תשובה (4)</u>: לפי תשובה זו, בגן יש 45 ילדים בסך הכול. נתון כי ל-60% מהילדים בגן יש אחים, נחשב בכמה ילדים מדובר: 10% מ-45 הם 4.5, ולכן 60% מ-45 הם 27 (6 · 4.5).
כלומר, ישנם 27 ילדים שיש להם אחים, ול-18 הנותרים (45 – 27) אין אחים כלל. נתון כי ל-7 מתוך 27 הילדים שיש להם אחים יש רק אחים קטנים, ולכל האחרים יש רק אחים גדולים. מכאן שישנם 20 ילדים שיש להם רק אחים גדולים (27 – 7).
מספר הילדים שיש להם אחים גדולים (20) אינו שווה למספר הילדים שאין להם אחים כלל (18). תשובה זו אינה תואמת את הנתונים, ולכן נפסלת.

דרך ב' – הבנה
נתון של-60% מהילדים בגן יש אחים, משמע ל- 40% הנותרים מהילדים אין אחים כלל.
כמו כן, נתון שמספר הילדים שיש להם אחים גדולים שווה למספר הילדים שאין להם אחים כלל; מכיוון של- 40% אין אחים כלל, ניתן לקבוע של- 40% יש אחים גדולים.
נותרו 20% אשר להם יש אחים קטנים. נתון כי ל-7 ילדים יש אחים קטנים. מצאנו התאמה בין אחוז למספר, ועל כן אנו יכולים לחשב כמה ילדים יש בגן בסך הכול (כמה ה-100%). נשתמש בטבלת יחסים:



אחוז		מספר
20%	=	7
100%	=	?

ניתן לראות כי קיים יחס אנכי של פי 5 מ-20% ל-100%, לכן גם את 7 לכפול פי 5 ⇐ 35. כלומר, ישנם 35 ילדים בגן בסך הכול.

דרך ג' – פתרון מתמטי

נגדיר את מספר הילדים בגן כ-x.

נתון של-60% מהילדים בגן יש אחים, משמע ל- 40% הנותרים מהילדים אין אחים כלל.

כלומר ל-$\left(\frac{60}{100}\cdot x\right)$ יש אחים, ול-$\left(\frac{40}{100}\cdot x\right)$ אין אחים כלל.

נתון כי מתוך $\left(\frac{60}{100}\cdot x\right)$ הילדים שיש להם אחים, ל-7 יש אחים קטנים וליתר יש אחים גדולים. על כן, נחסר 7 ממספר הילדים שיש להם אחים, ונישאר עם מספר הילדים שיש להם אחים גדולים, כלומר, ישנם $\left(\frac{60}{100}x-7\right)$ ילדים שיש להם אחים גדולים. נתון כי מספר הילדים שיש להם אחים גדולים שווה למספר הילדים שאין להם אחים כלל. נבנה משוואה המבטאת קשר זה:

$$\frac{60}{100}x-7=\frac{40}{100}x$$

ניצור מכנה משותף 100:

$$60x-700=40x$$

$$20x=700$$

$$x=\frac{700}{20}=\frac{70}{2}=35$$

13. תשובה (1) נכונה. שאלה 14 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הצבת מספרים

מכיוון שלא ידוע לנו מחירה המקורי של המכונה, נציב מספר נוח. בשאלות אחוזים בד"כ נוח להציב 100 עבור השלם. נציב כי מחירה המקורי של המכונה הוא 100 ₪.

מחירה החדש של המכונה גבוה ב-25% מהמחיר המקורי. על כן, מחירה החדש הוא 125 ₪ (25 + 100).

נשאלנו כמה אחוזים צריך להפחית <u>מהמחיר החדש</u> של המכונה כדי שמחירה יהיה גבוה ב-12.5% <u>מהמחיר המקורי</u>. המחיר המבוקש יהיה 112.5 ₪ (12.5 + 100). ההפרש בין המחיר החדש (125) למחיר המבוקש (112.5) הוא 12.5 ₪. אפשר לזהות ש-12.5 מהווים בדיוק 10% ממחיר המכונה החדש (125). ניתן לראות זאת גם באמצעות טבלת יחסים:

אחוזים	שקלים	
100	125	
?	12.5	:10

ניתן לזהות יחס אנכי של חלוקה ב-10 בין 125 ל-12.5, ולכן נחלק גם את 100 ב-10 $\Leftarrow$ 10.
כלומר, יש להפחית 10% מהמחיר החדש.

דרך ב' – פתרון מתמטי

נציב בתור מחירה המקורי של מכונת הכביסה x.

המחיר החדש של המכונה גבוה ב-25% מהמחיר המקורי. משמע, שווה ל-125% מהמחיר המקורי – $\frac{125}{100}x$.

המחיר המבוקש של המכונה צריך להיות גבוה ב-12.5% מהמחיר המקורי. משמע, שווה ל-112.5% מהמחיר המקורי – $\frac{112.5}{100}x$.

נשאלנו כמה אחוזים צריך להפחית מהמחיר החדש כדי להגיע למחיר המבוקש. תחילה נבין כמה שקלים יש להפחית:

$$\frac{125}{100}x-\frac{112.5}{100}x=\frac{12.5x}{100}$$

כעת נבין כמה אחוזים מהווה סכום זה מתוך המחיר החדש:

$$\frac{\frac{12.5x}{100}}{\frac{125x}{100}}=\frac{100\cdot 12.5x}{100\cdot 125x}=\frac{12.5}{125}=\frac{10}{100}$$

לפיכך, הסכום שמצאנו שווה ל-10% מהמחיר החדש. כלומר, יש להפחית 10% מהמחיר החדש כדי להגיע למחיר המבוקש.

14. תשובה (2) נכונה. שאלה 14 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הצבת מספרים

נתון ש-x אחוזים מהכסף שבארנקו של ברק הם 100 ₪ ו-y אחוזים הם 140 ₪. בשאלות אחוזים נוח להציב שהשלם הוא 100 שקלים משום שכך הערך המספרי של החלק באחוזים מהשלם שווה לערכו של החלק עצמו (למשל: 30% מ-100 הם 30). לכן נציב שלברק יש 100 ₪ בארנקו. ידוע כי x% מכספו הם 100 ₪. מכיוון שיש לו 100 ₪ בסה"כ אז $x = 100$, שכן 100% מ-100 הם 100. באותו אופן, y% מכספו, כלומר y% מ-100 הם 140. לפיכך $y = 140$. (140% מ-100 הם 140).

כעת, נציב גם בתשובות $x = 100$ ו- $y = 140$ ונחפש תשובה מתאימה. נשים לב שמכיוון שהשתמשנו בהצבת מספרים במקום הנעלמים, עלינו לפסול 3 תשובות בטרם נוכל לסמן תשובה נכונה.

(1) $4x = y \Rightarrow 4 \cdot 100 \overset{?}{=} 140 \Rightarrow 400 \overset{?}{=} 100$ $\Rightarrow$ לא מתאים, התשובה נפסלת

(2) $7x = 5y \Rightarrow 7 \cdot 100 \overset{?}{=} 5 \cdot 140 \Rightarrow 700 = 700$ $\Rightarrow$ **מתאים**

(3) $y < x \Rightarrow 140 < 100$ $\Rightarrow$ לא מתאים, התשובה נפסלת

(4) $x + y \le 100 \Rightarrow 100 + 140 \le 100 \Rightarrow 240 \le 100$ $\Rightarrow$ לא מתאים, התשובה נפסלת

פסלנו 3 תשובות ועל כן תשובה (2) נכונה.

דרך ב' – יחסים

נבין שמכיוון שהאחוז המחושב לקוח מאותו שלם (סכום הכסף בארנקו של ברק) אזי היחס בין הגדלים המספריים שווה ליחס בין הגדלים האחוזיים.

לצורך הדגמה, אם הייתי אוכל 50% מפיצה מסוימת (חצי מהפיצה – 4 משולשים) ואחי היה אוכל 25% מאותה הפיצה (רבע מהפיצה – 2 משולשים), אז ניתן לראות שהן האחוז שאכלתי כפול מהאחוז שאחי אכל, הן הערך המספרי שאכלתי (4 משולשים) כפול משל אחי (2 משולשים).

באותו אופן, בשאלה שלנו שני הערכים המספריים מהווים חלקים מאותו שלם, לכן היחס ביניהם שווה ליחס של החלקים האחוזיים אותם הם מהווים. כלומר:

$$\frac{100}{140} = \frac{x}{y}$$

$$\frac{5}{7} = \frac{x}{y}$$

נבטל את המכנים ע"י כפל בהצלבה:

$$5y = 7x$$

דרך ג' – פתרון מתמטי

נציב z בתור הכסף שבארנקו של ברק.

x אחוזים מהכסף שבארנקו הם 100 שקלים. נתאר נתון זה באופן אלגברי:

$$\frac{x}{100} \cdot z = 100$$

y אחוזים מהכסף שבארנקו הם 140 שקלים. נתאר נתון זה באופן אלגברי:

$$\frac{y}{100} \cdot z = 140$$

עלינו למצוא את הקשר בין x ל-y. z אינו רלוונטי ולכן נבודד אותו מכל אחת מהמשוואות ונשווה את ערכו:

$$z = \frac{100 \cdot 100}{x}$$

$$z = \frac{140 \cdot 100}{y}$$

$$\frac{100 \cdot 100}{x} = \frac{140 \cdot 100}{y}$$

נבטל את המכנים על ידי כפל בהצלבה:

$$100 \cdot 100 \cdot y = 140 \cdot 100 \cdot x$$

נחלק את שני האגפים ב-1,000:

$$10 \cdot y = 14 \cdot x$$
$$5 \cdot y = 7 \cdot x$$

שימו לב, ניתן "להיפטר" מ-z גם באמצעות חלוקת שתי המשוואות המקוריות זו בזו באופן הבא:

$$\frac{\left(\frac{x \cdot z}{100}\right)}{\left(\frac{y \cdot z}{100}\right)} = \frac{100}{140}$$

ניעזר בקשתות כדי לפשט את אגף שמאל וכן נצמצם את אגף ימין ב-20:

$$\frac{x \cdot z \cdot 100}{y \cdot z \cdot 100} = \frac{5}{7}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{5}{7}$$

נבטל את המכנים על ידי כפל בהצלבה:

$$7x = 5y$$

---

15. תשובה (4) נכונה. שאלה 14 מתוך 20 בפרק.

נתון כי התפוצצו מחצית מהבלונים. כעת נותרו 12 בלונים ומכאן שבהתחלה היו 24. כמו כן, נאמר שהיה מספר שווה של בלונים אדומים וירוקים. כלומר, בהתחלה היו 12 בלונים אדומים ו-12 ירוקים.

מתוך הבלונים הירוקים, נותרו 3. לכן, מספר הבלונים הירוקים שהתפוצצו הוא 9.
כידוע, בסך הכול התפוצצו 12 בלונים. כעת, ניתן לחשב את אחוז הבלונים הירוקים שהתפוצצו מתוך כל הבלונים שהתפוצצו:

$$\frac{9}{12} = \frac{3}{4} = 75\%$$

---

16. תשובה (1) נכונה. שאלה 15 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הצבת מספרים

בחדר נמצאים m אנשים. מתוכם k אנשים חובשים כובע. עלינו לקבוע כמה אנשים חובשים כובע מצחייה. מפני שנוח יותר לחשב בעזרת מספרים ולא נעלמים, נציב $m = 100$, $k = 50$. אחוז החובשים כובע מצחייה מתוך החובשים כובע שווה לאחוז החובשים כובע (50 אנשים) מתוך 100 האנשים, כלומר 50% ⇐ מחצית מהאנשים.

כאמור, אחוז החובשים כובע מצחייה מתוך החובשים כובע הוא 50%. 50% של 50 הם 25 (= חצי של 50).

כעת, נציב גם בתשובות $m = 100$, $k = 50$, ונחפש תשובה השווה ל-25. נשים לב שמכיוון שהשתמשנו בהצבת מספרים במקום הנעלמים, עלינו לפסול 3 תשובות בטרם נוכל לסמן תשובה נכונה.

(1) $\frac{k^2}{m} \Rightarrow \frac{50^2}{100} = \frac{50 \cdot 50}{100} = 25$ ⇐ **מתאים**

(2) $\frac{k}{m^2} \Rightarrow \frac{50}{100^2} = \frac{50}{100 \cdot 100} = \frac{1}{200}$ ⇐ לא מתאים, התשובה נפסלת

(3) $\frac{k+m}{m} \Rightarrow \frac{50+100}{100} = 1\frac{1}{2}$ ⇐ לא מתאים, התשובה נפסלת

(4) $m - k \Rightarrow 100 - 50 = 50$ ⇐ לא מתאים, התשובה נפסלת

פסלנו 3 תשובות ועל כן תשובה (1) נכונה.

דרך ב' – פתרון מתמטי

החלק שמהווים חובשי הכובע (k) מתוך כל האנשים (m) הוא $\frac{k}{m}$. לצורכי נוחות נסמן את חובשי כובע המצחייה באות c.

ידוע כי החלק אותו מהווים חובשי כובע המצחייה (c) מתוך חובשי הכובע (k), שווה לחלק אותו מהווים חובשי הכובע מתוך כלל האנשים $\left(\frac{k}{m}\right)$.

נכתוב קשר זה באופן אלגברי:

$$\frac{c}{k} = \frac{k}{m}$$

נכפול את המשוואה פי k כדי להיפטר מהמכנה של c:

$$c = \frac{k \cdot k}{m} = \frac{k^2}{m}$$

<u>הערה</u> – השאלה אומנם משתמשת במושג "אחוז" אך אין צורך להמיר את החלק שקיבלנו לאחוזים (להרחיב למכנה 100) משום שאחוז הוא חלק מתוך שלם, ולכן כאשר האחוז אותו מהוות שתי הקבוצות שווה, אזי החלק אותו הן מהוות שווה גם כן.

17. תשובה (3) נכונה. שאלה 16 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הערכה

מחיר החולצה היה 150 ₪ וכעת מחירה 110 ₪. כלומר, מדובר בהנחה של 40 שקלים. a הוא גודל ההנחה באחוזים. ניתן להבין מהתשובות כי איננו צריכים למצוא את ערכו המדויק של a, שהרי עלינו למצוא רק בין אילו שני מספרים הוא נמצא, ולכן נסתפק בהערכת סדר גודל. אנו צריכים למצוא בערך כמה אחוזים מהווים 40 (ההנחה בשקלים) מתוך 150 (המחיר המקורי). לשם כך, נשתמש בשיטת ה-10%.

10% הנחה מ-150 הם 15 ₪. לפיכך, 20% הם 30 ₪ ($2 \cdot 15$). ההנחה (40 ₪) גדולה מ-30 ₪, משמע, גדולה מ-20%. בשלב זה ניתן לפסול את תשובה (1).

30% הנחה הם 45 ₪ ($3 \cdot 15$). ההנחה קטנה מ-45 ₪, ועל כן היא קטנה מ-30%. ניתן לפסול גם את תשובה (4).

התשובות שנותרו הן (2) ו-(3). מה שמפריד ביניהן הוא המספר 25. לפיכך, נבדוק מה ערכם של 25% הנחה מ-150:
25% הם רבע. $\frac{1}{4}$ מ-150 שווה ל-37.5 ($\frac{150}{4} = \frac{75}{2}$).

ההנחה גדולה מ-37.5 ועל כן היא גדולה מ-25%. תשובה (2) נפסלת, ועל כן תשובה (3) נכונה.

דרך ב' – חישוב מדויק

עלינו למצוא כמה אחוזים מהווים 40 (ההנחה בשקלים) מתוך 150 (המחיר המקורי). נציב נתונים אלה בריבוע יחסים:

אחוזים	כמות
?	40
100%	150

נשתמש בערך משולש – נכפול את הערכים הנמצאים באלכסון זה לזה ונחלק באיבר הנותר.

$$\frac{40 \cdot 100}{150} = \frac{40 \cdot 2}{3} = \frac{80}{3}$$

$$\frac{80}{3} = \frac{60}{3} + \frac{20}{3} = 20 + \frac{20}{3} = 20 + \frac{18}{3} + \frac{2}{3} = 20 + 6 + \frac{2}{3} = 26\frac{2}{3}$$

מספר זה נמצא בתחום המוצג בתשובה (2) ועל כן זו התשובה הנכונה.

18. תשובה (4) נכונה. שאלה 18 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הצבת מספרים

מאחר שהשאלה עוסקת באחוזים, מספר נוח להצבה בתור מספר העפרונות של אבנר הוא 100. בשלב הראשון אבנר נתן x% מהם לגלעד. נציב $x = 10$, ומכאן שאבנר נתן לגלעד 10 עפרונות ונותרו לו 90 עפרונות. בשלב השני נתן אבנר לדניאל 10% מהעפרונות שנותרו לו. 10% מ-90 הם 9. כלומר, דניאל קיבל 9 עפרונות. לסיכום, לפי ההצבה שביצענו היחס בין מספר העפרונות שקיבל גלעד לבין מספר העפרונות שקיבל דניאל הוא 10 : 9.

כעת נציב $x = 10$ בתשובות ונפסול כל תשובה שלא שווה ליחס 10 : 9 :

(1) $2 : 1$ $\Rightarrow$ התשובה נפסלת.

(2) $x:\sqrt{x} = 10:\sqrt{10}$ $\Rightarrow$ התשובה נפסלת.

(3) $x:\dfrac{100}{x} = 10:\dfrac{100}{10} = 10:10$ $\Rightarrow$ התשובה נפסלת.

טיפ: לאחר שפסלנו 3 תשובות, ניתן לסמן את הרביעית ללא בדיקתה. נעשה זאת למען שלמות ההסבר:

(4) $100:(100-x) = 100:(100-10) = 100:90 = 10:9$ $\Rightarrow$ **תשובה נכונה.**

דרך ב' – פתרון מתמטי

נגדיר את מספר העפרונות ההתחלתי של אבנר כ-A. אבנר נתן לגלעד x% מהם, כלומר:

$$\frac{x}{100}\cdot A$$

נחשב כמה עפרונות נותרו לאבנר לאחר מכן:

$$A-\frac{x}{100}\cdot A$$

הוא נתן לדניאל x% מתוך העפרונות שנותרו לו:

$$\frac{x}{100}\cdot\left(A-\frac{x}{100}\cdot A\right)$$

כעת נחשב את היחס בין מספר העפרונות שקיבל גלעד לבין מספר העפרונות שקיבל דניאל. לנוחות החישוב נבטא את היחס באמצעות שבר:

$$\frac{\frac{x}{100}\cdot A}{\frac{x}{100}\cdot\left(A-\frac{x}{100}\cdot A\right)}$$

נצמצם את השבר ב- $\frac{x}{100}$:

$$\frac{\frac{x}{100}\cdot A}{\frac{x}{100}\cdot\left(A-\frac{x}{100}\cdot A\right)} = \frac{A}{A-\frac{x}{100}\cdot A}$$

נוציא גורם משותף A במכנה:

$$\frac{A}{A-\frac{x}{100}\cdot A} = \frac{A}{A\left(1-\frac{x}{100}\right)}$$

נצמצם את השבר ב-A:

$$\frac{A}{A\left(1-\frac{x}{100}\right)} = \frac{1}{1-\frac{x}{100}}$$

ניצור מכנה משותף 100 במכנה:

$$\frac{1}{1-\frac{x}{100}} = \frac{1}{\frac{100-x}{100}}$$

ניעזר בקשתות:

$$\left(\left(\frac{\frac{1}{1}}{\frac{100-x}{100}} = \frac{100}{100-x} \quad \Rightarrow \quad 100 : (100-x)\right.\right.$$

---

19. תשובה (1) נכונה. שאלה 19 מתוך 20 בפרק.

מנחם קנה חולצה בהנחה. עלינו לקבוע איזה מהנתונים אינו מספיק כדי לדעת מה היה מחיר החולצה לפני ההנחה.

<u>נבדוק את תשובה (1):</u> מהיחס בין המחיר שמנחם שילם לבין מחיר החולצה לפני ההנחה לא נוכל לדעת מה היה מחירה המלא. אם למשל היחס הנתון הוא 2 : 1, המחיר ששילם יכול להיות 1 ₪ והמחיר המלא 2 ₪, או שמנחם שילם 50 ₪ והמחיר המלא היה 100 ₪. **תשובה נכונה.**

טיפ: מכיוון שהצבנו את התשובות, ברגע שמצאנו תשובה נכונה אין צורך להמשיך לבדוק את שאר התשובות, אך למען שלמות ההסבר נפסול אותן:

<u>נבדוק את תשובה (2):</u> היחס בין אחוז ההנחה לסכום ההנחה מאפשר לנו לקבוע מה המחיר המלא של החולצה. אם למשל נתון שהיחס הוא 2 : 1, הרי ש-1% הנחה שווים ל-2 ₪ הנחה. במקרה זה, המחיר המלא של החולצה יהיה גדול פי 100 (100%) ⇐ 200 ₪. שימו לב, ליחס זה מתאימים מספרים נוספים, כמו למשל 10 ו-20 – 10% הנחה שווים ל-20 ₪, אולם גם במקרים הללו המחיר המלא יהיה זהה. התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (3):</u> סכום ההנחה והמחיר שמנחם שילם בוודאי יאפשרו לנו לקבוע את המחיר המלא של החולצה. אם למשל מנחם קיבל 50 ₪ הנחה ושילם 100 ₪, הרי שהמחיר המלא היה 150 ₪ (50 + 100). התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (4):</u> אחוז ההנחה והמחיר שמנחם שילם יאפשרו לנו לקבוע את המחיר המלא של החולצה. אם למשל מנחם קיבל 50% הנחה ושילם 10 ₪, הרי שהמחיר המלא הוא 20 ₪ (גדול פי 2 מהמחיר ששילם). התשובה נפסלת.

.20 תשובה (1) נכונה. שאלה 20 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הצבת מספרים

אנו תמיד שואפים להציב מספר נוח, וכשמדובר באחוזים, בדרך כלל נציב 100. במקרה זה, נציב דווקא $x = 80$; השאיפה שלנו היא להציב 100 בשלם, ובמקרה הזה השלם הוא מחיר השמלה **לפני ההנחה** – אם המחיר המקורי של השמלה היה 100 שקלים, אז x, שהוא המחיר **לאחר הנחה** של 20 שקלים, שווה ל-80 שקלים.

נשאלנו מה היה אחוז ההנחה על השמלה. אם המחיר המקורי הוא 100 שקלים וההנחה היא של 20 שקלים, מדובר ב-20% הנחה.

כעת נציב $x = 80$ בתשובות ונחפש תשובה שתהיה שווה ל-20. נשים לב שמכיוון שהשתמשנו בהצבת מספר במקום הנעלם, עלינו לפסול 3 תשובות בטרם נוכל לסמן תשובה נכונה.

מתאים $\Rightarrow$ (1) $\frac{20 \cdot 100}{80 + 20} = \frac{20 \cdot 100}{100} = 20$

לא מתאים. התשובה נפסלת $\Rightarrow$ (2) $\frac{20 \cdot 80}{100} = 2 \cdot 8 = 16$

לא מתאים. התשובה נפסלת $\Rightarrow$ (3) $\frac{80 + 20}{100} = \frac{100}{100} = 1$

לא מתאים. התשובה נפסלת $\Rightarrow$ (4) $\frac{(80 + 20) \cdot 100}{20} = 100 \cdot 5 = 500$

פסלנו 3 תשובות ועל כן תשובה (1) נכונה.

דרך ב' – חישוב אלגברי

נתון שמחיר השמלה לאחר ההנחה הוא x, וכן כי ההנחה הייתה 20 שקלים. כלומר, המחיר המקורי של השמלה הוא $x + 20$.

ההנחה שניתנה היא 20 שקלים מתוך המחיר המלא, כלומר:

$$\frac{20}{x + 20}$$

על מנת להמיר את השבר לאחוזים עלינו לכפול ב-100 (למשל, אם ההנחה הייתה $\frac{1}{2}$ מהמחיר, נכפול ב-100 ונקבל 50%):

$$\frac{20 \cdot 100}{x + 20}$$

חפיפה

בבעיות חפיפה אנו עוסקים בשתי קבוצות אשר יש ביניהן תחום משותף כלשהו (חפיפה).

ישנם שני סוגי שאלות חפיפה:

1. **חפיפה מדויקת**
2. **שאלות טווחים**

טווחים / מינימום-מקסימום

בשאלות טווחים אנו מתבקשים למצוא את התחום של חפיפה בין שתי קבוצות.
את התחום נמצא בעזרת הכללים הבאים:

<u>חפיפה מקסימלית</u> - גודל הקבוצה הקטנה.

<u>חפיפה מינימלית</u> - בכמה ששתי הקבוצות עוברות את הסה"כ.

שימו לב! אם שתי הקבוצות לא עוברות את הסה"כ, לא חייבת להיות חפיפה (החפיפה המינימלית היא אפס).

לכל היותר ← המקסימום, המספר המרבי שיכול להיות.

לכל הפחות ← המינימום, המספר הקטן ביותר שחייב להיות.

דוגמה:
בגן יש 20 ילדים. 15 מהילדים בגן חובשים כובע, ו-12 מהילדים בגן מרכיבים משקפיים. מה **יכול להיות** מספר הילדים בגן שחובשים כובע ומרכיבים משקפיים?

פתרון -
קבוצת החפיפה המקסימלית היא גודל הקבוצה הקטנה, מכיוון שיכול להיות שכל הילדים אשר מרכיבים משקפיים גם חובשים כובע. חפיפה מקסימלית = 12.

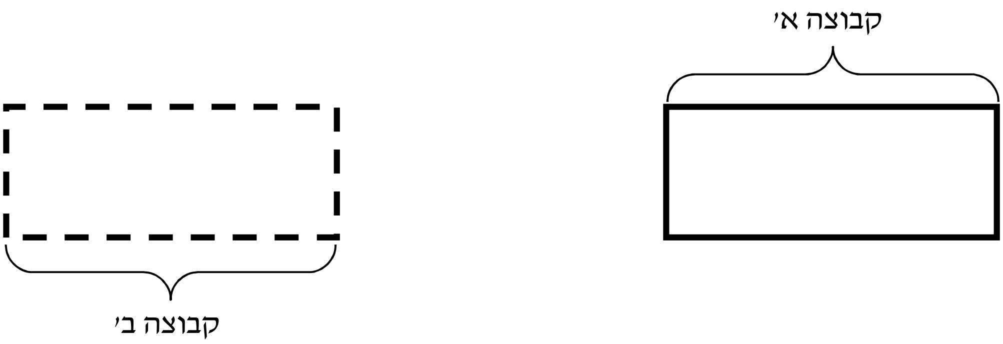
קבוצת החפיפה המינימלית היא בכמה ששתי הקבוצות עוברות את הסה"כ.
סכום שתי הקבוצות הוא 27 (15+12), וזה 7 יותר מסך כל הילדים בגן (20 ילדים), ולכן חייבת להיות חפיפה של לפחות 7 ילדים.
אפשר להבין את זה באופן הבא:
נניח שחילקנו ל-15 מהילדים כובע. כעת, אנו מחלקים לשאר הילדים משקפיים (ל-5 שנשארו).
המצב כרגע הוא שיש לנו 15 ילדים עם כובע + 5 ילדים עם משקפיים.
אבל יש לנו 12 משקפיים שצריכים לחלק לילדים, זאת אומרת שנשארו לנו עוד 7, ואנחנו חייבים לחלק אותם לילדים שכבר יש להם כובע (אי אפשר לתת לילד 2 זוגות משקפיים).

חפיפה מדויקת

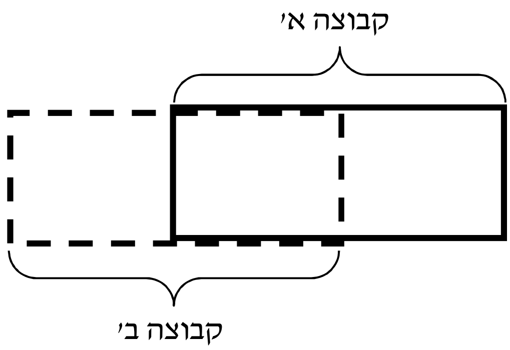
בשאלות אלו ניתן למצוא את הגודל המדויק של קבוצת החפיפה.
על מנת לפתור שאלות מסוג זה, נעזר בשיטת הריבועים.

שיטת הריבועים

נתאר את שתי הקבוצות כשני מלבנים - המלבן הימני (הקו הרציף), והמלבן השמאלי (המקווקו):



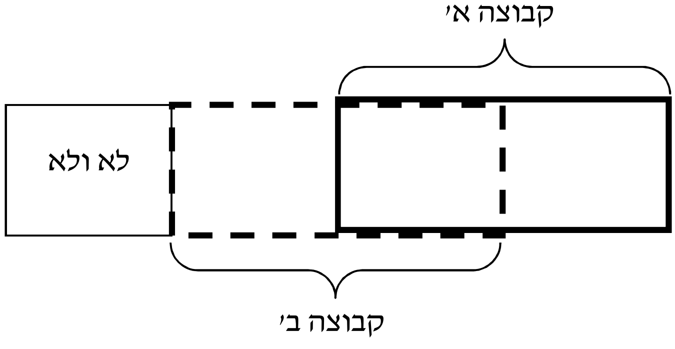
כעת נקרב את הקבוצות זו אל זו, עד שתהיה ביניהן חפיפה (המלבנים יעלו אחד על השני):



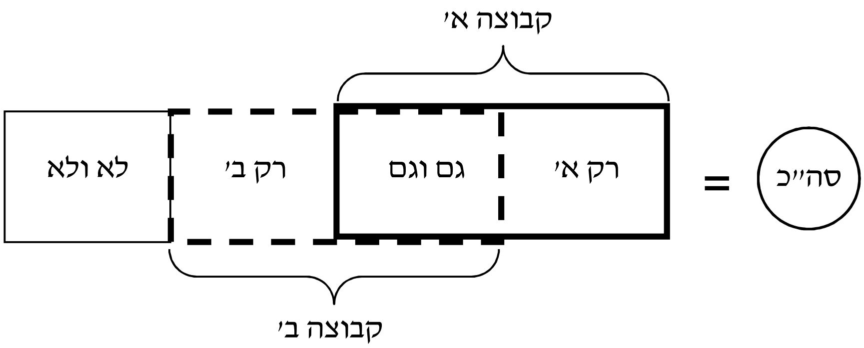
ניתן לראות שנוצרו לנו 3 קבוצות:

1. הריבוע הימני - **רק א'** (שייך לקבוצה א', ולא שייך לקבוצה ב')
2. הריבוע האמצעי - **גם וגם** (שייך גם לקבוצה א', וגם לקבוצה ב')
3. הריבוע השמאלי - **רק ב'** (שייך לקבוצה ב', ולא שייך לקבוצה א')

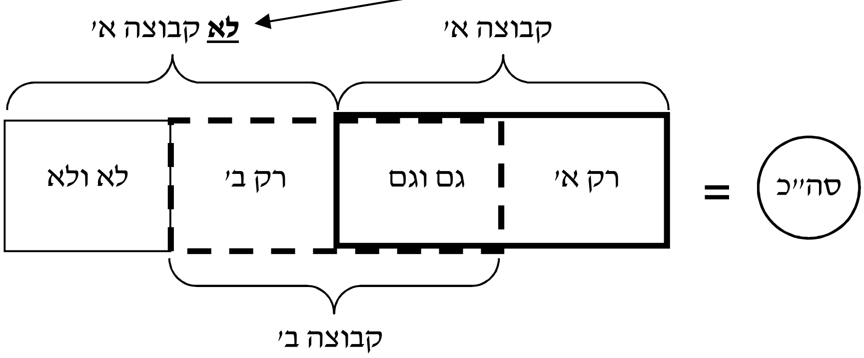
כעת נוסיף עוד ריבוע מצד שמאל, שייצג את הקבוצה "**לא ולא**" - לא שייך לקבוצה א', ולא לקבוצה ב':



בעצם, קיבלנו את הסה"כ, המורכב מכל 4 הקבוצות:



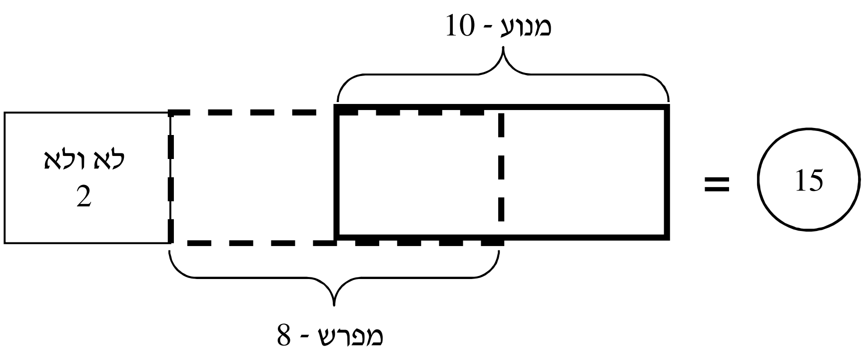
נתון נוסף שאנחנו יכולים להסיק מהתרשים, הוא שאם שני הריבועים מימין שייכים לקבוצה א', הרי ששני הריבועים משמאל לא שייכים לקבוצה א':



כעת נפתור שאלות חפיפה באמצעות תרשים הריבועים.

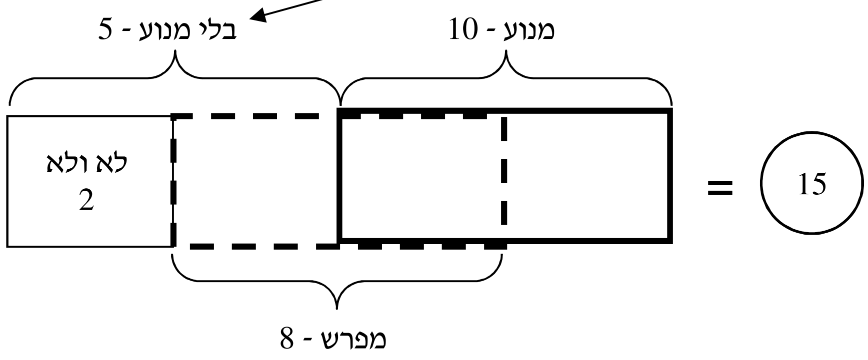
דוגמה:
במרינה 15 סירות. ל-10 מהסירות יש מנוע, ל-8 מהסירות יש מפרש, ושתים מהסירות הן ללא מנוע וללא מפרש. כמה סירות עם מפרש ומנוע יש במרינה?

פתרון -
נסרטט את הריבועים ונציב בתוכם את נתוני השאלה:

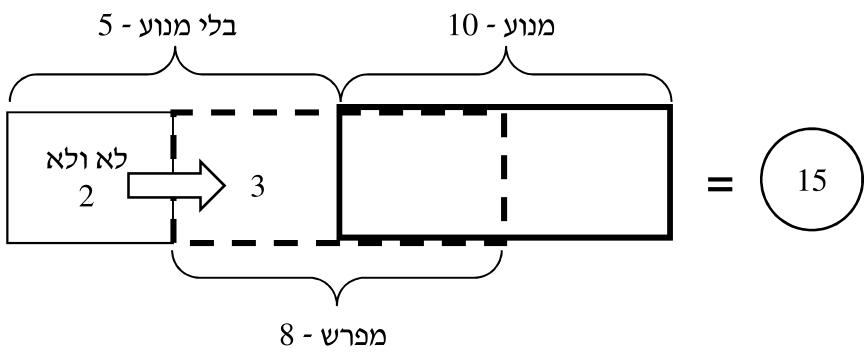


כעת נשלים את שאר הקבוצות עד שנגיע לנתון המבוקש - כמה סירות עם מנוע ומפרש (גם וגם).

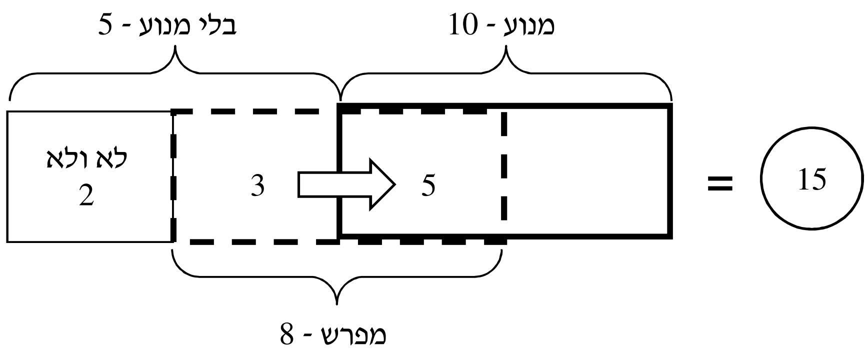
אם יש 10 סירות עם מנוע, אז יש 5 סירות בלי מנוע:



שני הריבועים השמאליים הם בלי מנוע. אנחנו יודעים שבריבוע השמאלי ביותר יש 2 סירות (לא ולא), ולכן בריבוע השני משאל צריכות להיות 3 סירות (משלים ל-5):



שני הריבועים המאצעיים הם סירות עם מפרש. מצאנו שבריבוע השני משמאל יש 3 סירות (רק מפרש), ולכן בריבוע השני מימין צריכות להיות 5 סירות (משלים ל-8):



מצאנו כי בקבוצת החפיפה - גם מנוע וגם מפרש - יש 5 סירות.

תרגול שאלות מבחינות אמת

1. במדינת נפלנד נערכו תחרויות ספורט, ובסופן חולקו סך הכול 120 מדליות.
שום אדם לא זכה ביותר ממדליה אחת.
70% מהזוכים במדליות באו מאיי הדרום.
40% מהזוכים במדליות גרים בבקתות קש.

כמה זוכים במדליות, **לכל הפחות**, באו מאיי הדרום וגם גרים בבקתת קש?

(1) 8
(2) 12
(3) 16
(4) 20

---

2. בכיתה מסוימת 20 מהתלמידים לומדים כימיה, 16 מהתלמידים לומדים פיזיקה, ו-12 מהתלמידים לומדים גם כימיה וגם פיזיקה.

אם כל אחד מתלמידי הכיתה לומד לפחות אחד מהמקצועות האלה,
כמה תלמידים יש בכיתה?

(1) 24
(2) 28
(3) 30
(4) 32

---

3. לחברה מסוימת יש 60 כלי רכב. כלי רכב אלה נמסרו ל-$\frac{2}{3}$ מעובדי החברה.
כל אחד מהם קיבל רכב אחד.
ידוע שלמחצית מן העובדים בחברה יש רכב פרטי.

לכמה עובדים, לכל הפחות, יש גם רכב מן החברה וגם רכב פרטי?

(1) 0 (2) 5 (3) 15 (4) 30

---

4. בכנופייתו של עלי-בבא 100 שודדים.
ל-40 מהשודדים יש רטייה על העין.
ל-70 מהשודדים יש רגל מעץ.
ידוע כי ל-25 מהשודדים יש גם רטייה על העין וגם רגל מעץ.

מה מספר השודדים שאין להם רטייה על העין וגם אין להם רגל מעץ?

(1) 10
(2) 15
(3) 20
(4) 25

פתרתי ____________ שאלות ב ____________ דקות, ____________ תשובות נכונות

5. בכפר טוביה $\frac{1}{2}$ מהתושבים הם בעלי מכוניות, $\frac{1}{5}$ מהתושבים מגדלים גזר,
$\frac{1}{3}$ מהתושבים מגדלים כבשים, ו-$\frac{4}{5}$ מהתושבים הם מתחת לגיל 40.

איזה מהמשפטים הבאים נכון בהכרח?

(1) כמה מהתושבים שהם בעלי מכוניות מגדלים כבשים
(2) כמה מהתושבים שהם מעל גיל 40 מגדלים גזר
(3) כמה מהתושבים שהם בעלי מכוניות מגדלים גזר
(4) כמה מהתושבים שהם מתחת לגיל 40 מגדלים כבשים

---

6. 50 מדריכי ספורט למדו בקורס השתלמות וקיבלו בסופו ציון בין 0 ל-10.
מספר המדריכים שציונם בין 8 ל-10 הוא 20.
מספר המדריכים שציונם בין 7 ל-9 הוא 20.
מספר המדריכים שציונם נמוך מ-7 הוא 20.

ציונם של כמה ממדריכי הספורט הוא בין 8 ל-9?

(1) 10 (2) 20 (3) 5 (4) 15

---

7. מתוך 200 תלמידי בית הספר "אחוזה", 172 אוהבים שוקולד ו-164 בעלי שֵׂער חום.

מה **לכל היותר** אחוז תלמידי בית הספר שאינם אוהבים שוקולד וגם אינם בעלי שֵׂער חום?

(1) 32%
(2) 18%
(3) 14%
(4) 4%

---

8. תושבי קנדה מדברים או אנגלית בלבד, או צרפתית בלבד, או גם אנגלית וגם צרפתית.
$\frac{4}{5}$ מתושבי קנדה מדברים אנגלית, ו-$\frac{7}{10}$ מתושבי קנדה מדברים צרפתית.

איזה חלק מתושבי קנדה מדברים גם אנגלית וגם צרפתית?

(1) $\frac{1}{10}$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) $\frac{3}{10}$ (4) $\frac{2}{5}$

פתרתי __________ שאלות ב __________ דקות, __________ תשובות נכונות

9. בכיתה 42 תלמידים. 20 מתלמידי הכיתה מנגנים בכינור, ו-20 מתלמידי הכיתה מנגנים בפסנתר. ידוע כי $\frac{3}{4}$ מהתלמידים שמנגנים בכינור מנגנים גם בפסנתר. שאר תלמידי הכיתה אינם מנגנים כלל.

כמה מתלמידי הכיתה אינם מנגנים כלל?

(1) 5

(2) 2

(3) 11

(4) 17

---

10. $\frac{3}{4}$ מהחולצות שבארון הן ירוקות.

$\frac{4}{5}$ מהחולצות שבארון הן בעלות כפתורים.

$\frac{3}{5}$ מהחולצות שבארון הן ירוקות ובעלות כפתורים.

$$? = \frac{\text{מספר החולצות הירוקות שאינן בעלות כפתורים}}{\text{מספר החולצות בעלות הכפתורים שאינן ירוקות}}$$

(1) $\frac{1}{2}$

(2) 2

(3) $\frac{3}{2}$

(4) $\frac{3}{4}$

פתרתי ____________ שאלות ב ____________ דקות, ____________ תשובות נכונות

תשובות

שאלה	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
תשובה	2	1	3	2	4	1	3	2	4	4

פתרתי 10 שאלות - ______________ נכונות, ______________ אחוזי הצלחה

1. תשובה (2) נכונה. שאלה 4 מתוך 20 בפרק.

שאלה זו היא שאלת טווחי חפיפה, שבה אנו מתבקשים למצוא את החפיפה המינימלית.
חפיפה מינימלית היא החריגה של סכום הקבוצות מהשלם. כלומר, סכום הקבוצות פחות השלם.

נוח יותר לבחון את החפיפה המינימלית באמצעות אחוזים, ולכן לא נפנה באופן אוטומטי לחישוב מספר הזוכים בכל קבוצה:

סכום הקבוצות הוא 70% מאיי הדרום + 40% הגרים בבקתות קש = 110%.
בשאלות אחוזים השלם שלנו הוא 100%, ועל כן החריגה של סכום הקבוצות מהשלם היא 10% ($110 - 100 = 10$). 10% מ-120 הם 12, ועל כן זו החפיפה המינימלית – ישנם לכל הפחות 12 זוכים אשר באו מאיי הדרום וגרים בבקתת קש.

אפשרות נוספת היא חישוב הערך המספרי של הקבוצות כבר בהתחלה, אולם, כאמור לעיל, אפשרות זו פחות נוחה ודורשת יותר זמן:

מספר הזוכים מאיי הדרום – 70% מ-120

$$\frac{70}{100} \cdot 120 = 7 \cdot 12 = 84$$

בקתות קש - 40% מ-120

$$\frac{40}{100} \cdot 120 = 4 \cdot 12 = 48$$

מציאת החפיפה המינימלית (סכום הקבוצות פחות השלם):

$$(84 + 48) - 120 = 132 - 120 = 12$$

.2 תשובה (1) נכונה. שאלה 7 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – שיטת הריבועים

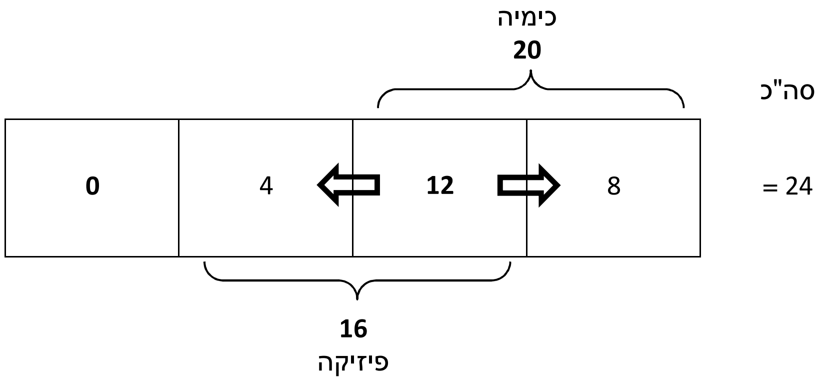
נציב את הנתונים בתרשים חפיפה ונשלים את שאר הקבוצות.

נתון כי יש 20 תלמידים הלומדים כימיה ו-16 הלומדים פיזיקה, וכן כי 12 תלמידים לומדים את שני המקצועות. בנוסף, נתון כי כל אחד מתלמידי הכיתה לומד לפחות אחד מהמקצועות האלה. כלומר, אין אף תלמיד שלא לומד פיזיקה ולא כימיה - נכתוב בריבוע השמאלי 0.

כעת, נשלים את הריבועים הנותרים.

הריבוע הראשון מימין : $20 - 12 = 8$

הריבוע השלישי מימין : $16 - 12 = 4$



נסכום את כל הריבועים :

$0 + 4 + 12 + 8 = 24$

מצאנו כי בסך הכול ישנם 24 תלמידים בכיתה.

דרך ב' – הבנה

נתון כי ישנם 20 תלמידים הלומדים כימיה ו-16 הלומדים פיזיקה, ואין תלמידים נוספים (כל אחד מהתלמידים לומד לפחות אחד מהמקצועות האלה). על כן, יש כביכול 36 תלמידים בכיתה ($16 + 20$). אולם, נתון ש-12 תלמידים לומדים את שני המקצועות, ועל כן ישנם 12 תלמידים ש"ספרנו" פעמיים – גם בקבוצת הפיזיקה וגם בקבוצת הכימיה. על מנת לבטל כפילות זו, עלינו לחסר 12 ממספר התלמידים שמצאנו, ולכן ישנם בכיתה 24 תלמידים ($36 - 12$).

3. תשובה (3) נכונה. שאלה 10 מתוך 20 בפרק.

על מנת למצוא חפיפה מינימלית בין שתי קבוצות (שאלו כמה עובדים **לכל הפחות**) עלינו לסכום את שתי הקבוצות ולהחסיר מסכום זה את השלם. לשם כך, עלינו לגלות כמה עובדים יש סה"כ בחברה, לכמה יש רכב פרטי ולכמה רכב מן החברה.

נתון לנו כי כל עובד קיבל רק רכב חברה אחד, ועל כן 60 כלי הרכב נמסרו ל-60 עובדים שונים, כלומר ל-60 עובדים יש רכב חברה.

נתון לנו כי עובדים אלו מהווים $\frac{2}{3}$ מכלל העובדים, ולכן אנו יכולים לדעת כמה עובדים יש סה"כ.

בחישוב מהיר: מצאנו כי $\frac{2}{3}$ מהעובדים הם 60, ולכן $\frac{1}{3}$ מהעובדים הם 30, וכלל העובדים הם 90.

ניתן לחשב גם באמצעות משוואה (נציב את מספר כלל העובדים כ-x):

$$\cdot 1 \quad \cdot 3$$
$$\frac{2}{3}x = 60$$
$$2x = 180$$
$$x = 90$$

כלומר, בחברה יש סה"כ 90 עובדים.

נתון כי למחצית מהם יש רכב פרטי, ולכן 45 מהעובדים הם בעלי רכב פרטי (90÷2).

משמצאנו את גדלי הקבוצות הנדרשים, נחשב את החפיפה המינימאלית בדרך שהוצגה לעיל:

$$(60 + 45) - 90 = 15$$

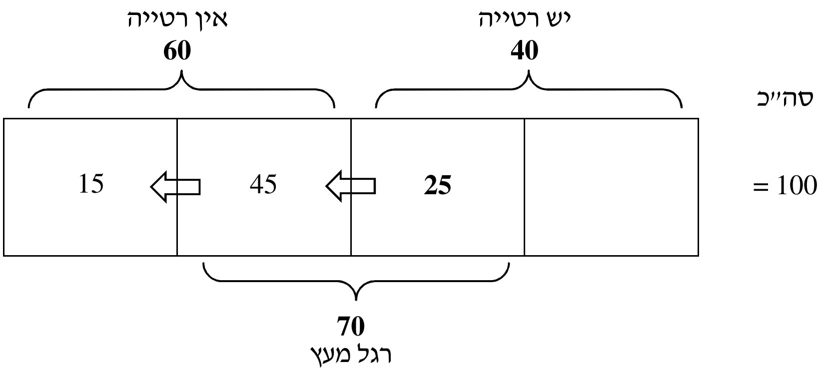
מכאן שסכום הקבוצות חורג ב-15 מהשלם, ועל כן ישנם לכל הפחות 15 עובדים שלהם גם רכב מן החברה וגם רכב פרטי.

---

4. תשובה (2) נכונה. שאלה 10 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – שיטת הריבועים

נציב את הנתונים בתרשים חפיפה כדי למצוא לכמה שודדים אין רטייה ואין רגל מעץ.



מצאנו כי ל-15 שודדים אין רטייה על העין ואין רגל מעץ.

דרך ב' – הבנה

כשיש חפיפה בין שתי קבוצות נוצרות 4 תתי-קבוצות: רק א', גם וגם, רק ב' ולא ולא.

רק א' (רק רטייה) – ל-40 שודדים יש רטייה ול-25 מתוכם יש גם רטייה וגם רגל מעץ, משמע שישנם 15 שודדים עם רטייה וללא רגל מעץ.

גם וגם – נתון 25.

רק ב' (רק רגל מעץ) – ל-70 שודדים יש רגל מעץ ול-25 מתוכם יש גם רטייה וגם רגל מעץ, משמע שישנם 45 שודדים עם רגל מעץ וללא רטייה.

לא ולא – אם בסה"כ יש 100 שודדים ומתוכם ל-15 יש רק רטייה, ל-25 יש גם וגם ול-45 יש רק רגל מעץ, לכל היתר – 15 (15 = 45 – 25 – 15 – 100) אין רטייה ואין רגל מעץ.

5. תשובה (4) נכונה. שאלה 10 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – אחוזים
בשאלה הנתונים מובאים בצורת שברים. לכן, בכדי להקל על הפתרון, נמיר את הנתונים לאחוזים:

$\frac{1}{2}$ מהתושבים הם בעלי מכוניות $\Leftarrow$ 50%
$\frac{1}{5}$ מהתושבים מגדלים גזר $\Leftarrow$ 20%
$\frac{1}{3}$ מהתושבים מגדלים כבשים $\Leftarrow$ $33\frac{1}{3}\%$
$\frac{4}{5}$ מהתושבים הם מתחת לגיל 40 $\Leftarrow$ 80%

אנו מתבקשים לקבוע איזו טענה נכונה בהכרח. נשים לב כי בכל תשובה נטען כי כמה תושבים מקבוצה אחת הם גם חלק מקבוצה אחרת. למשל, כמה מהתושבים שהם בעלי מכוניות, גם מגדלים כבשים. כלומר, אנו נשאלים האם בהכרח יש חפיפה בין שתי הקבוצות. נבדוק את התשובות:

<u>נבדוק את תשובה (1):</u> כמה מהתושבים שהם בעלי מכוניות מגדלים כבשים. בכפר 50% בעלי מכוניות ו-$33\frac{1}{3}\%$ מגדלי כבשים. סכום הקבוצות אינו חורג מהשלם, כלומר, אין בהכרח חפיפה בין הקבוצות. התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (2):</u> כמה מהתושבים שהם מעל גיל 40 מגדלים גזר. 80% תושבים הם מתחת לגיל 40, על כן, 20% תושבים מעל גיל 40. בכפר 20% מגדלי גזר. סכום הקבוצות אינו חורג מהשלם, כלומר, אין בהכרח חפיפה בין הקבוצות. התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (3):</u> כמה מהתושבים שהם בעלי מכוניות מגדלים גזר. בכפר 50% בעלי מכוניות ו-20% מגדלי גזר. סכום הקבוצות אינו חורג מהשלם, כלומר, אין בהכרח חפיפה בין הקבוצות. התשובה נפסלת.

טיפ: כיוון שפסלנו 3 תשובות, ניתן לסמן את תשובה (4). למען שלמות ההסבר, נבדוק את נכונותה.

<u>נבדוק את תשובה (4):</u> כמה מהתושבים שהם מתחת לגיל 40 (80%) מגדלים כבשים ($33\frac{1}{3}\%$). סכום הקבוצות חורג מהשלם ולכן בהכרח תהיה חפיפה. **תשובה נכונה.**

דרך ב' – שברים
כאמור, עלינו לקבוע איזו טענה נכונה בהכרח. כלומר, לקבוע בין אילו שתי קבוצות יש בהכרח חפיפה. כעת נעשה זאת באמצעות השברים, כאשר השלם הוא 1 כמובן.

<u>נבדוק את תשובה (1):</u> כמה מהתושבים שהם בעלי מכוניות מגדלים כבשים. $\frac{1}{2}$ מהתושבים הם בעלי מכוניות ו-$\frac{1}{3}$ מגדלים כבשים. $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ קטן מהשלם $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}\right)$. לפיכך, הקבוצות לא בהכרח חופפות. התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (2):</u> כמה מהתושבים שהם מעל גיל 40 מגדלים גזר. $\frac{4}{5}$ מהתושבים הם מתחת לגיל 40. לפיכך, $\frac{1}{5}$ מהתושבים הם מעל גיל 40. $\frac{1}{5}$ מהתושבים מגדלים גזר. $\frac{1}{5}+\frac{1}{5}$ קטן מהשלם $\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=\frac{2}{5}\right)$. לפיכך, הקבוצות לא בהכרח חופפות. התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (3):</u> כמה מהתושבים שהם בעלי מכוניות מגדלים גזר. $\frac{1}{2}$ מהתושבים הם בעלי מכוניות. $\frac{1}{5}$ מהתושבים מגדלים גזר. $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}$ קטן מהשלם $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{5}=\frac{7}{10}\right)$. לפיכך, הקבוצות לא בהכרח חופפות. התשובה נפסלת.

טיפ: כיוון שפסלנו 3 תשובות, ניתן לסמן את תשובה (4) מבלי לבדוק אותה. למען שלמות ההסבר, נבדוק את נכונותה.

<u>נבדוק את תשובה (4):</u> כמה מהתושבים שהם מתחת לגיל 40 מגדלים כבשים. $\frac{4}{5}$ מהתושבים הם מתחת לגיל 40. $\frac{1}{3}$ מהתושבים מגדלים כבשים. $\frac{1}{3}+\frac{4}{5}$ גדול מהשלם $\left(\frac{4}{5}+\frac{1}{3}=\frac{17}{15}\right)$. לפיכך, הקבוצות חופפות. **תשובה נכונה.**

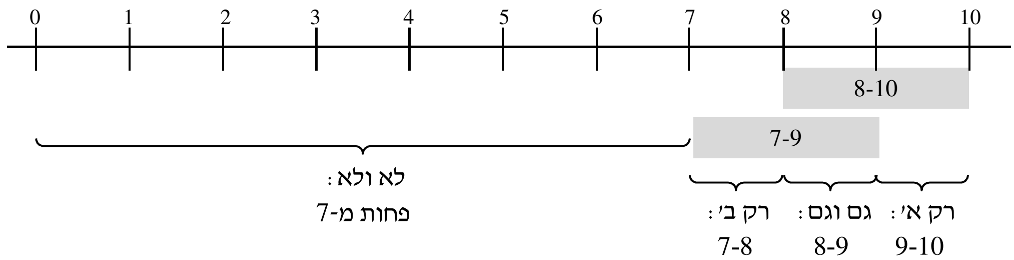
6. תשובה (1) נכונה. שאלה 12 מתוך 20 בפרק.

דרך א׳ – שיטת הריבועים

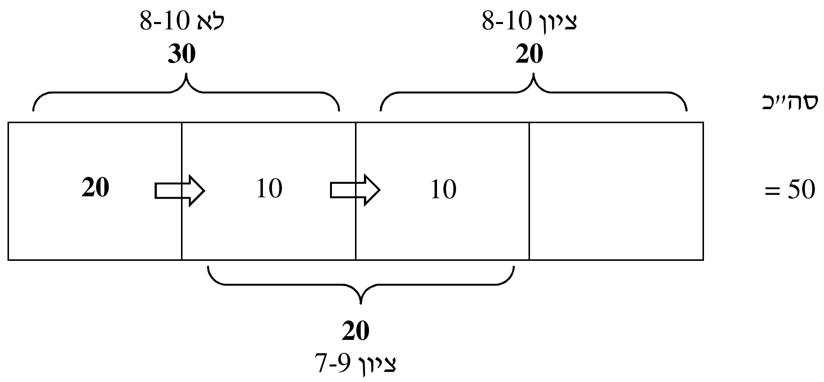
בשאלה זו נתונים גודליהן של כמה קבוצות – מדריכים שציונם בין 8 ל-10, מדריכים שציונם בין 7 ל-9, מדריכים שציונם נמוך מ-7. עלינו למצוא כמה ממדריכי הספורט קיבלו ציון בין 8 ל-9.

למעשה, מדריכי הספורט שקיבלו ציון בין 8 ל-9 חברים גם בקבוצה הראשונה (9-10) וגם בשנייה (7-9). כלומר, אנו מחפשים את תת-הקבוצה ״גם וגם״. המדריכים שציונם נמוך מ-7 הם תת-הקבוצה ״לא ולא״ (לא בין 9-10 ולא בין 7-9).

לשם ההבנה, נציג את הקבוצות הנתונות גם באמצעות הציר הבא המתאר ציונים מ-0 עד 10 :



כעת נציב את הנתונים בתרשים חפיפה.



מצאנו כי ציונם של 10 מדריכים הוא בין 8 ל-9.

דרך ב׳ – הבנה

כשיש חפיפה בין שתי קבוצות נוצרות 4 תתי-קבוצות : רק א׳, גם וגם, רק ב׳ ולא ולא.

לא ולא (0-7) – מדובר במדריכים שציונם נמוך מ-7. נתון 20. אם מתוך 50 המדריכים ל-20 ציון נמוך מ-7, הרי של-30 מדריכים ציון הגבוה מ-7 : 7-10.

רק ב׳ (7-8) – אנו יודעים של-30 מדריכים ציון בין 7-10. נתון כי מתוכם, ל-20 מדריכים ציון 8-10. כלומר, ל-10 המדריכים הנותרים ציון בין 7-8.

גם וגם (8-9) – ל-20 מדריכים ציון בין 7-9. מתוכם, ל-10 מדריכים ציון בין 7-8. כלומר, ל-10 המדריכים הנותרים ציון בין 8-9.

.7 תשובה (3) נכונה. שאלה 12 מתוך 20 בפרק.

זו שאלת טווחי חפיפה בה עלינו לקבוע מה לכל היותר אחוז תלמידי בית הספר שאינם אוהבים שוקולד ואינם בעלי שיער חום. כלומר, עלינו למצוא את החפיפה המקסימלית בין שתי הקבוצות שלעיל.

נתון כי ישנם 200 תלמידים בבית הספר ומתוכם 172 אוהבים שוקולד, ולכן שאר התלמידים בבית הספר הם תלמידים שאינם אוהבים שוקולד. מכאן שישנם 28 תלמידים שאינם אוהבים שוקולד (172 – 200).
כמו כן, 164 תלמידים הם בעלי שיער חום מתוך כלל 200 תלמידי בית הספר, ולכן בקבוצת התלמידים שאינם בעלי שיער חום ישנם 36 תלמידים (164 – 200).

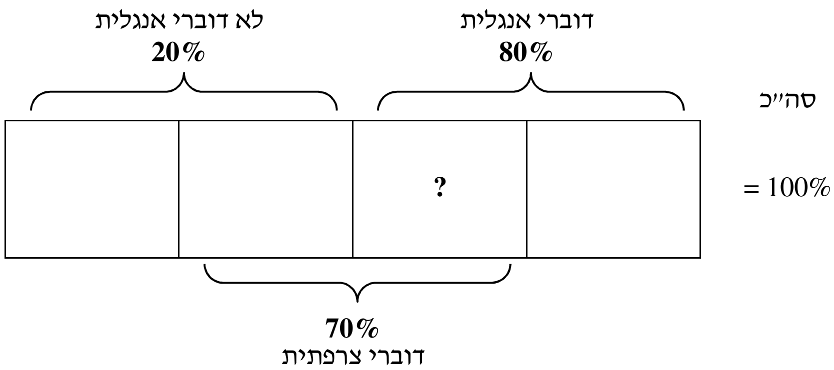
חפיפה מקסימלית היא גודל הקבוצה הקטנה. שתי הקבוצות שמצאנו הן 28 ו-36, ולכן מדובר ב-28 תלמידים מתוך 200. כעת, נבדוק איזה אחוז מהווים 28 תלמידים מכלל תלמידי בית הספר (200):

$$\frac{28}{200} = \frac{14}{100} = 14\%$$

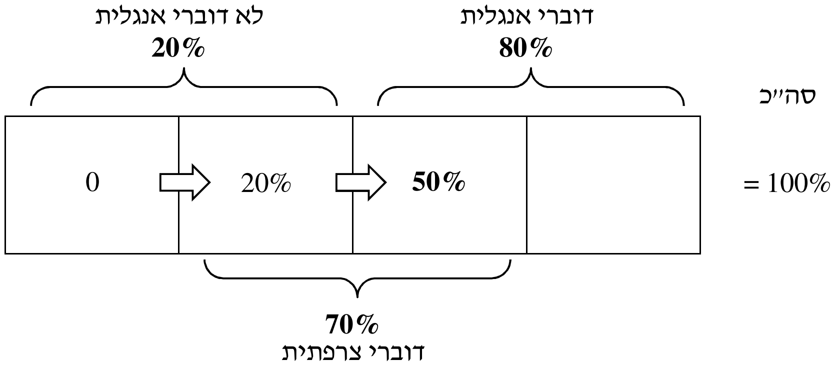
.8 תשובה (2) נכונה. שאלה 13 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הצבת מספרים
עלינו לקבוע איזה חלק מתושבי קנדה מדברים גם אנגלית וגם צרפתית.
נמיר את השברים לאחוזים:
נתון ש- $\frac{4}{5}$ מתושבי קנדה מדברים אנגלית, משמע 80%.
כמו כן, $\frac{7}{10}$ מתושבי קנדה מדברים צרפתית, משמע 70%.

נציב נתונים אלה בתרשים חפיפה:



כעת נשלים את שאר הקבוצות. נתון שכל תושבי קנדה מדברים אחת מהשפות. כלומר, בקבוצה של "לא דוברי אנגלית" ו-"לא דוברי צרפתית" (הריבוע השמאלי) ישנם 0 תושבים:



מצאנו ש-50% (חצי) מדברים גם אנגלית וגם צרפתית.

דרך ב' – הבנה

ידוע ש- $\frac{4}{5}$ מתושבי קנדה מדברים אנגלית (קבוצה זו כוללת את התושבים אשר מדברים אנגלית בלבד, ואת אלה שמדברים גם אנגלית וגם צרפתית). על כן, $\frac{1}{5}$ מתושבי קנדה מדברים רק צרפתית.

בנוסף, $\frac{7}{10}$ מתושבי קנדה מדברים צרפתית (קבוצה זו כוללת את התושבים אשר מדברים צרפתית בלבד, ואת אלה שמדברים גם אנגלית וגם צרפתית). מצאנו כי $\frac{2}{10}\left(\frac{1}{5}\right)$ מתושבי קנדה מדברים צרפתית בלבד, ולכן החלק הנותר, $\frac{5}{10}\left(\frac{7}{10}-\frac{2}{10}\right)$, מייצג את התושבים המדברים גם אנגלית וגם צרפתית.

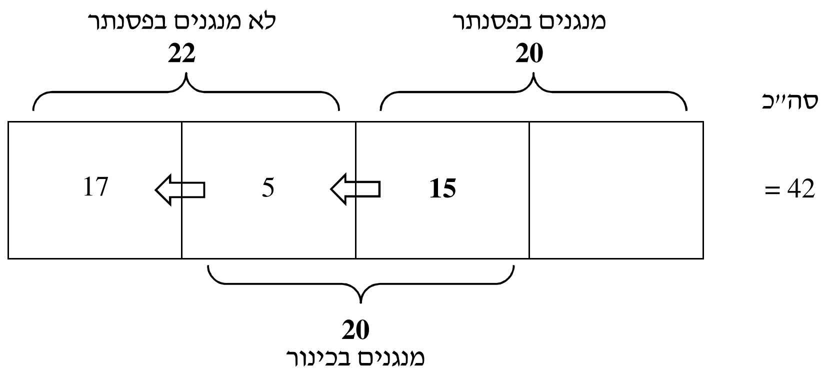
---

9. תשובה (4) נכונה. שאלה 15 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – שיטת הריבועים

נתון כי 20 מתלמידי הכיתה מנגנים בפסנתר ו-20 מנגנים בכינור. כמו כן, נתון כי $\frac{3}{4}$ מהתלמידים שמנגנים בכינור גם מנגנים בפסנתר. כלומר, 15 תלמידים מנגנים בשני הכלים $\left(\frac{3}{4}\cdot 20\right)$.

כעת נציב את הנתונים בתרשים חפיפה כדי למצוא כמה מתלמידי הכיתה לא מנגנים כלל.



מצאנו כי 17 תלמידים לא מנגנים כלל.

דרך ב' – הבנה

כשיש חפיפה בין שתי קבוצות נוצרות 4 תתי-קבוצות: רק א', גם וגם, רק ב' ולא ולא.

רק א' (רק פסנתר) – 20 תלמידים מנגנים בפסנתר, ומתוכם 15 מנגנים גם בכינור. משמע, 5 תלמידים מנגנים בפסנתר ולא מנגנים בכינור.

גם וגם – נתון 15.

רק ב' (רק כינור) – 20 תלמידים מנגנים בכינור ומתוכם 15 מנגנים גם בפסנתר. משמע, 5 תלמידים מנגנים בכינור ולא מנגנים בפסנתר.

לא ולא – אם בסה"כ יש 42 תלמידים ומתוכם 5 מנגנים רק בפסנתר, 15 מנגנים גם בפסנתר וגם בכינור ו-5 מנגנים רק בכינור, כל היתר – 17 $(42-5-15-5=17)$ לא מנגנים כלל.

---

10. תשובה (4) נכונה. שאלה 19 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – שיטת הריבועים

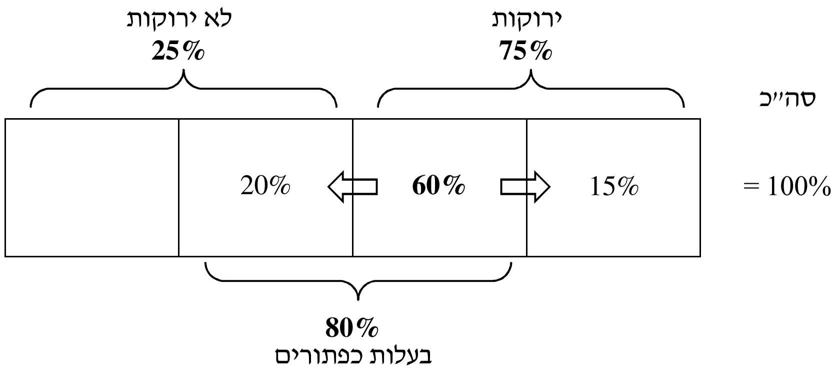
בשאלה הנתונים מובאים בצורת שברים. לכן, בכדי להקל על הפתרון, נמיר את הנתונים לאחוזים.

$\frac{3}{4}$ מהחולצות שבארון הן ירוקות $\Leftarrow$ 75% מהחולצות שבארון הן ירוקות.

$\frac{4}{5}$ מהחולצות שבארון הן בעלות כפתורים $\Leftarrow$ 80% מהחולצות שבארון הן בעלות כפתורים.

$\frac{3}{5}$ מהחולצות שבארון הן ירוקות ובעלות כפתורים $\Leftarrow$ 60% מהחולצות שבארון הן ירוקות ובעלות כפתורים.

כעת נציב את הנתונים בתרשים חפיפה כדי למצוא כמה חולצות הן ירוקות ואינן בעלות כפתורים, וכמה חולצות הן בעלות כפתורים ואינן ירוקות.



מצאנו כי 15% מהחולצות הן ירוקות ואינן בעלות כפתורים, וכי 20% מהחולצות הן בעלות כפתורים ואינן ירוקות. נחשב את היחס בין הקבוצות הללו:

$$\frac{\text{מספר החולצות הירוקות שאינן בעלות כפתורים}}{\text{מספר החולצות בעלות הכפתורים שאינן ירוקות}} = \frac{15\%}{20\%} = \frac{3}{4}$$

דרך ב' – הבנה

כשיש חפיפה בין שתי קבוצות נוצרות 4 תתי-קבוצות: רק א', גם וגם, רק ב' ולא ולא.

רק א' (רק ירוקות) – 75% מהחולצות הן ירוקות. נתון כי 60% מהחולצות בארון הן ירוקות ובעלות כפתורים.

לפיכך, 15% מהחולצות הן רק ירוקות (ואינן בעלות כפתורים).

גם וגם – נתון, 60%.

רק ב' (רק כפתורים) – 80% מהחולצות הן בעלות כפתורים. נתון כי 60% מהחולצות הן בעלות כפתורים וירוקות.

לפיכך, 20% מהחולצות הן רק בעלות כפתורים (ואינן ירוקות).

כעת ניתן לחשב את היחס בין מספר החולצות הירוקות שאינן בעלות כפתורים (= רק ירוקות) לבין מספר החולצות בעלות הכפתורים שאינן ירוקות (= רק כפתורים):

$$\frac{\text{מספר החולצות הירוקות שאינן בעלות כפתורים}}{\text{מספר החולצות בעלות הכפתורים שאינן ירוקות}} = \frac{15\%}{20\%} = \frac{3}{4}$$

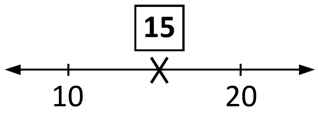
ממוצעים

ממוצע הוא "האמצע" של קבוצת מספרים.

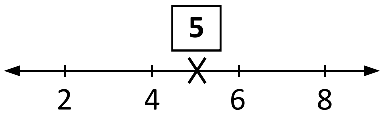
ממוצע של קבוצת מספרים סימטרית

כאשר מדובר בקבוצת מספרים סימטרית, הממוצע יהיה בדיוק באמצע, וניתן יהיה למצוא אותו ללא כל חישוב. למשל:

הממוצע של 10 ו-20 הוא 15:



הממוצע של 2, 4, 6 ו-8 הוא 5:



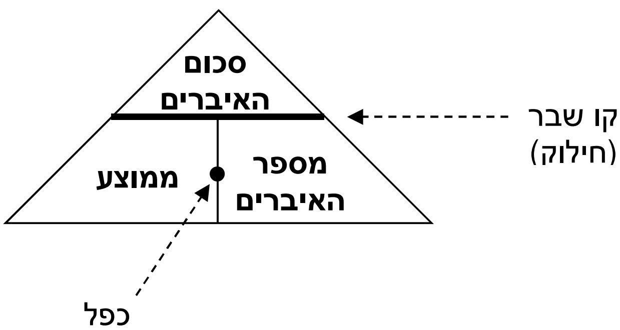
ממוצע של קבוצת מספרים לא סימטרית

כאשר מדובר בקבוצת מספרים לא סימטרית, קשה לנו "לראות" את הממוצע, ולכן נשתמש בנוסחת הממוצע:

$$\text{ממוצע} = \frac{\text{סכום האיברים}}{\text{מספר האיברים}}$$

<u>שינוי נושא נוסחה</u>

כאשר נתונים לנו שני פרמטרים מתוך שלושת הפרמטרים המופעים בנוסחה, ניתן תמיד למצוא את השלישי באמצעות סרטוט הפרמידה:



דוגמה:

משקלם הממוצע של שני החברים דוד ויהונתן הוא 84 ק״ג. דוד שוקל 12 ק״ג יותר מיהונתן.
מה משקלו של יהונתן?

(1) 74 (2) 75 (3) 77 (4) 78

פתרון -

נבנה משוואה בעזרת נוסחת הממוצע:

נציב: דוד - D, יהונתן - Y

$$\frac{D+Y}{2}=84$$

$$\frac{(Y+12)+Y}{2}=84$$

$$2Y+12=168$$

$$2Y=156$$

$$Y=78$$

דוגמה:

נתון: $A+B=7$

$A+C=3$

$B+C=8$

מה הממוצע של A, B ו-C?

(1) 6 (2) 2 (3) 3 (4) 4

פתרון -

נחבר את שלוש המשוואות:

$$\begin{array}{rl} & A+B=7 \\ + & A+C=3 \\ + & B+C=8 \\ \hline & 2A+2B+2C=18 \quad /:2 \end{array}$$

$$A+B+C=9$$

נציב בנוסחת הממוצע:

$$\frac{A+B+C}{3}=\frac{9}{3}=3$$

דוגמה:

בכיתה 5 ילדים שמשקלם הממוצע הוא 40 ק"ג. לכיתה הצטרף רביב, ששוקל 52 ק"ג.
מה המשקל הממוצע של הילדים בכיתה לאחר שרביב הצטרף אליה (בק"ג)?

(1) 41 (2) 42 (3) 43 (4) 44

פתרון -

אמנם אנו לא יודעים מה המשקל של כל אחד מהילדים, אבל אם הממוצע שלהם הוא 40, ניתן להתייחס אליהם כאילו כל אחד מהם שוקל 40.
זאת אומרת שסכום האיברים ההתחלתי שלנו הוא $5\cdot40$.
רביב הצטרף לכיתה, ולכן נוסיף לסכום 52.
מספר האיברים ההתחלתי שלנו היה 5, אך רביב הצטרף לכיתה ולכן כעת יש 6 ילדים בכיתה.

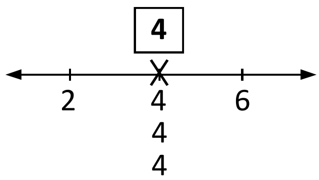
נציב את הנתונים בנוסחת הממוצע:

$$\frac{5\cdot40+52}{5+1}=\frac{252}{6}=\frac{240+12}{6}=42$$

הממוצע החדש בכיתה הוא 42 ק"ג.

כאשר מוסיפים או מחסרים מספרים השווים לממוצע של קבוצת מספרים, הממוצע של הקבוצה לא משתנה

הממוצע של 2, 4 ו-6 הוא 4.
הממוצע של 2, 4, 4, 4 ו-6 הוא 4:



דוגמה:

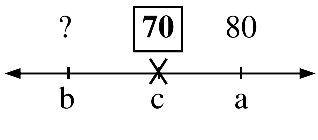
הממוצע של a ו-b שווה לממוצע של a, b ו-c. נתון: $a=80$, $c=70$

$b=?$

(1) 50 (2) 60 (3) 70 (4) 80

פתרון -

שימו לב כי כאשר הוסיפו את c, הממוצע לא השתנה.
לפיכך, c חייב להיות שווה לממוצע.
נראה זאת על ציר המספרים:



מכיוון שהמרחקים של a ושל b מ-c שווים, הרי ש-b שווה ל-60. תשובה (2) נכונה.

ממוצע משוקלל

ממוצע משוקלל הוא ממוצע בין מספר קבוצות שלכל אחת מהן ממוצע משלה. מכיוון שהקבוצות לא חייבות להיות באותו גודל, הקבוצה הגדולה יותר תשפיע יותר על הממוצע מאשר הקבוצה הקטנה.

בחישוב ממוצע בגרות למשל, מקצוע לימוד של 5 יח"ל "שווה" יותר ממקצוע לימוד של 2 יח"ל.

כאשר אנו באים לחשב ממוצע משוקלל של קבוצות, עלינו להתחשב בגודל של כל קבוצה.

הנוסחה לחישוב ממוצע משוקלל היא בעצם הנוסחה הרגילה של הממוצע, תוך התחשבות בגדלי הקבוצות:

$$\textbf{ממוצע משוקלל} = \frac{\textbf{ממוצע א} \cdot \textbf{משקל א} + \textbf{ממוצע ב} \cdot \textbf{משקל ב}}{\textbf{סכום משקלי הקבוצות}}$$

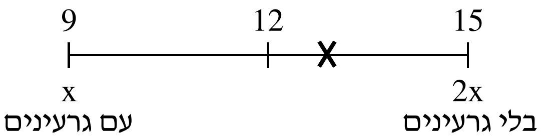
* משקלי הקבוצות = הגודל של הקבוצות
* סכום משקלי הקבוצות = מספר האיברים הכולל בשתי הקבוצות יחד

דוגמה:
אבטיח ללא גרעינים עולה 15 שקלים לק"ג, ואבטיח עם גרעינים עולה 9 שקלים לק"ג. מספר האבטיחים ללא גרעינים שקנתה סיון כפול ממספר האבטיחים עם גרעינים שקנתה.
מה המחיר הממוצע ששילמה סיון עבור כל האבטיחים שקנתה?

(1) 10 (2) 12 (3) 13 (4) 11

פתרון -

דרך א' - הבנת ה"אמצע"
נציב את הנתונים על ציר המספרים:



האמצע בין 9 ל-15 הוא 12. מכיוון שיש יותר אבטיחים בלי גרעינים, המחיר הממוצע חייב להיות יותר קרוב ל-15, ולכן יהיה גדול מ-12 ← רק תשובה (3) מתאימה.

דרך ב' - נוסחת הממוצע
ניתן לחשב את הממוצע באופן מדויק על ידי נוסחת הממוצע:

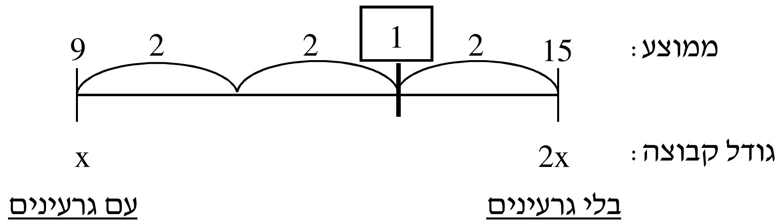
$$\frac{x \cdot 9 + 2x \cdot 15}{3x} = \frac{39x}{3x} = 13$$

דרך ג' - יחסים (שיטת הנדנדה)

על פי שיטת הנדנדה, הממוצע מחלק את המרחק בין ממוצעי הקבוצות באותו יחס כמו גדלי הקבוצות - קרוב יותר לקבוצה הגדולה.

במקרה שלנו, היחס בין גדלי הקבוצות הוא 1:2 (הקבוצה בלי גרעינים כפולה בגודלה מהקבוצה עם גרעינים).

לכן, נחלק את המרחק בין הממוצעים ל-3 יחידות יחס, והממוצע יהיה גם ביחס של 2:1 - קרוב יותר לקבוצה הגדולה:



תרגול שאלות מבחינות אמת

1. a ו-b הם שני מספרים שלמים, $0 < b < a$.
הממוצע של a ו-b שווה להפרש בין a ל-b.

איזה מזוגות המספרים הבאים יכול להיות a ו-b?

(1) $2\ ;\ 1$
(2) $5\ ;\ 2$
(3) $9\ ;\ 3$
(4) $16\ ;\ 4$

---

2. ממוצע הציונים בכיתה של ליאת הוא 70.
ממוצע הציונים בכיתה של תומר הוא 85.
ממוצע הציונים בשתי הכיתות יחד הוא 77.

איזו מהטענות הבאות נכונה בהכרח?

(1) מספר התלמידים בכיתה של ליאת גדול ממספר התלמידים בכיתה של תומר
(2) מספר התלמידים בכיתה של ליאת קטן ממספר התלמידים בכיתה של תומר
(3) מספר התלמידים בכיתה של ליאת שווה למספר התלמידים בכיתה של תומר
(4) אף לא אחת מהטענות הנ"ל נכונה בהכרח

---

3. הממוצע של a ו-b שווה לממוצע של c ו-d.

$(a+b) - (c+d) = ?$

(1) 0
(2) $\frac{a+b}{2}$
(3) $a - c$
(4) אי-אפשר לדעת לפי הנתונים

---

4. נתון: x הוא הממוצע של a ו-b.
y הוא הממוצע של c ו-d.
z הוא **הסכום** של a, b, c ו-d.

הממוצע של x ו-y שווה בהכרח ל-

(1) $\frac{z}{6}$ (2) $8 \cdot z$ (3) $\frac{z}{4}$ (4) $4 \cdot z$

פתרתי ____________ שאלות ב ____________ דקות, ____________ תשובות נכונות

.5 מה הממוצע של $\frac{1}{2}$ ו-$\frac{1}{8}$?

(1) $\frac{1}{4}$ (2) $\frac{1}{5}$ (3) $\frac{3}{10}$ (4) $\frac{5}{16}$

.6 הממוצע של 2 מספרים שווה לאחד מהם.

מה היחס בין 2 המספרים?

(1) 1 : 1
(2) 1 : 2
(3) 1 : 1.5
(4) 1 : 2.5

.7 ממוצע הציונים של רוני, ליטל ועמית שווה לממוצע הציונים של רוני וליטל.
הציון של ליטל הוא 80 והציון של עמית הוא 90.

מה הציון של רוני?

(1) 100
(2) 90
(3) 80
(4) 60

.8 אלה, גד וציון הם בני גילים שונים.
ממוצע הגילים של שלושתם שווה לגילו של גד.

$$? = \frac{\text{ההפרש בין הגיל של ציון לגיל של גד}}{\text{ההפרש בין הגיל של גד לגיל של אלה}}$$

(1) 1

(2) 2

(3) $\frac{1}{2}$

(4) אי-אפשר לדעת לפי הנתונים

פתרתי ____________ שאלות ב ____________ דקות, ____________ תשובות נכונות

9. הממוצע של 15, a ו-b גדול מהממוצע של 20 ו-a.

איזה מהאי-שוויונות הבאים נכון בהכרח?

(1) $b < 3a + 5$
(2) $b < 2a + 10$
(3) $a < 3b + 15$
(4) $a < 2b - 30$

---

10. M הוא הממוצע החשבוני של x, y ו-z.
נתון: $x < M < z$

איזו מן הטענות הבאות נכונה בהכרח?

(1) הממוצע של x ו-z הוא y
(2) הממוצע של x ו-z קטן מ-y
(3) הממוצע של x ו-y קטן מ-z
(4) הממוצע של y ו-z קטן מ-x

---

11. הממוצע של שני מספרים חיוביים a ו-b שווה ל-2a.

הממוצע של a ו-b שווה גם ל-

(1) b (2) $2b$ (3) $\frac{2}{3}b$ (4) $\frac{1}{2}b$

---

12. נתון: $c \le b \le a$
הממוצע של a, b ו-c שווה ל-a.

מהנתון נובע **בהכרח** כי -

(1) $a = 0$
(2) $c < 0$
(3) $b + c = a$
(4) $c = a$

פתרתי ____________ שאלות ב ____________ דקות, ____________ תשובות נכונות

13. קובייה הוגנת שפאותיה ממוספרות מ-1 עד 6 נזרקה 3 פעמים.
הממוצע של תוצאות 3 הזריקות היה 4. הממוצע של תוצאות 2 הזריקות הראשונות היה 3.
הממוצע של תוצאות 2 הזריקות האחרונות היה 4.

מה הייתה תוצאת הזריקה **השנייה**?

(1) 6
(2) 2
(3) 3
(4) 4

---

14. אם ממוצע של 4 מספרים שלמים וחיוביים קטן או שווה ל-10,

מה יכול להיות ערכו המקסימלי של המספר הגדול ביותר ביניהם?

(1) 28
(2) 34
(3) 37
(4) 40

---

15. בשנת 1960 ירדו בממוצע 100 מ"מ גשם בחודש.
אם בששת החודשים ינואר-יוני 1960 ירדו 150 מ"מ גשם בחודש בממוצע, כמה מ"מ גשם **לכל היותר** ירדו בחודש דצמבר באותה שנה?

(1) 50 (2) 150 (3) 300 (4) 600

---

16. ממוצע מספר הבולים של גלעד ונֹגה גדול ב-8 מממוצע מספר הבולים של גלעד וראובן.

מספר הבולים של נֹגה גדול _____ ממספר הבולים של ראובן.

(1) ב-16
(2) פי 2
(3) פי 4
(4) ב-4

---

17. ציוני תלמידים בשתי קבוצות, כל אחת של 4 תלמידים, הם כדלקמן:
קבוצה א' - 4, 4, 5, 7
קבוצה ב' - 6, 7, 8, 9
לאחר שהעבירו את אחד התלמידים מקבוצה א' לקבוצה ב', ירד ממוצע הציונים של קבוצה א', וירד גם ממוצע הציונים של קבוצה ב'.

מה ציונו של התלמיד שעבר לקבוצה ב'?

(1) לא ייתכן מצב כזה
(2) 7
(3) 5
(4) 4

---

18. הממוצע של המספרים a, b ו-12 גדול ב-2 מהממוצע של המספרים b, c ו-15.

$a - c = ?$

(1) 5
(2) 2
(3) 9
(4) אי-אפשר לדעת לפי הנתונים

---

19. מחירה של תערובת קפה מסוימת הוא 66 שקלים לק"ג. תערובת זו עשויה מקפה קולומביאני שמחירו 72 שקלים לק"ג וקפה ברזילאי שמחירו 48 שקלים לק"ג.

מה היחס בתערובת זו בין משקל הקפה הקולומביאני לבין משקל הקפה הברזילאי?

(1) 3 : 2
(2) 2 : 1
(3) 5 : 2
(4) 3 : 1

---

20. בכיתה x בנים ו-y בנות ($x \neq y$, $0 < x , y$).
ממוצע הציונים בביולוגיה הוא 90 בקרב הבנות ו-85 בקרב הבנים.

איזה מהערכים הבאים, אם ייתנן, יאפשר לחשב את ממוצע הציונים הכיתתי בביולוגיה?

(1) $x + y$
(2) $x - y$
(3) $x \cdot y$
(4) $\frac{x}{y}$

פתרתי ____________ שאלות ב ____________ דקות, ____________ תשובות נכונות

תשובות

שאלה	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
תשובה	3	1	1	3	4	1	1	1	4	3

שאלה	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
תשובה	3	4	2	3	3	1	2	3	4	4

פתרתי 20 שאלות - ______________ נכונות, ______________ אחוזי הצלחה

1. תשובה (3) נכונה. שאלה 1 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הצבת תשובות
נציב את התשובות ונבדוק באיזו תשובה ממוצע המספרים שווה להפרש ביניהם:

הצבת תשובה (1): הממוצע של 2 ו-1 הוא 1.5 $\left(\frac{1+2}{2}\right)$. לעומת זאת ההפרש ביניהם הוא 1 $(2-1)$. הממוצע לא שווה להפרש, התשובה נפסלת.

הצבת תשובה (2): הממוצע של 5 ו-2 הוא 3.5 $\left(\frac{5+2}{2}\right)$. לעומת זאת ההפרש ביניהם הוא 3 $(5-2)$. הממוצע לא שווה להפרש, התשובה נפסלת.

הצבת תשובה (3): הממוצע של 9 ו-3 הוא 6 $\left(\frac{9+3}{2}\right)$. גם ההפרש ביניהם הוא 6 $(9-3)$. הממוצע שווה להפרש, **תשובה נכונה.**

טיפ: מכיוון שהצבנו את התשובות, ברגע שמצאנו תשובה נכונה אין צורך להמשיך לבדוק את יתר התשובות אך למען שלמות ההסבר נפסול את תשובה (4):
הממוצע של 4 ו-16 הוא 10 $\left(\frac{4+16}{2}\right)$. לעומת זאת ההפרש ביניהם הוא 12 $(16-4)$. הממוצע לא שווה להפרש, התשובה נפסלת.

דרך ב' – פתרון מתמטי
נבנה ביטוי המציג את ממוצעם של a ו-b, לפי הנוסחה $\text{ממוצע} = \frac{\text{סכום האיברים}}{\text{מספר האיברים}}$:

$$\frac{a+b}{2}$$

עתה נשווה את הממוצע להפרש הנעלמים:

$$\frac{a+b}{2} = a - b$$

נפתור את המשוואה:

$$a + b = 2a - 2b$$
$$3b = a$$

לפיכך, הנעלם הגדול יותר (a) צריך להיות גדול פי 3 מהנעלם הקטן יותר (b). נראה כי רק תשובה (3) מקיימת תנאי זה.

2. תשובה (1) נכונה. שאלה 1 מתוך 20 בפרק.

ממוצע הציונים בכיתה של ליאת הוא 70 ובכיתה של תומר הוא 85. ידוע שממוצע הציונים של שתי הכיתות יחד הוא 77. עלינו לקבוע איזו כיתה גדולה יותר.

ההפרש בין ממוצע הציונים בכיתה של ליאת לממוצע של שתי הכיתות הוא 7 (70 – 77). ההפרש בין ממוצע הציונים בכיתה של תומר לממוצע של שתי הכיתות הוא 8 (77 – 85). כלומר, ממוצע שתי הכיתות קרוב יותר לממוצע הציונים בכיתה של ליאת ועל כן כיתה זו משפיעה יותר על הממוצע. כלומר, מספר התלמידים בכיתה של ליאת גדול יותר ממספר התלמידים בכיתה של תומר.

---

3. תשובה (1) נכונה. שאלה 1 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הבנה
ניתן להבין שאם הממוצע של שני מספרים שווה לממוצע של שני מספרים אחרים, גם הסכום שלהם יהיה שווה;
אנו מכירים את הנוסחה: סכום האיברים = ממוצע · מספר האיברים
ועל כן אם מספר האיברים זהה והממוצע זהה, גם הסכום יהיה זהה.

מכיוון שהביטוי מתאר הפרש בין שני סכומים שווים, הוא שווה 0.

דרך ב' – פתרון מתמטי
נתון שהממוצע של a ו-b שווה לממוצע של c ו-d. נבטא נתון זה במשוואה באמצעות הנוסחה: $\frac{\text{סכום האיברים}}{\text{מספר האיברים}} =$ ממוצע

$$\frac{a+b}{2}=\frac{c+d}{2}$$

נכפול את שני צדדי המשוואה ב-2:

$$a+b=c+d$$

כעת, נציב את ערכם של $c + d$ בביטוי הנתון:

$$(a + b) - (c + d) = (a + b) - (a + b) = 0$$

4. תשובה (3) נכונה. שאלה 2 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הצבת מספרים
בהסתכלות על התשובות ניתן לראות שהן מובדלות ושונות ולכן כל z שנציב יביא בהכרח לתשובות שונות (למעט $z = 0$). מתוך כך, ומשיקולי נוחות נציב: $a = b = c = d = 1$.
x הוא הממוצע של a ו-b. נציב: $a = b = 1$. הממוצע שלהם, x, שווה 1.
y הוא הממוצע של c ו-d. נציב: $c = d = 1$. הממוצע שלהם, y, שווה 1.
z הוא הסכום של a, b, c ו-d. כלומר, $z = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$.
עלינו לקבוע למה שווה הממוצע של x ו-y. הממוצע של 1 ו-1 שווה 1.
כעת, נציב בתשובות $z = 4$ ונחפש תשובה השווה ל-1. נשים לב שמכיוון שהשתמשנו בהצבת מספרים במקום הנעלמים, עלינו לפסול 3 תשובות בטרם נוכל לסמן תשובה נכונה.

לא מתאים, התשובה נפסלת	$\Rightarrow$	$\frac{z}{6} \Rightarrow \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$	(1)
לא מתאים, התשובה נפסלת	$\Rightarrow$	$8 \cdot z \Rightarrow 8 \cdot 4 = 32$	(2)
מתאים	$\Rightarrow$	$\frac{z}{4} \Rightarrow \frac{4}{4} = 1$	(3)
לא מתאים, התשובה נפסלת	$\Rightarrow$	$4 \cdot z \Rightarrow 4 \cdot 4 = 16$	(4)

פסלנו 3 תשובות ועל כן תשובה (3) נכונה.

דרך ב' – פתרון מתמטי
עלינו להביע את הממוצע של x ו-y באמצעות z.
ראשית, נבטא את x ו-y באמצעות הנעלמים a, b, c ו-d באופן אלגברי.

x הוא הממוצע של a ו-b:

$$x = \frac{a + b}{2}$$

y הוא הממוצע של c ו-d:

$$y = \frac{c + d}{2}$$

כעת נציב את הערכים שלעיל בממוצע של x ו-y:

$$\frac{x + y}{2} \Rightarrow \frac{\frac{a + b}{2} + \frac{c + d}{2}}{2} = \frac{\frac{a + b + c + d}{2}}{2}$$

ניעזר בקשתות:

$$\frac{\frac{a + b + c + d}{2}}{\frac{2}{1}} = \frac{a + b + c + d}{4}$$

עוד ידוע כי z הוא הסכום של a, b, c ו-d:

$$z = a + b + c + d$$

מצאנו לעיל כי המונה שווה ל-z:

$$\frac{a + b + c + d}{4} = \frac{z}{4}$$

לפיכך, הממוצע של x ו-y שווה $\frac{z}{4}$.

5. תשובה (4) נכונה. שאלה 5 מתוך 20 בפרק.

נחשב את הממוצע לפי הנוסחה לחישוב ממוצע – ממוצע = $\frac{\text{סכום האיברים}}{\text{מספר האיברים}}$

$$\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{8}}{2}$$

נהפוך את השברים שבמונה לבעלי מכנה משותף 8 :

$$\frac{\frac{4}{8}+\frac{1}{8}}{2}=\frac{\frac{5}{8}}{2}$$

ניעזר בקשתות :

$$\frac{\frac{5}{8}}{\frac{2}{1}}=\frac{5\cdot 1}{8\cdot 2}=\frac{5}{16}$$

---

6. תשובה (1) נכונה. שאלה 6 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הצבת מספרים
נתון שהממוצע של שני מספרים שווה לאחד מהם ועלינו למצוא את היחס בין שני המספרים. נציב בתור המספר הראשון את המספר 1. על פי הנתונים, הממוצע של מספר זה ושל המספר השני צריך להיות 1. על כן, גם המספר השני צריך להיות 1 (הממוצע של 1 ו-1 הוא 1). לפיכך, היחס ביניהם הוא 1 : 1.

דרך ב' – פתרון מתמטי
נתון שהממוצע של שני מספרים שווה לאחד מהם. נביע את המספרים באמצעות הנעלמים a ו-b ונתאר קשר זה באופן אלגברי :

$$\frac{a+b}{2}=a$$

נכפול את שני האגפים פי 2 :

$$a+b=2a$$

נעביר את a אגף :

$$b=a$$

מאחר ששני המספרים שווים, היחס ביניהם הוא 1 : 1.

דרך ג' – הבנת הממוצע
הממוצע של שני מספרים שווה לאחד מהם. ממוצע הוא נקודת האיזון של האיברים השונים ולכן כאשר אנו מחשבים ממוצע של שני מספרים בלבד הממוצע שלהם יהיה בדיוק האמצע בין שני המספרים. מכיוון שבשאלה הנתונה הממוצע שווה לאחד האיברים, הרי שהמספר השני לא השפיע על הממוצע ושני המספרים בהכרח שווים זה לזה, ומכאן שהיחס ביניהם הוא 1 : 1.

---

7. תשובה (1) נכונה. שאלה 7 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הבנת הממוצע

ממוצע הציונים של רוני וליטל שווה לממוצע הציונים של רוני, ליטל ועמית. כלומר, הוספתה של עמית לקבוצה לא שינתה את הממוצע. לפיכך, <u>ציונה של עמית חייב להיות שווה לממוצע</u>. נראה זאת על ציר המספרים:

מכיוון שהמרחקים של רוני וליטל מהממוצע, כלומר מעמית, שווים, הציון של רוני הוא 100.

ניתן, לחילופין, לחשב זאת בעזרת הנוסחה: $\text{ממוצע} = \frac{\text{סכום האיברים}}{\text{מספר האיברים}}$

$$90 = \frac{R + 80}{2}$$

ניצור מכנה משותף 2:

$$180 = R + 80$$

נסדר אגפים:

$$R = 100$$

דרך ב' – הצבת תשובות

נתון כי ממוצע הציונים של רוני, ליטל ועמית שווה לממוצע הציונים של רוני וליטל. ידוע לנו שהציון של ליטל הוא 80 והציון של עמית הוא 90. נשאלנו מה הציון של רוני. נבדוק איזו תשובה מקיימת את נתוני השאלה.

<u>נבדוק את תשובה (1):</u>

נחשב את ממוצע הציונים של רוני (100), ליטל (80) ועמית (90) $\Leftarrow$ ממוצע 90 $\left(\frac{100+80+90}{3}\right)$

נחשב את ממוצע הציונים של רוני (100) ושל ליטל (80) $\Leftarrow$ ממוצע 90 $\left(\frac{100+80}{2}\right)$

הממוצעים שווים, **תשובה נכונה.**

טיפ: מכיוון שהצבנו את התשובות, ברגע שמצאנו תשובה נכונה אין צורך להמשיך לבדוק את שאר התשובות, אך למען שלמות ההסבר נפסול אותן:

<u>נבדוק את תשובה (2):</u>

נחשב את ממוצע הציונים של רוני (90), ליטל (80) ועמית (90) $\Leftarrow$ ממוצע $86\frac{2}{3}$ $\left(\frac{90+80+90}{3}\right)$

נחשב את ממוצע הציונים של רוני (90) ושל ליטל (80) $\Leftarrow$ ממוצע 85 $\left(\frac{90+80}{2}\right)$

הממוצעים אינם שווים, התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (3):</u>

נחשב את ממוצע הציונים של רוני (80), ליטל (80) ועמית (90) $\Leftarrow$ ממוצע $83\frac{1}{3}$ $\left(\frac{80+80+90}{3}\right)$

נחשב את ממוצע הציונים של רוני (80) ושל ליטל (80) $\Leftarrow$ ממוצע 80 $\left(\frac{80+80}{2}\right)$

הממוצעים אינם שווים, התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (3):</u>

נחשב את ממוצע הציונים של רוני (60), ליטל (80) ועמית (90) $\Leftarrow$ ממוצע $76\frac{2}{3}$ $\left(\frac{60+80+90}{3}\right)$

נחשב את ממוצע הציונים של רוני (60) ושל ליטל (80) $\Leftarrow$ ממוצע 70 $\left(\frac{60+80}{2}\right)$

הממוצעים אינם שווים, התשובה נפסלת.

דרך ג' – פתרון מתמטי

כאמור, ידועים לנו הציונים של ליטל ושל עמית, ועלינו למצוא את הציון של רוני. נסמן ציון זה באות R. ממוצע הציונים של שלושתן שווה לממוצע הציונים של רוני וליטל. נציג זאת באופן אלגברי, לפי הנוסחה: ממוצע = סכום האיברים / מספר האיברים

$$\frac{R+80}{2}=\frac{R+80+90}{3}$$

ניצור מכנה משותף 6:

$$3\cdot(R+80)=2\cdot(R+80+90)$$

נפתח סוגריים:

$$3R+240=2R+160+180$$

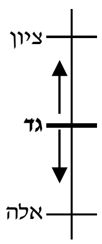
נסדר אגפים:

$$R=160+180-240 \quad\Rightarrow\quad R=100$$

---

8. תשובה (1) נכונה. שאלה 11 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הממוצע כנקודת איזון/הבנה



ידוע שממוצע הגילים שווה לגילו של גד. מאחר שמדובר בגילים שונים, הממוצע בהכרח נמצא בין האיבר הגדול לאיבר הקטן ולפיכך גד הוא האמצעי מבין השלושה.

אם ציון "מושך" את הממוצע כלפי מעלה, לדוגמה, אלה צריכה למשוך את הממוצע כלפי מטה בהתאם, כך שהממוצע יישאר נקודת האיזון – בדיוק באמצע. ובמילים אחרות, ההפרש בין הממוצע לאיבר הגדול שווה להפרש בין הממוצע לאיבר הקטן. מאחר שההפרשים שווים, היחס ביניהם הוא 1.

דרך ב' – הצבת מספרים

אנו מתבקשים למצוא את היחס בין הפרשי הגילים של ציון, גד ואלה. נתון כי ממוצע הגילים של שלושתם שווה לגילו של גד. מאחר שאין בשאלה מספרים ממשיים, אנו יכולים להשתמש בנתון זה כדי להציב מספרים שכאלו.

נציב 10 בתור גילו של גד. כאמור, גילו שווה לממוצע הגילאים של השלושה ומכאן שממוצע זה הוא 10. כלומר, סכום הגילים של השלושה הוא 30 ($3 \cdot 10$). לפיכך, סכום הגילים של ציון ואלה הוא 20 ($30 - 10$). מאחר שנתון כי הם בני גילים שונים, ניתן להציב עבור גילה של אלה 8 ובהתאם לכך להציב בעבור גילו של ציון 12 ($20 - 8$). כעת נחשב את היחס באמצעות הגילים שמצאנו:

ההפרש בין הגיל של ציון לגיל של גד הוא 2 ($12 - 10$).

ההפרש בין הגיל של גד לגיל של אלה הוא 2 ($10 - 8$).

על כן, היחס בין ההפרשים הוא 1. עם זאת, יש לשים לב לנוכחותה של תשובה (4) שלפיה אי-אפשר לדעת מה היחס.

בשל הסיכוי שהיחס שמצאנו הוא מקרה פרטי, נערוך הצבה נוספת:

נציב כי גילו של גד הוא 5 ולפיכך סכום הגילים של השלושה הוא 15 ($3 \cdot 5$) וסכום הגילים של ציון ואלה הוא 10 ($15 - 10$). נציב בתור גילו של ציון 6 ובהתאם בתור גילה של אלה 4 ($10 - 6$).

ההפרש בין הגיל של ציון לגיל של גד הוא 1 ($6 - 5$).

ההפרש בין הגיל של גד לגיל של אלה הוא 1 ($5 - 4$).

גם במקרה זה היחס הוא 1 ולכן ניתן להניח שהתשובה הנכונה היא (1).

דרך ג' – פתרון מתמטי
נציב משתנים בעבור הגילים השונים ונבטא את הקשר ביניהם באמצעות משוואה.
נציב בתור גילו של ציון Z, גילו של גד G וגילה של אלה E. ממוצע הגילים שווה לגילו של גד:

$$\frac{Z+G+E}{3}=G$$

נייצר מכנה משותף 3:

$$Z+G+E=3G$$

נבודד את גילו של ציון במטרה להציב אותו בביטוי שעליו נשאלנו:

$$Z=2G-E$$

כעת נכתוב את הביטוי שעליו נשאלנו באופן אלגברי:

$$\frac{\text{ההפרש בין הגיל של ציון לגיל של גד}}{\text{ההפרש בין הגיל של גד לגיל של אלה}}=\frac{Z-G}{G-E}=?$$

נציב את הגיל של ציון שמצאנו לעיל בביטוי הנ"ל:

$$\frac{Z-G}{G-E}\quad\Rightarrow\quad\frac{(2G-E)-G}{G-E}=\frac{G-E}{G-E}=1$$

כלומר, היחס שווה 1.

---

9. תשובה (4) נכונה. שאלה 13 מתוך 20 בפרק.

נתון שהממוצע של 15, a ו-b גדול מהממוצע של 20 ו-a. נבטא קשר זה באופן אלגברי:

$$\frac{a+20}{2}<\frac{15+a+b}{3}$$

ניצור מכנה משותף 6 (על ידי כפל בהצלבה):

$$3\cdot(a+20)<2\cdot(15+a+b)$$
$$3a+60<30+2a+2b$$

בתשובות מופיעים אי-שוויונות אשר בחלקם a מבודד ובחלקם b. נראה שנוח יותר לבודד את a ולכן נסדר אגפים:

$$a<2b-30$$

הגענו לאי-שוויון הכתוב בתשובה (4) ועל כן זו התשובה הנכונה.

---

10. תשובה (3) נכונה. שאלה 14 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הצבת מספרים
נתון ש-M הוא הממוצע של x, y ו-z. כמו כן, נתון: $x < M < z$. נציב מספרים המקיימים את הנתונים ונפסול תשובות שסותרות אותם.

x צריך להיות קטן מ-z. נציב: $x=0$, $z=10$.
כדי שהממוצע של שלושת הנעלמים יהיה גדול מ-x וקטן מ-z, נציב בתור y ערך אשר נמצא בין שני הנעלמים.
למשל: $y=2$. נחשב את ערכו של M:

$$M=\frac{0+2+10}{3}=4$$

4 אכן גדול מ-x (0) וקטן מ-z (10). לפיכך, המספרים שהצבנו עומדים בנתונים.

כעת, נציב גם בתשובות $x=0$, $y=2$, $z=10$, ונחפש טענה נכונה בהכרח. נשים לב שמכיוון שהשתמשנו בהצבת מספרים במקום הנעלמים, עלינו לפסול 3 תשובות בטרם נוכל לסמן תשובה נכונה:

<u>נבדוק את תשובה (1):</u>

הממוצע של x ו-z הוא y. הממוצע של x ו-z הוא 5 $\left(\frac{10+0}{2}\right)$, ואילו $y = 2$. ערכים אלה אינם שווים, התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (2):</u>

הממוצע של x ו-z קטן מ-y. כאמור לעיל, הממוצע של x ו-z הוא 5, ו-$y = 2$. 5 גדול מ-2 ולא קטן ממנו, התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (3):</u>

הממוצע של x ו-y קטן מ-z. הממוצע של x ו-y הוא 1 $\left(\frac{0+2}{2}\right)$, $z = 10$. **מתאים.**

<u>נבדוק את תשובה (4):</u>

הממוצע של y ו-z קטן מ-x. הממוצע של y ו-z הוא 6 $\left(\frac{2+10}{2}\right)$ ו-$x = 0$. 6 גדול מ-0 ולא קטן ממנו, התשובה נפסלת.

פסלנו 3 תשובות ועל כן תשובה (3) נכונה.

דרך ב' – הבנת הממוצע

M הוא הממוצע של x, y ו-z ונתון ש-M קטן מ-z. כלומר, z גדול מהממוצע של שלושת המשתנים. לפיכך, אם נוציא את z מהקבוצה של שלושת המשתנים ונחשב את הממוצע של x ו-y בלבד, הממוצע יקטן (שכן הסרנו איבר ש"משך" את הממוצע כלפי מעלה). כלומר, הממוצע של x ו-y קטן מהממוצע של x, y ו-z.
על כן, אם z גדול מהממוצע של x, y ו-z, הוא בהכרח גדול מהממוצע של x ו-y.

דרך ג' – פתרון מתמטי

נתון ש-M הוא הממוצע של x, y ו-z. נתאר קשר זה באמצעות משוואה:

$$\frac{x+y+z}{3} = M$$

כמו כן, נתון: $x < M < z$. נציב את ערכו של M שמצאנו לעיל באי-שוויון:

$$x < M < z \quad \Rightarrow \quad x < \frac{x+y+z}{3} < z$$

נכפול את כל אגפי האי-שוויון פי 3:

$$3x < x + y + z < 3z$$

כעת נפצל את אי-השוויון. מכיוון שברוב התשובות נטען כי הממוצע של x ונעלם נוסף <u>קטן</u> מהנעלם השלישי, נתחיל בפיצול האי-שוויון כך ש-x יהיה באגף הקטן:

$$x + y + z < 3z$$

נעביר את z אגף:

$$x + y < 2z$$

כאמור, התשובות משוות בין הממוצע של x ונעלם נוסף לנעלם השלישי. כדי להגיע לממוצע של x ו-y, נחלק ב-2:

$$\frac{x+y}{2} < z$$

לפיכך, הממוצע של x ו-y בהכרח קטן מ-z.

11. תשובה (3) נכונה. שאלה 14 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הצבת מספרים במקום נעלמים

נתון שהממוצע של a ו-b הוא 2a. נציב $a = 1$. הממוצע של שני המספרים צריך להיות 2 ($2a = 2 \cdot 1$). הממוצע הוא נקודת האיזון בין האיברים. אם a קטן מהממוצע ב-1, b צריך להיות גדול ממנו ב-1. על כן, $b = 3$.

כעת, נציב בתשובות $b = 3$ ונחפש תשובה השווה ל-2 (הממוצע של a ו-b). נשים לב שמכיוון שהשתמשנו בהצבת מספרים במקום הנעלמים, עלינו לפסול 3 תשובות בטרם נוכל לסמן תשובה נכונה.

(1) $b \Rightarrow 3$ $\Rightarrow$ לא מתאים, התשובה נפסלת

(2) $2 \cdot b \Rightarrow 2 \cdot 3 = 6$ $\Rightarrow$ לא מתאים, התשובה נפסלת

(3) $\frac{2}{3}b \Rightarrow \frac{2}{3} \cdot 3 = 2$ $\Rightarrow$ **מתאים**

(4) $\frac{1}{2}b \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot 3 = 1\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ לא מתאים, התשובה נפסלת

פסלנו 3 תשובות ועל כן תשובה (3) נכונה.

דרך ב' – פתרון מתמטי

נתון שהממוצע של a ו-b שווה ל-2a. עלינו לבטא את הממוצע של a ו-b באופן נוסף, לפי התשובות נבין כי עלינו לבטא את הממוצע באמצעות b. תחילה, נתאר את הקשר הנתון באופן אלגברי:

$$\frac{a+b}{2} = 2a$$

מכיוון שעלינו לבטא את הממוצע באמצעות b בלבד, נבודד את a ונבטא אותו באמצעות b. נכפול את שני האגפים פי 2:

$$a + b = 4a$$

נעביר את a אגף:

$$b = 3a$$

נחלק ב-3:

$$\frac{b}{3} = a$$

כעת נחשב את הממוצע של b ושל $\frac{b}{3}$:

$$\frac{\frac{b}{3} + b}{2} = \frac{\frac{b}{3} + \frac{3b}{3}}{2} = \frac{\frac{4b}{3}}{2}$$

ניעזר בקשתות:

$$\frac{\frac{4b}{3}}{\frac{2}{1}} = \frac{4b}{6} = \frac{2b}{3}$$

.12 תשובה (4) נכונה. שאלה 14 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הצבת מספרים

נתון: $a \le b \le c$. נוסף על כך, ידוע כי הממוצע של a, b ו-c הוא a. עתה, נבחר הצבת מספרים המקיימת את הנתונים הללו ונמצא שההצבה הפשוטה ביותר היא: $a = b = c = 1$. הממוצע של 1, 1 ו-1 הוא כמובן 1.

כעת, נציב בתשובות $a = b = c = 1$ ונפסול כל תשובה שאינה מתקיימת בהצבה זו. נשים לב שמכיוון שהשתמשנו בהצבת מספרים במקום הנעלמים, עלינו לפסול 3 תשובות בטרם נוכל לסמן תשובה נכונה.

(1) $a = 0 \Rightarrow 1 = 0$ $\Rightarrow$ לא מתאים, התשובה נפסלת

(2) $c < 0 \Rightarrow 1 < 0$ $\Rightarrow$ לא מתאים, התשובה נפסלת

(3) $b + c = a \Rightarrow 1 + 1 = 1$ $\Rightarrow$ לא מתאים, התשובה נפסלת

(4) $c = a \Rightarrow 1 = 1$ $\Rightarrow$ **מתאים**

פסלנו 3 תשובות ועל כן תשובה (4) נכונה.

דרך ב' – הבנה

נתון שהממוצע של a, b ו-c הוא a. כמו כן, נתון: $a \le b \le c$. כלומר, a גדול או שווה ליתר האיברים. כידוע, הממוצע חייב להיות בין האיבר הקטן לגדול. אם a הוא האיבר הגדול ביותר, לא ייתכן שהממוצע שווה לו. לפיכך, כל האיברים בהכרח שווים ל-a, כלומר: $a = b = c$.

.13 תשובה (2) נכונה. שאלה 14 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – פתרון מתמטי

התבצעו 3 זריקות שהממוצע שלהן הוא 4. עלינו למצוא את תוצאת הזריקה השנייה.

נתון שממוצע 2 הזריקות הראשונות היה 3, ושממוצע 2 הזריקות האחרונות היה 4. לפי נוסחת הממוצע אנו יודעים כי *סכום האיברים = מספר האיברים · ממוצע*. ניעזר בנוסחה זו כדי להבין את גדלי האיברים.

ממוצע 3 הזריקות הוא 4 ועל כן סכומן הוא 12 ($3 \cdot 4$). ממוצע 2 הזריקות הראשונות הוא 3 ולכן סכומן הוא 6 ($2 \cdot 3$). לפיכך, תוצאת הזריקה האחרונה היא 6, שכן היא צריכה להשלים את 2 הזריקות הראשונות לסכום הכולל של 3 הזריקות ($12 - 6$).

ממוצע 2 הזריקות האחרונות הוא 4, על כן סכומן הוא 8 ($2 \cdot 4$). מצאנו שתוצאת הזריקה האחרונה היא 6 ולכן תוצאת הזריקה השנייה היא 2 ($8 - 6$).

דרך ב' – הצבת תשובות

<u>נבדוק את תשובה (1)</u>: לפי תשובה זו, תוצאת הזריקה השנייה הייתה 6.

נתון כי הממוצע של שתי הזריקות הראשונות היה 3, ועל כן סכומן צריך להיות 6 (לפי נוסחת הממוצע *סכום האיברים = מספר האיברים · ממוצע*). תוצאת הזריקה השנייה לבדה היא 6, ועל כן תוצאת הזריקה הראשונה הייתה צריכה להיות 0. הדבר בלתי אפשרי (הפאות ממוספרות מ-1 עד 6), ועל כן התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (2)</u>: לפי תשובה זו, תוצאת הזריקה השנייה הייתה 2.
נתון כי הממוצע של שתי הזריקות הראשונות היה 3, ועל כן סכומן צריך להיות 6 (לפי נוסחת הממוצע *סכום האיברים = מספר האיברים · ממוצע*). תוצאת הזריקה השנייה היא 2, ועל כן תוצאת הזריקה הראשונה צריכה להיות 4.
ממוצע 2 הזריקות האחרונות הוא 4, על כן סכומן הוא 8 (2 · 4). תוצאת הזריקה השנייה היא 2, ועל כן תוצאת הזריקה האחרונה צריכה להיות 6.
כלומר, לפי תשובה זו, תוצאות שלוש הזריקות היו 6, 2, 4. ניתן לזהות כי אכן הממוצע של 3 הזריקות היה 4 (נקודת האיזון). ניתן לחשב זאת גם לפי הנוסחה: $\text{ממוצע} = \frac{\text{סכום האיברים}}{\text{מספר האיברים}}$

$$\frac{4+2+6}{3} = \frac{12}{3} = 4$$

מכאן שתשובה זו תואמת את נתוני השאלה, ועל כן זו **התשובה הנכונה**.

טיפ: מכיוון שהצבנו את התשובות, ברגע שמצאנו תשובה נכונה אין צורך להמשיך לבדוק את שאר התשובות, אך למען שלמות ההסבר נפסול אותן:

<u>נבדוק את תשובה (3)</u>: לפי תשובה זו, תוצאת הזריקה השנייה הייתה 3.
נתון כי הממוצע של שתי הזריקות הראשונות היה 3. תוצאת הזריקה השנייה היא 3, ועל כן תוצאת הזריקה הראשונה צריכה להיות גם היא 3.
ממוצע 2 הזריקות האחרונות הוא 4, על כן סכומן הוא 8 (2 · 4). תוצאת הזריקה השנייה היא 3, ועל כן תוצאת הזריקה האחרונה צריכה להיות 5.
כלומר, לפי תשובה זו, תוצאות שלוש הזריקות היו 5, 3, 3. ניתן לזהות כי הממוצע של 3 הזריקות אינו 4. נחשב זאת גם לפי הנוסחה: $\text{ממוצע} = \frac{\text{סכום האיברים}}{\text{מספר האיברים}}$

$$\frac{3+3+5}{3} = \frac{11}{3}$$

התשובה אינה תואמת את נתוני השאלה, ועל כן התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (4)</u>: לפי תשובה זו, תוצאת הזריקה השנייה הייתה 4.
נתון כי הממוצע של שתי הזריקות הראשונות היה 3, ועל כן סכומן צריך להיות 6 (לפי נוסחת הממוצע *סכום האיברים = מספר האיברים · ממוצע*). תוצאת הזריקה השנייה היא 4, ועל כן תוצאת הזריקה הראשונה צריכה להיות 2.
ממוצע 2 הזריקות האחרונות הוא 4. תוצאת הזריקה השנייה היא 4, ועל כן תוצאת הזריקה האחרונה צריכה להיות גם היא 4.
כלומר, לפי תשובה זו, תוצאות שלוש הזריקות היו 4, 4, 2. ניתן לזהות כי הממוצע של 3 הזריקות אינו 4. נחשב זאת גם לפי הנוסחה: $\text{ממוצע} = \frac{\text{סכום האיברים}}{\text{מספר האיברים}}$

$$\frac{2+4+4}{3} = \frac{10}{3}$$

התשובה אינה תואמת את נתוני השאלה, ועל כן התשובה נפסלת.

.14 תשובה (3) נכונה. שאלה 17 מתוך 20 בפרק.

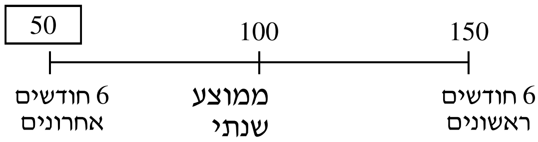
כדי למצוא את הערך המקסימלי של אחד האיברים, נניח שהממוצע גדול ככל הניתן – 10. אם הממוצע של 4 איברים הוא 10, סכומם 40 (4 · 10).
כאמור, אנו מחפשים את הערך הגבוה ביותר האפשרי לאיבר אחד. לשם כך, נקטין את יתר האיברים ככל הניתן.
נתון שכל האיברים שלמים וחיוביים ומכאן שהאיבר הקטן ביותר האפשרי הוא 1. אם כל שלושת האיברים האחרים יהיו שווים ל-1, האיבר הרביעי והגדול ביותר יהיה שווה ל-37
(1 – 1 – 1 – 40).

---

15. תשובה (3) נכונה. שאלה 18 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הממוצע כנקודת איזון

הממוצע השנתי הוא נקודת האיזון בין הממוצע של חציה הראשון של השנה לבין הממוצע של חציה האחרון. נציב את הנתונים על ציר המספרים ונגלה שממוצע הגשמים בחציה האחרון של השנה הוא 50 מ״מ לחודש.



כעת נתמקד ב-6 החודשים האחרונים של השנה. כאמור, ממוצע הגשמים שירד בחודש במהלך החודשים הללו הוא 50 מ״מ. בסך הכול, במהלך החודשים הללו ירדו 300 מ״מ גשם (6 · 50). מכיוון שאנו מחפשים את כמות הגשם המקסימלית שירדה בחודש דצמבר, נניח שכל הגשם שירד בחצי השני של השנה ירד אך ורק בחודש דצמבר. כלומר, בחודש דצמבר ירדו לכל היותר 300 מ״מ גשם.

דרך ב' – סכום האיברים

נתון שלאורך כל שנת 1960 ירדו בממוצע 100 מ״מ גשם בחודש. בשנה 12 חודשים ועל כן בסך הכול ירדו 1,200 מ״מ גשם לאורך השנה (12 · 100).

ב-6 החודשים הראשונים ירדו בממוצע 150 מ״מ גשם בחודש. לכן, בסך הכול לאורך 6 החודשים הראשונים של השנה ירדו 900 מ״מ גשם (6 · 150).

כאמור, בכל השנה ירדו 1,200 מ״מ גשם ובחצי השנה הראשונה ירדו 900 מ״מ גשם, על כן בחצי האחרון של השנה ירדו 300 מ״מ נוספים (900 − 1,200). כדי להבין כמה מ״מ גשם ירדו לכל היותר בחודש דצמבר, נניח שבכל 5 החודשים הנותרים לא ירד גשם כלל. כלומר, כל כמות הגשם שירדה בחצי השנה האחרונה ירדה אך ורק בחודש דצמבר, היינו 300 מ״מ.

16. תשובה (1) נכונה. שאלה 18 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הצבת מספרים

נתון שממוצע מספר הבולים של גלעד ונגה גדול ב-8 מממוצע מספר הבולים של גלעד וראובן. מכיוון שלגלעד וראובן יש פחות בולים, נבחר להציב מספר במקום מספר הבולים שלהם (משיקולי נוחות).

נציב כי גם לגלעד וגם לראובן יש רק בול אחד. לפיכך ממוצע הבולים שלהם הוא 1.

ידוע כי ממוצע הבולים של גלעד ונגה גדול ב-8 ממוצע הבולים של גלעד וראובן (1), קרי 9.

כעת, ניעזר בתכונתו של הממוצע כנקודת איזון כדי להבין כמה בולים יש לנגה. לגלעד יש בול אחד, שהוא 8 בולים פחות מהממוצע (9). על כן, לנגה יש 8 בולים יותר מהממוצע, כלומר 17 בולים (8 + 9).

מספר הבולים של נגה (17) גדול ב-16 ממספר הבולים של ראובן (1).
מפני שאין אף תשובה נוספת המתאימה להצבות שהצבנו, תשובה (1) היא הנכונה.

דרך ב' – פתרון מתמטי

נציב בתור מספר הבולים של גלעד G, נגה N וראובן R.
עתה, נבטא את ממוצע הבולים של גלעד ונגה:

$$\frac{G+N}{2}$$

ואת ממוצע הבולים של גלעד וראובן:

$$\frac{G+R}{2}$$

ידוע שממוצע מספר הבולים של גלעד ונגה גדול ב-8 מממוצע מספר הבולים של גלעד וראובן. נבנה משוואה באמצעות עקרון "תן למסכן" ונוסיף 8 לממוצע של גלעד וראובן:

$$\frac{G+N}{2}=\frac{G+R}{2}+8$$

ניצור מכנה משותף 2:

$$G+N=G+R+16$$

נעביר את G אגף:

$$N=R+16$$

כלומר, מספר הבולים של נגה גדול ב-16 ממספר הבולים של ראובן.

---

17. תשובה (2) נכונה. שאלה 18 מתוך 20 בפרק.

ידוע לנו שהועבר תלמיד מסוים מקבוצה א' לקבוצה ב' וכך הוריד את הממוצע של שתי הקבוצות. ראשית, נמצא את הממוצע של כל אחת מהן:

קבוצה א' -

$$\frac{4+4+5+7}{4}=\frac{20}{4}=5$$

קבוצה ב' - אין צורך לחשב כיוון שזו קבוצה סימטרית ולכן הממוצע נמצא בדיוק באמצע - 7.5

כדי שהתלמיד שיעזוב את קבוצה א' יוריד את הממוצע שלה, עליו להיות בעל ציון גבוה מהממוצע. הציון היחיד הגבוה מהממוצע בקבוצה זו הוא 7. אם נעביר תלמיד זה לקבוצה ב' הוא אכן יוריד את הממוצע שלה, שכן הממוצע הוא 7.5 וציונו נמוך ממנו.

---

18. תשובה (3) נכונה. שאלה 18 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – פתרון מתמטי

נתרגם את הנתונים לכתיב אלגברי, בעזרת הנוסחה לחישוב ממוצע: ממוצע = $\frac{\text{סכום האיברים}}{\text{מספר האיברים}}$

הממוצע של המספרים a, b ו-12 הוא: $\frac{a+b+12}{3}$

הממוצע של המספרים b, c ו-15 הוא: $\frac{b+c+15}{3}$

נתון שהממוצע הראשון גדול מהשני ב-2, לכן על מנת להשוות ביניהם נוסיף לממוצע השני 2 ("תן למסכן").

$$\frac{a+b+12}{3}=\frac{b+c+15}{3}+2$$

ניצור מכנה משותף:

$$a+b+12=b+c+15+6$$

אנו רוצים להגיע לביטוי $a-c$, לכן נעביר את c לאגף שמאל ואת האיברים האחרים לאגף ימין:

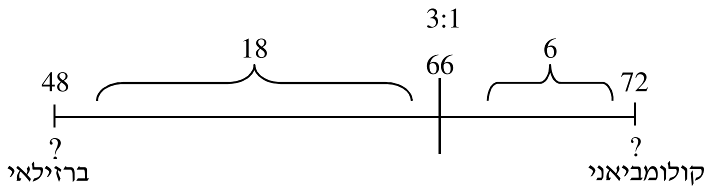
$$a-c=b+15+6-12-b=9$$

---

19. תשובה (4) נכונה. שאלה 19 מתוך 20 בפרק.

לפנינו שאלת ממוצע משוקלל, ניתן לחשב את הממוצע באמצעות נוסחת הממוצע או באמצעות שיטת הנדנדה.

שיטת הנדנדה:



המרחק בין 48 ל-66 הוא 18 והמרחק בין 66 ל-72 הוא 6. לפיכך, מרחק הממוצע מהקפה הברזילאי גדול פי 3 מהמרחק של הקפה הקולומביאני מהממוצע. ולכן היחס בין הקבוצות הוא 3:1.

נוסחת הממוצע:

כאמור לעיל, מחיר התערובת מהווה ממוצע משוקלל בין מחירי סוגי הקפה השונים. נציב בתור משקל הקפה הקולומביאני C ומשקל הקפה הברזילאי B. כעת נחשב את הממוצע לפי הנוסחה לחישוב ממוצע משוקלל:

$$\frac{72\cdot C+48\cdot B}{C+B}=66$$

נכפול את שני אגפי המשוואה ב-(C + B):

$$72C+48B=66C+66B$$

נסדר אגפים:

$$72C-66C=66B-48B$$

$$6C=18B$$

נחלק ב-3:

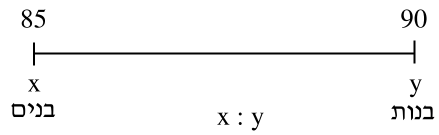
$$C=3B$$

אם C גדול מ-B פי 3, היחס בין משקל הקפה הקולומביאני למשקל הקפה הברזילאי הוא 1 : 3.

---

20. תשובה (4) נכונה. שאלה 20 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – ממוצע משוקלל
לפנינו שאלת ממוצע משוקלל. נציב את הנתונים שיש לנו על הסכמה של הנדנדה:



נתון כי בכיתה x בנים ו-y בנות. ממוצע הציונים של הבנים הוא 85 ושל הבנות 90. מההכרות שלנו עם הסכמה של הנדנדה אנו יודעים כי הואיל ונדע את היחס בין x ל-y נוכל לקבוע כמה קפיצות לצייר והיכן למקם את הממוצע. מתוך כך, ברור שתשובה (4) היא הנכונה שכן היא נותנת לנו את היחס בין קבוצת הבנים (x) לקבוצת הבנות (y).

דרך ב' – הצבת מספרים
נתון כי בכיתה x בנים ו-y בנות. ממוצע הציונים של הבנים הוא 85 ושל הבנות 90. עלינו לקבוע איזה מהערכים שבתשובות יאפשר לנו לחשב את הממוצע הכיתתי. ממוצע זה הוא למעשה הממוצע המשוקלל של ציוני התלמידים, כיוון שישנן שתי קבוצות ולכל אחת מהן משקל שונה.

כדי לחשב את הממוצע הכיתתי, עלינו לדעת כמה בנים וכמה בנות בכיתה. כך, נוכל לדעת מה השפעתה היחסית של כל קבוצה על הממוצע הכולל. לחילופין, מספיק לנו לדעת את היחס בין מספר התלמידים בכל קבוצה כדי לקבוע מה השפעתה היחסית של כל קבוצה על הממוצע. למשל, אם היינו יודעים שבכיתה 20 בנים ו-10 בנות, היינו מחשבים את הממוצע כך:

$$\frac{20 \cdot 85 + 10 \cdot 90}{20 + 10}$$

באותו אופן, אם היינו יודעים כי יש בכיתה פי 2 יותר בנים מאשר בנות, היינו מחשבים את הממוצע כך:

$$\frac{2 \cdot 85 + 1 \cdot 90}{2 + 1}$$

בשני המקרים התוצאה כמובן זהה. לפיכך, תשובה (4) נכונה.

הספק

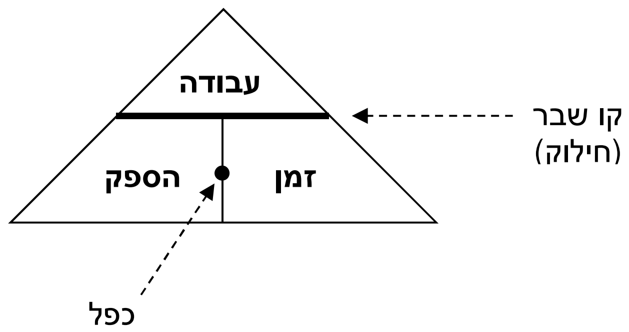
כאשר מדברים על הספק, תמיד בצמוד לכמות (העבודה) יהיה הזמן שלקח לעשותה.
כאשר מצוינת כמות ללא זמן - זו עבודה.

הספק - מה שאני **<u>מספיק</u>** לעשות **<u>בזמן</u>** מסוים.

נוסחת ההספק היא:

עבודה = זמן x הספק

<u>שינוי נושא נוסחה</u>
כאשר נתונים לנו שני פרמטרים מתוך שלושת הפרמטרים המופעים בנוסחה, ניתן תמיד למצוא את השלישי באמצעות סרטוט הפרמידה:



על מנת למצוא את הגורם החסר, מסתירים אותו ומבצעים כפל או חילוק, בהתאם למה שנשאר, למשל:

$$\text{הספק} = \frac{\text{עבודה}}{\text{זמן}} \qquad \text{זמן} = \frac{\text{עבודה}}{\text{הספק}} \qquad \text{עבודה} = \text{זמן} \cdot \text{הספק}$$

דוגמה:
גידי מקפיץ 8 טקילות בשתי דקות.

העבודה של גידי היא 8 טקילות.
הזמן של גידי הוא 2 דקות.
ההספק של גידי הוא 8 טקילות ב-2 דקות, או 4 טקילות בדקה.

הספק מביע עבודה ביחידת זמן, ולכן **<u>הספק תמיד יופיע כשבר!</u>**

$$\text{הספק} = \frac{\text{עבודה}}{\text{זמן}} = \frac{8}{2} = \frac{4}{1}$$

הספק - יחסים זהים

הדרך הנוחה והמהירה ביותר לפתור את רוב שאלות ההספק היא באמצעות יחסים זהים.

דוגמה:
יובל אוכל x נקניקיות ב-y דקות. בהנחה שהספקו קבוע, כמה נקניקיות יאכל יובל ב-3y דקות אם יגביר את קצב אכילתו פי 2?

פתרון -
נפתור בעזרת טבלת יחסים:

2x נקניקיות	←	y דקות
?	→	3y דקות

הזמן גדל פי 3 ולכן גם העבודה צריכה לגדול פי 3 ← 6x

הספק משותף

הספק משותף הוא חיבור הספקים של מספר "פועלים".
אם אחד הפועלים עובד הפוך לשאר, נחסר את הספקו מהשאר.

דוגמה:
חלי שותה חבית בירה ב-3 שעות וראובן שותה חבית בירה בשעתיים.
בהנחה שכל אחד מהם שותה בקצב קבוע, בכמה זמן יסיימו שניהם יחד חבית בירה אחת?

פתרון -

<u>דרך א' - השוואת זמנים</u>
הדרך הנוחה והאינטואיטיבית יותר לחבר הספקים של שני פועלים היא באמצעות השוואת זמנים.

נשווה זמנים בין חלי וראובן (נמצא את ההספק שלהם ב-6 שעות):

<u>חלי</u>

1 חבית	←	3 שעות
$\boxed{\text{2 חביות}}$	→	6 שעות

<u>ראובן</u>

1 חבית	←	2 שעות
$\boxed{\text{3 חביות}}$	→	6 שעות

מצאנו כי יחד הם שותים 5 חביות ב-6 שעות, ולכן הם ישתו חבית אחת ב- $\frac{6}{5}$ שעות, שהם שעה אחת ו-12 דקות.

<u>דרך ב' - נוסחה</u>

דוגמה:
צינור אחד מסוגל למלא בריכה ב-6 שעות, או לרוקן אותה ב-9 שעות. בשעה 08:00 נפתחו 2 צינורות אשר ממלאים את הבריכה וצינור אחד אשר מרוקן את הבריכה. באיזו שעה תתמלא הבריכה?

פתרון -
נמצא תחילה את ההספק המשותף של כל שלושת הצינורות. מכיוון שהצינור השלישי מרוקן את הבריכה, נחסר את הספקו מהספק שני הצינורות האחרים:

$$\overbrace{\frac{1}{6}}^{\text{צינור א}} + \overbrace{\frac{1}{6}}^{\text{צינור ב}} - \overbrace{\frac{1}{9}}^{\text{צינור ג}} = \overbrace{\frac{3+3-2}{18}}^{\text{הספק משותף}} = \frac{4}{18} = \frac{2}{9}$$

מצאנו כי ההספק המשותף של שלושת הצינורות הוא 2 בריכות ב-9 שעות, או, בריכה אחת ב- $4\frac{1}{2}$ שעות. הבריכה תתמלא בשעה 12:30.

שאלות צוות

בשאלות אלו מדובר על מספר פועלים המבצעים עבודה מסוימת בקצב זהה וקבוע, ועלינו למצוא מה קורה כאשר אחד הנתונים משתנה.

דוגמה:
4 נגרים העובדים בקצב זהה וקבוע מייצרים 20 כסאות ב-3 שעות. כמה זמן יקח ל-6 נגרים העובדים בקצב זהה לייצר 60 כסאות?

פתרון -

<u>דרך א' - שיטת ה-V</u>

נציב את הנתונים בטבלת: **צוות - עבודה - זמן** ונסמן V בין הנתונים:

<u>צוות</u>	<u>עבודה</u>	<u>זמן</u>
4	20	3
6	60	?

על מנת למצוא את הנתון החסר, פשוט נכפול בין המספרים המחוברים בקו, ונחלק במספרים שנשארו:

$$x = \frac{3 \cdot 60 \cdot 4}{20 \cdot 6} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 6} = \frac{36}{6} = 6$$

הערה - תמיד נצייר את ה-V כך שיחבר בין 3 מספרים.

דרך ב' - יחסים

נציב את הנתונים בטבלת: **צוות - עבודה - זמן**

צוות	עבודה	זמן
4	20	3
6	60	?

כעת נבדוק מה קורה לזמן כאשר אנו משנים את כל אחד מהנתונים.
מכיוון שהעבודה גדלה מ-20 ל-60, הרי שגם הזמן צריך לגדול פי 3.
מכיוון שמספר הפועלים גדל מ-4 ל-6 (פי 1.5), הרי שהזמן צריך לקטון פי 1.5.
נבצע את השינויים על הזמן המקורי:

$$3 \cdot 3 : 1.5 = 9 : \frac{3}{2} = 9 \cdot \frac{2}{3} = \frac{18}{3} = 6$$

זמן עבודה

זמן עבודה הוא הזמן הדרוש לפועל אחד לסיים את העבודה לבדו.

זמן עבודה = זמן X מספר פועלים

דוגמה:
סלילתו של כביש נערכה באופן הבא: ב-10 ימים הראשונים עבדו 20 פועלים, וב-10 הימים שלאחר מכן עבדו 15 פועלים.
בהנחה שכל הפועלים עובדים בקצב זהה וקבוע, כמה ימים ידרשו לפועל אחד לסלול את הכביש לבדו?

פתרון -
עלינו למצוא את זמן העבודה שהושקע בסלילת הכביש.
ב-10 ימים הראשונים עבדו 20 פועלים ולכן הושקעו 200 ימי עבודה.
ב-10 ימים שלאחר מכן עבדו 15 פועלים ולכן הושקעו 150 ימי עבודה.
בסך הכל הושקעו בסלילת הכביש 350 ימי עבודה, וזה גם הזמן שיידרש לפועל אחד לסיים את סלילת הכביש לבדו.

תרגול שאלות מבחינות אמת

1. ציפי חותכת 3 מלפפונים ב-5 דקות.
שלמה חותך 4 עגבניות ב-7 דקות.
במשך 35 דקות, ציפי חתכה מלפפונים ושלמה חתך עגבניות.

כמה מלפפונים ועגבניות (בסך הכול) חתכו ציפי ושלמה?

(1) 60 (2) 52 (3) 45 (4) 41

---

2. פועל א' מייצר x כיסאות בשעה. הספקו של פועל ב' כפול מהספקו של פועל א'.

כמה כיסאות מייצר פועל ב' ב-3 שעות?

(1) $\frac{x}{6}$ (2) $\frac{2}{3}x$ (3) $\frac{3}{2}x$ (4) $6x$

---

3. רועי הסַפָּר מספר גברים בקצב קבוע של 5 גברים בשעה.
הוא מספר נשים בקצב קבוע של 3 נשים בשעה.

בכמה זמן יספר רועי 2 גברים ו-4 נשים?

(1) שעה ו-20 דקות
(2) שעה ו-24 דקות
(3) שעה ו-40 דקות
(4) שעה ו-44 דקות

---

4. פועלים קוטפים תפוזים בקצב שווה וקבוע.
נסמן: x = מספר התפוזים ש-5 פועלים קוטפים בשעה
y = מספר התפוזים ש-3 פועלים קוטפים בשעה

נתון: $x = y + 60$

כמה תפוזים קוטף פועל אחד בשעה?

(1) 10 (2) 20 (3) 30 (4) 40

---

5. 3 פקידים ממלאים 10 טפסים ב-4 דקות.

כמה דקות יידרשו ל-2 פקידים כדי למלא 20 טפסים, בהנחה שקצב העבודה של כל הפקידים קבוע ושווה?

(1) 10 (2) 12 (3) $6\frac{1}{2}$ (4) $7\frac{1}{2}$

פתרתי ____________ שאלות ב ____________ דקות, ____________ תשובות נכונות

6. מכונה מייצרת 600 קופסאות בשעה. אדם מייצר קופסה ב-10 דקות.

כמה אנשים צריכים לעבוד יחד כדי שהספקם ישתווה להספק המכונה?

(1) 100 (2) 60 (3) 10 (4) 600

---

7. 3 ברזים שהספקם שווה ממלאים יחד בְרֵכה ב-5 שעות. אם נוסיף ברז רביעי שהספקו **פי שניים** מההספק של כל אחד מ-3 הברזים האחרים, כמה שעות יידרשו כדי למלא את הבְרֵכה על ידי ארבעת הברזים?

(1) 1 (2) 1.5 (3) 3 (4) 4.5

---

8. 4 פועלים יכולים לבצע את עבודה א' ב-9 ימים.
6 פועלים יכולים לבצע את עבודה ב' ב-10 ימים.
קצב העבודה של כל הפועלים זהה.

בכמה ימים יכולים 12 פועלים לבצע את שתי העבודות?

(1) 6
(2) 2
(3) 8
(4) 4

---

9. ורדה תופרת ביום אחד או 30 חצאיות פשוטות או 10 חצאיות מסוגננות.
לאורך מספר ימים רצופים תפרה ורדה 60 חצאיות פשוטות ו-60 חצאיות מסוגננות.

כמה חצאיות, בממוצע ליום, תפרה ורדה בימים אלו?

(1) 12 (2) 15 (3) 18 (4) 20

---

10. מכסחת דשא מכסחת 400 מ"ר של דשא בשעה.
כיסוח עשבים שוטים מקטין פי 2 את הספק המכסחה.

כמה זמן (בשעות) יידרש למכסחה כדי לכסח מגרש עגול של עשבים שוטים שרדיוסו 10 מטרים?

(1) π^2
(2) 2π
(3) $\frac{\pi}{2}$
(4) 4

פתרתי ____________ שאלות ב ____________ דקות, ____________ תשובות נכונות

11. שני ברזים, **א** ו-**ב**, מזרימים מים לבְרֵכה.
ברז **א** ממלא את הבְרֵכה ב-5 שעות.
ברז **ב** ממלא את הבְרֵכה ב-10 שעות.

בכמה שעות ימלאו שני הברזים יחד את הבְרֵכה?

(1) $2\frac{1}{2}$ (2) $2\frac{2}{3}$ (3) 3 (4) $3\frac{1}{3}$

---

12. יוני אוכל x עוגיות ב-y דקות. בכמה דקות יאכל יוני y עוגיות?

(1) $\frac{2y}{x}$ (2) $\frac{x^2}{y}$ (3) $\frac{x}{y}$ (4) $\frac{y^2}{x}$

---

13. 4 פועלים עובדים באותו קצב קבוע וממלאים יחד 5 שקים של תפוחי אדמה בשעה.

כמה זמן יידרש לפועל אחד כדי למלא שק אחד של תפוחי אדמה?

(1) שעה
(2) שעה ו-10 דקות
(3) 56 דקות
(4) 48 דקות

---

14. עכברים א, ב ו-ג מכרסמים יחד קוביית עץ ומכלים אותה ב-4 שעות.
כל אחד מהם מכרסם בקצב קבוע משלו.
עכבר א ועכבר ב מכרסמים יחד קובייה כזו ומכלים אותה ב-8 שעות.

איזה חלק מהקובייה יכרסם עכבר ג בשעה?

(1) $\frac{1}{6}$ (2) $\frac{1}{8}$ (3) $\frac{3}{4}$ (4) $\frac{5}{16}$

---

15. 2 פועלים מיומנים קוטפים בשעה פי 2 תפוזים ממספר התפוזים שקוטפים בשעה 3 פועלים לא מיומנים.

$$? = \frac{\text{מספר התפוזים שקוטף פועל מיומן בשעה}}{\text{מספר התפוזים שקוטף פועל לא מיומן בשעה}}$$

(1) $\frac{5}{2}$ (2) 2 (3) 3 (4) $\frac{2}{3}$

פתרתי ____________ שאלות ב ____________ דקות, ____________ תשובות נכונות

16. בזמן שצביקה צועד 3 צעדים, שלומי צועד 5 צעדים.
אם לצביקה נדרשת $\frac{1}{2}$ שנייה כדי לעשות צעד אחד,
כמה שניות נדרשות לשלומי כדי לעשות צעד אחד?

(1) $\frac{3}{2\cdot 5}$

(2) $\frac{2\cdot 3}{5}$

(3) $\frac{3\cdot 5}{2}$

(4) $\frac{5}{3\cdot 2}$

---

17. M תוכים אוכלים L תולעים בשעה.
D תוכים אוכלים ______ תולעים **בשעתיים**.

(1) $\frac{2DL}{M}$ (2) $\frac{DL}{M}$ (3) $\frac{2L}{DM}$ (4) $\frac{2MD}{L}$

---

18. 3 פועלים עובדים באותו הקצב ומסיימים בניית קיר ב-3 שעות.
אם יצטרף אליהם פועל רביעי (שקצב עבודתו אחר) הם יסיימו את בניית הקיר בשעתיים.
בכמה שעות יבנה הפועל הרביעי לבדו את הקיר?

(1) 3.5
(2) 4.5
(3) 5
(4) 6

---

19. משפחה אחת ממלאת פח זבל ריק ב-8 שעות.
שני חתולים מרוקנים פח זבל מלא ב-3 שעות.
בכמה שעות ירוקן חתול **אחד** את הפחים ששלוש משפחות מילאו ב-24 שעות?

(1) 18
(2) 36
(3) 48
(4) 54

פתרתי ____________ שאלות ב ____________ דקות, ____________ תשובות נכונות

20. אמיר וגדי בונים יחד בית ב-10 ימים. כל אחד מהם עובד בקצב קבוע.
קצב העבודה של אמיר גדול פי 4 מקצב העבודה של גדי.

בכמה ימים יסיים גדי לבנות בית לבדו?

(1) 25 (2) 35 (3) 50 (4) 40

פתרתי ____________ שאלות ב ____________ דקות, ____________ תשובות נכונות

תשובות

שאלה	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
תשובה	4	4	4	3	2	1	3	3	2	3

שאלה	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
תשובה	4	4	4	2	3	1	1	4	4	3

פתרתי 20 שאלות - ______________ נכונות, ______________ אחוזי הצלחה

1. תשובה (4) נכונה. שאלה 2 מתוך 20 בפרק.

עלינו לקבוע כמה מלפפונים ועגבניות חתכו ציפי ושלמה תוך 35 דקות.

ציפי חותכת 3 מלפפונים ב-5 דקות. ב-35 דקות היא תחתוך פי 7 יותר מלפפונים, שכן הזמן גדל פי 7 ולכן עבודתה תגדל פי 7. על כן, ציפי תחתוך 21 מלפפונים ב-35 דקות (7 · 3).

שלמה חותך 4 עגבניות ב-7 דקות. ב-35 דקות הוא יחתוך פי 5 יותר עגבניות, שכן הזמן גדל פי 5 ולכן עבודתו תגדל פי 5. על כן, שלמה יחתוך 20 עגבניות ב-35 דקות (5 · 4).

בסך הכול, שלמה וציפי יחתכו 41 מלפפונים ועגבניות (20 + 21) ב-35 דקות.

<u>ניתן לראות זאת גם בטבלה</u>

ציפי חותכת 3 מלפפונים ב-5 דקות. זהו קצב העבודה הקבוע שלה. עתה, עלינו לחשב כמה מלפפונים תחתוך ציפי ב-35 דקות:

עבודה	זמן	
3	5	
?	35	·7

ניתן לזהות יחס אנכי של פי 7 בין 5 ל-35, ולכן נרחיב גם את 3 פי 7 ⇐ 21.

שלמה חותך 4 עגבניות ב-7 דקות. זהו קצב העבודה הקבוע שלו. עתה, עלינו לחשב כמה מלפפונים יחתוך שלמה ב-35 דקות:

עבודה	זמן	
4	7	
?	35	·5

ניתן לזהות יחס אנכי של פי 5 בין 7 ל-35, ולכן נרחיב גם את 4 פי 5 ⇐ 20.

בסך הכול, שלמה וציפי יחתכו 41 מלפפונים ועגבניות (20 + 21) ב-35 דקות.

.2 תשובה (4) נכונה. שאלה 3 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – יחסים

עלינו לקבוע כמה כיסאות מייצר פועל ב' ב-3 שעות. נתון שהספקו כפול מהספקו של פועל א'. תחילה נבדוק כמה כיסאות מייצר פועל א' ב-3 שעות.

פועל א' מייצר x כיסאות בשעה. הספקו של פועל ב' כפול מהספקו של פועל א'. כלומר, פועל ב' מייצר פי 2 יותר כיסאות מפועל א' באותו פרק זמן. לפיכך, פועל ב' מייצר 2x כיסאות בשעה.
במשך 3 שעות הפועל ייצר פי 3 יותר כיסאות. כלומר, ב-3 שעות ייצר פועל ב' 6x כיסאות ($2x \cdot 3$).

ניתן לחשב את הגדילה במספר הכיסאות באופן מיידי:
הספקו של פועל ב' כפול מזה של פועל א' $\Leftarrow \cdot 2$
כמו כן, הזמן שעבד פועל ב' כפול פי 3 מזה שעבד פועל א' $\Leftarrow \cdot 3$
לפיכך, מספר הכיסאות שייצר פועל ב' כפול פי 6 מזה שייצר פועל א' ($2 \cdot 3$).

דרך ב' – הצבת מספרים

ניתן להציב מספר נוח במקום x. ממבט בתשובות נגלה כי כדאי להציב מספר המתחלק ב-2, ב-3 וב-6:
$x = 6$. על כן, פועל א' מייצר 6 כיסאות בשעה. הספקו של פועל ב' כפול מהספקו של פועל א'. משמע, פועל א' מייצר פי 2 כיסאות בשעה. פועל ב' מייצר 12 כיסאות בשעה ($6 \cdot 2$).
במשך 3 שעות ייצר פועל ב' פי 3 יותר כיסאות מהכמות אותה הוא מייצר בשעה אחת. כלומר, פועל ב' מייצר 36 כיסאות ב-3 שעות ($12 \cdot 3$).

כעת, נציב גם בתשובות $x = 6$ ונחפש תשובה השווה ל-36. נשים לב שמכיוון שהשתמשנו בהצבת מספר במקום הנעלם, עלינו לפסול 3 תשובות בטרם נוכל לסמן תשובה נכונה.

(1) $\frac{x}{6} \Rightarrow \frac{6}{6} = 1 \Rightarrow$ לא מתאים, התשובה נפסלת

(2) $\frac{2}{3}x \Rightarrow \frac{2}{3} \cdot 6 = 4 \Rightarrow$ לא מתאים, התשובה נפסלת

(3) $\frac{3}{2}x \Rightarrow \frac{3}{2} \cdot 6 = 9 \Rightarrow$ לא מתאים, התשובה נפסלת

טיפ: כיוון שפסלנו 3 תשובות, ניתן לסמן את תשובה (4) מבלי לבדוק אותה. למען שלמות ההסבר, נבדוק את נכונותה:

(4) $6x \Rightarrow 6 \cdot 6 = 36 \Rightarrow$ **מתאים**

.3 תשובה (4) נכונה. שאלה 6 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – טבלת יחסים
רועי מספר גברים ונשים בקצב שונה, ועל כן עלינו להתייחס לכל אחד מהמינים בנפרד.

נשים: רועי מספר 3 נשים בשעה, כלומר ב-60 דקות, ועלינו למצוא כמה זמן ייקח לו לספר 4 נשים. נציב בטבלת יחסים.

עבודה		זמן
3	$\Leftarrow$	60 דק'
4	$\Leftarrow$	$\boxed{80}$ דק'

ניתן לראות כי קיים יחס אנכי של פי 20 מ-3 ל-60, לכן גם את 4 נצטרך לכפול ב-20 $\Leftarrow$ 80.

גברים: רועי מספר 5 גברים בשעה, כלומר ב-60 דקות, ועלינו למצוא כמה זמן ייקח לו לספר 2 גברים. נציב בטבלת יחסים.

עבודה		זמן
5	$\Leftarrow$	60 דק'
2	$\Leftarrow$	$\boxed{24}$ דק'

ניתן לראות כי קיים יחס אנכי של פי 12 מ-5 ל-60, לכן גם את 2 נצטרך לכפול ב-12 $\Leftarrow$ 24.

על מנת למצוא את הזמן הכולל, נסכום את הזמנים שמצאנו:

$$80 + 24 = 104$$

כלומר, יידרשו לו 104 דקות, שהן שעה ו-44 דקות.

דרך ב' – מציאת ההספקים
עלינו לקבוע כמה זמן לוקח לרועי לספר 2 גברים ו-4 נשים. לשם כך, נבין כמה זמן לוקח לו לספר כל גבר וכל אישה.

רועי מספר 5 גברים בשעה. על כן, רועי מספר כל גבר ב- $\frac{60}{5}$ דקות $\Leftarrow$ 12 דק'.

רועי מספר 3 נשים בשעה. על כן, רועי מספר כל אישה ב- $\frac{60}{3}$ דקות $\Leftarrow$ 20 דק'.

נחשב כמה זמן ייקח לרועי לספר 2 גברים ו-4 נשים:

$$2 \cdot 12 + 4 \cdot 20 = 24 + 80 = 104$$

104 דקות הן שעה ו-44 דקות.

.4 תשובה (3) נכונה. שאלה 6 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הצבת תשובות
נציב את התשובות ונחשב כמה תפוזים קוטפים 5 עובדים בשעה (x) וכמה תפוזים קוטפים 3 תפוזים בשעה (y).

<u>נבדוק את תשובה (1):</u> אם כל עובד קוטף 10 תפוזים בשעה, אזי 3 עובדים קוטפים 30 תפוזים (10 · 3) בשעה ⇐ $y = 30$. כמו כן, 5 עובדים קוטפים 50 תפוזים בשעה (10 · 5) ⇐ $x = 50$. נציב את ערכי ה-x ו-y שמצאנו במשוואה הנתונה ונראה האם מתקיים פסוק אמת: $30 + 60 \neq 50$. לא מתאים, התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (2):</u> אם כל עובד קוטף 20 תפוזים בשעה, אזי 3 עובדים קוטפים 60 תפוזים (20 · 3) בשעה ⇐ $y = 60$. כמו כן, 5 עובדים קוטפים 100 תפוזים בשעה (20 · 5) ⇐ $x = 100$. נציב את ערכי ה-x ו-y שמצאנו במשוואה הנתונה ונראה האם מתקיים פסוק אמת: $60 + 60 \neq 100$. לא מתאים, התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (3):</u> אם כל עובד קוטף 30 תפוזים בשעה, אזי 3 עובדים קוטפים 90 תפוזים (20 · 3) בשעה ⇐ $y = 90$. כמו כן, 5 עובדים קוטפים 150 תפוזים בשעה (30 · 5) ⇐ $x = 150$. נציב את ערכי ה-x ו-y שמצאנו במשוואה הנתונה ונראה האם מתקיים פסוק אמת: $90 + 60 = 150$. מתאים, **תשובה נכונה.**

טיפ: מכיוון שהצבנו את התשובות, ברגע שמצאנו תשובה נכונה אין צורך להמשיך לבדוק את שאר התשובות, אך למען שלמות ההסבר נפסול את תשובה (4):

<u>נבדוק את תשובה (4):</u> אם כל עובד קוטף 40 תפוזים בשעה, אזי 3 עובדים קוטפים 120 תפוזים (40 · 3) בשעה ⇐ $y = 120$. כמו כן, 5 עובדים קוטפים 200 תפוזים בשעה (40 · 5) ⇐ $x = 200$. נציב את ערכי ה-x ו-y שמצאנו במשוואה הנתונה ונראה האם מתקיים פסוק אמת: $120 + 60 \neq 200$. לא מתאים, התשובה נפסלת.

דרך ב' – הבנה
במשוואה הנתונה נתון כי: $x = y + 60$. כלומר, x גדול מ-y ב-60. תחילה נבין מדוע x בכלל גדול מ-y.
x מבטא את מספר התפוזים שקטפו 5 פועלים במשך שעה, ו-y מבטא את מספר התפוזים שקטפו 3 פועלים במשך שעה. כלומר, הסיבה ש-x גדול מ-y היא שצוות העבודה ב-x גדול בשני פועלים מזה של y. לפיכך ניתן לקבוע ש-2 הפועלים הנוספים שעובדים בצוות של x הם אלו שיצרו את הגדילה במספר התפוזים שנקטפו. כלומר, שני הפועלים הללו קטפו את ההפרש בין x ל-y, דהיינו קטפו 60 תפוזים.
מכאן ניתן למצוא שכל פועל קטף 30 תפוזים.

דרך ג' – פתרון מתמטי
עלינו לקבוע כמה תפוזים קוטף פועל אחד בשעה.

x הוא מספר התפוזים ש-5 פועלים קוטפים בשעה. משמע, פועל אחד קוטף $\frac{x}{5}$ תפוזים בשעה (הצוות קטן פי 5 ולכן העבודה קטנה פי 5).
y הוא מספר התפוזים ש-3 פועלים קוטפים בשעה. משמע, פועל אחד קוטף $\frac{y}{3}$ תפוזים בשעה (הצוות קטן פי 3 ולכן העבודה קטנה פי 3).

איננו יכולים לקבוע בשלב זה כמה תפוזים קוטף פועל אחד בשעה, שכן לא ידוע לנו גודלו של x או גודלו של y. כדי למצוא את הגודל של אחד מנעלמים, נבנה משוואות המתארות את הקשר ביניהם. מצאנו לעיל כי פועל אחד קוטף $\frac{x}{5}$ תפוזים בשעה או $\frac{y}{3}$ תפוזים בשעה. הספק זה זהה. כלומר:

$$\frac{x}{5} = \frac{y}{3}$$

בנוסף, נתונה המשוואה הבאה:

$$x = y + 60$$

ניתן להציב במשוואה הראשונה את ערך x שנתון במשוואה השנייה. כך ניצור משוואה אחת בנעלם אחד ונוכל למצוא את ערכו.

נציב במשוואה הראשונה במקום x ⇐ $y + 60$.

$$\frac{x}{5} = \frac{y}{3} \Rightarrow \frac{y+60}{5} = \frac{y}{3}$$

ניצור מכנה משותף:

$$3 \cdot (y + 60) = 5y$$

נפתח סוגריים:

$$3y + 180 = 5y$$

נסדר אגפים:

$$180 = 2y$$

נחלק ב-2:

$$90 = y$$

כאמור, פועל אחד קוטף $\frac{y}{3}$ תפוזים בשעה. כלומר, פועל אחד קוטף 30 תפוזים בשעה $\left(\frac{90}{3}\right)$.

---

5. תשובה (2) נכונה. שאלה 6 מתוך 20 בפרק.

לפנינו שאלת צוות.

פתרון לפי שיטת ה-V

	צוות	עבודה	זמן
נתון:	3	10	4
צריך למצוא:	2	20	?

נכפול בין המספרים המחוברים בקו, ונחלק במספרים שנשארו חופשיים:

$$\frac{3 \cdot 20 \cdot 4}{10 \cdot 2} = 3 \cdot 4 = 12$$

---

6. תשובה (1) נכונה. שאלה 9 מתוך 20 בפרק.

נתונים הספק המכונה והספק האדם, ועלינו לקבוע כמה אנשים צריכים לעבוד יחד כדי שהספקם יהיה שווה להספק המכונה. לשם כך, תחילה נמיר את ההספקים לאותה יחידת זמן.

מכונה מייצרת 600 קופסאות בשעה.
אדם מייצר קופסה אחת ב-10 דקות. לכן, ב-60 דקות (שעה) הוא ייצר פי 6 יותר קופסאות, שכן הזמן הוכפל ב-6.
לפיכך, אדם מייצר 6 קופסאות בשעה.

כדי שהספקם של האנשים ישתווה להספק המכונה, עליהם לייצר 600 קופסאות בשעה. אם כל אדם מייצר 6 קופסאות, הרי שדרושים 100 אנשים לשם כך ($600 : 6 = 100$).

---

7. תשובה (3) נכונה. שאלה 12 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – שיטת ה-V

ראשית, משום שהספקו של הברז הרביעי שנוסף הוא פי שניים מההספק של הברזים האחרים, ניתן להתייחס אליו כאילו היה שני ברזים רגילים (שהרי אם הספקו כפול, משמע שהעבודה שייבצע תהיה כמו זו של שני ברזים רגילים יחד). כלומר, צוות של שלושת הברזים הרגילים והברז שנוסף הוא כמו צוות של 5 ברזים רגילים. כעת, נציב את הנתונים בטבלת צוות - עבודה - זמן ונסמן V בין הנתונים:

	צוות	עבודה	זמן
נתון:	3	1	5
צריך למצוא:	5	1	?

על מנת למצוא את הנתון החסר, נכפול את המסרים המחוברים בקו ונחלק במספרים שנשארו:

$$\frac{5\cdot1\cdot3}{5\cdot1}=3$$

כלומר, לארבעת הברזים יידרשו 3 שעות למלא את הבריכה.

דרך ב' – חיבור הספקים

ראשית נחשב את הספקו של ברז רגיל: אם 3 ברזים ממלאים יחד בריכה ב-5 שעות, הרי שלברז אחד יידרש פי 3 זמן, כלומר 15 שעות, על מנת למלא את הבריכה. מכאן שהספקו של ברז רגיל הוא $\frac{1}{15}$ $\left(\frac{\text{עבודה}}{\text{זמן}}\right)$.

נתון לנו כי הספקו של הברז הנוסף כפול מהספק ברז רגיל, ועל כן הספקו של הברז הנוסף הוא $\frac{2}{15}$ $\left(2\cdot\frac{1}{15}\right)$.

עתה נבדוק מהו הספקם המשותף של ארבעת הברזים על ידי חיבור הספקם:

$$3\cdot\frac{1}{15}+\frac{2}{15}=\frac{3}{15}+\frac{2}{15}=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$$

מכאן שהספק ארבעת הברזים הוא $\frac{1}{3}$, ועל כן יידרשו להם 3 שעות למלא בריכה אחת.

8. תשובה (3) נכונה. שאלה 12 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – יחסים

נתונות שתי עבודות ונתון הזמן שלוקח לצוות פועלים לבצע אותן. עלינו לקבוע בכמה ימים יוכלו 12 פועלים לבצע את שתי העבודות.

4 פועלים יכולים לבצע את עבודה א' ב-9 ימים. 12 פועלים, שהם צוות גדול פי 3, יבצעו את העבודה בזמן קצר פי 3 (כוח העבודה גדל ולכן זמן העבודה יתקצר). כלומר, 12 פועלים יבצעו את עבודה א' ב-3 ימים $\left(\frac{9}{3}\right)$.

6 פועלים יכולים לבצע את עבודה ב' ב-10 ימים. 12 פועלים, שהם צוות גדול פי 2, יבצעו את העבודה בזמן קצר פי 2. כלומר, 12 פועלים יבצעו את עבודה ב' ב-5 ימים $\left(\frac{10}{2}\right)$.

לפיכך, הפועלים יבצעו את שתי העבודות ב-8 ימים (5 + 3).

דרך ב' – טבלת צוות-עבודה-זמן

<u>עבודה א'</u>

נתון ש-4 פועלים יכולים לבצע את עבודה א' ב-9 ימים. עלינו לחשב כמה זמן ייקח ל-12 פולים לבצע את העבודה. נציב את הנתונים בטבלת צוות-עבודה-זמן:

	צוות	עבודה	זמן
נתון:	4	1	9
צריך למצוא:	12	1	?

נכפול בין המספרים המחוברים בקו, ונחלק במספרים שנשארו חופשיים:

$$\frac{4 \cdot 1 \cdot 9}{12 \cdot 1} = \frac{36}{12} = 3$$

מצאנו ש-12 פועלים יסיימו את עבודה א' ב-3 ימים.

<u>עבודה ב'</u>

נתון ש-6 פועלים יכולים לבצע את עבודה ב' ב-10 ימים. עלינו לחשב כמה זמן ייקח ל-12 פולים לבצע את העבודה. נציב את הנתונים בטבלת צוות-עבודה-זמן:

	צוות	עבודה	זמן
נתון:	6	1	10
צריך למצוא:	12	1	?

נכפול בין המספרים המחוברים בקו, ונחלק במספרים שנשארו חופשיים:

$$\frac{6 \cdot 1 \cdot 10}{12 \cdot 1} = \frac{60}{12} = 5$$

מצאנו ש-12 פועלים יסיימו את עבודה ב' ב-5 ימים.

לפיכך, הפועלים יבצעו את שתי העבודות ב-8 ימים (5 + 3).

9. תשובה (2) נכונה. שאלה 12 מתוך 20 בפרק.

ורדה תופרת ביום אחד או 30 חצאיות פשוטות או 10 חצאיות מסוגננות. לאורך מספר ימים תפרה 60 חצאיות מסוגננות ו60 חצאיות פשוטות. עלינו למצוא כמה חצאיות תפרה ביום בממוצע.

נחשב כמה ימים נדרשו לה לתפירת החצאיות:
ל-60 חצאיות פשוטות דרושים לה יומיים (נתון שהיא תופרת 30 פשוטות ביום אחד).
ל-60 חצאיות מסוגננות דרושים לה 6 ימים (נתון שהיא תופרת 10 מסוגננות ביום אחד).

כלומר, בסך הכול היא תפרה 120 חצאיות ב-8 ימים (מסוגננות ופשוטות).
נחשב ממוצע:

$$\frac{\text{סכום אברים}}{\text{מספר אברים}} = \frac{120}{8} = \frac{60}{4} = \frac{30}{2} = 15$$

---

10. תשובה (3) נכונה. שאלה 12 מתוך 20 בפרק.

מאחר שכיסוח עשבים שוטים מקטין פי 2 את ההספק, במקום לכסח 400 מ"ר בשעה, תכסח המכסחה רק 200 מ"ר בשעה. משהבנו את ההספק, נפנה להבנת השטח המדובר.
על המכסחה לכסח שטח עגול שרדיוסו 10 מ'. נחשב את שטחו:

$$r^2\pi = 10^2\pi = 100\pi$$

נכניס את הנתונים לריבוע יחסים ונבדוק כמה זמן דרוש למכסחה כדי לכסח 100π מ"ר:

עבודה	זמן
200	1
100π	?

נשתמש בערך משולש – נכפול את הנתונים שבאלכסון ונחלק באיבר הנותר:

$$\frac{1 \cdot 100\pi}{200} = \frac{\pi}{2}$$

---

11. תשובה (4) נכונה. שאלה 12 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – השוואת זמנים

בשאלה זו נתונים שני ברזים שההספק שלהם שונה. כדי לחשב מה ההספק המשותף שלהם, נשווה את עמודת הזמנים, וכך נמצא מה העבודה ששניהם עושים באותו פרק זמן.

נרחיב את הזמנים ל-10 שעות:

	עבודה	זמן
ברז א'	2	10
ברז ב'	1	10
יחד	3	10

<u>תזכורת</u>: לא מחברים את עמודת הזמנים.

הברז הראשון ממלא בריכה אחת ב-5 שעות. על כן, ב-10 שעות הוא ימלא 2 בריכות.

הברז השני ממלא בריכה אחת ב-10 שעות. מצאנו כי שני הברזים יחד ממלאים 3 בריכות ב-10 שעות.

לכן, על מנת למלא בריכה אחת יידרש להם שליש מהזמן, כלומר $3\frac{1}{3}$ שעות.

$$\frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$$

דרך ב' – חיבור הספקים

נמצא את ההספק המשותף של שני הברזים:

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{10} = \frac{2}{10} + \frac{1}{10} = \frac{3}{10}$$

מצאנו כי שני הברזים יחד ממלאים 3 בריכות ב-10 שעות. לכן, על מנת למלא בריכה אחת יידרש להם שליש מהזמן, כלומר $3\frac{1}{3}$ שעות.

$$\frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$$

.12 תשובה (4) נכונה. שאלה 14 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – טבלת עבודה-זמן

נתון כי יוני אוכל x עוגיות ב-y דקות. עלינו לקבוע בכמה זמן יוני יאכל y עוגיות. נציב נתונים אלה בטבלת עבודה-זמן:

עבודה	זמן
x	y
y	?

נשתמש בערך משולש – נכפול את הערכים הנמצאים באלכסון זה לזה ונחלק באיבר הנותר.

$$\frac{y \cdot y}{x} = \frac{y^2}{x}$$

דרך ב' – הצבת מספרים

ידוע שיוני אוכל x עוגיות ב-y דקות. עלינו לקבוע באמצעות x ו-y כמה זמן ייקח לו לאכול y עוגיות. נציב מספרים במקום הנעלמים. כדאי לשין לב שאם נציב $x = 1$ תשובות (2) ו-(3) יהיו זהות, ואם נציב $y = 2$ תשובות (1) ו-(4) יהיו זהות. לכן, נימנע מהצבה זו. נציב: $x = 2$, $y = 1$.

יוני אוכל 2 עוגיות בדקה 1. על כן, יוני יאכל עוגייה 1 ב-$\frac{1}{2}$ דקה.

כעת, נציב גם בתשובות $x = 2$, $y = 1$ ונחפש תשובה השווה ל-$\frac{1}{2}$. נשים לב שמכיוון שהשתמשנו בהצבת מספרים במקום הנעלמים, עלינו לפסול 3 תשובות בטרם נוכל לסמן תשובה נכונה.

(1) $\frac{2y}{x} \Rightarrow \frac{2}{2} = 1 \Rightarrow$ לא מתאים, התשובה נפסלת

(2) $\frac{x^2}{y} \Rightarrow \frac{2^2}{1} = \frac{4}{1} = 4 \Rightarrow$ לא מתאים, התשובה נפסלת

(3) $\frac{x}{y} \Rightarrow \frac{2}{1} = 2 \Rightarrow$ לא מתאים, התשובה נפסלת

טיפ: כיוון שפסלנו 3 תשובות, ניתן לסמן את תשובה (4) מבלי לבדוק אותה. למען שלמות ההסבר, נבדוק את נכונותה:

(4) $\frac{y^2}{x} \Rightarrow \frac{1^2}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow$ **מתאים**

13. תשובה (4) נכונה. שאלה 14 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – טבלת צוות-עבודה-זמן

נתון ש-4 פועלים ממלאים 5 שקים בשעה. עלינו לחשב כמה זמן ייקח לפועל אחד למלא שק אחד. נציב את הנתונים בטבלת צוות-עבודה-זמן:

	צוות	עבודה	זמן
נתון:	4	5	1
צריך למצוא:	1	1	?

נכפול בין המספרים המחוברים בקו, ונחלק במספרים שנשארו חופשיים:

$$\frac{4 \cdot 1 \cdot 1}{5 \cdot 1} = \frac{4}{5}$$

מצאנו שפועל אחד יזדקק ל-$\frac{4}{5}$ שעה כדי למלא שק אחד של תפוחי אדמה. נחשב כמה זמן זה בדקות: בשעה יש 60 דקות, על כן, $\frac{4}{5}$ של שעה הן 48 דקות $\left(\frac{4}{5} \cdot 60\right)$.

דרך ב' – יחסים

4 פועלים ממלאים יחד 5 שקים בשעה. עלינו לקבוע כמה זמן דרוש לפועל <u>אחד</u> כדי למלא שק <u>אחד</u>.

תחילה, נבין מה הספקו של פועל אחד. אם 4 פועלים ממלאים 5 שקים בשעה, פועל אחד ימלא 5 שקים ב-4 שעות (שכן הצוות קטן פי 4 ולכן הזמן הדרוש מתארך פי 4).

כעת נבין כמה זמן דרוש לפועל כדי למלא שק אחד. אם הפועל ממלא 5 שקים ב-4 שעות, הוא ימלא שק אחד ב-$\frac{4}{5}$ שעות (העבודה קטנה פי 5 ולכן הזמן הדרוש קטן פי 5). נמיר את הזמן לדקות:

$$\frac{4}{5} \cdot 60 = 4 \cdot 12 = 48$$

14. תשובה (2) נכונה. שאלה 15 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – השוואת זמנים

עכברים א, ב ו-ג מכרסמים יחד קוביית עץ ומכלים אותה ב-4 שעות. עכבר א ועכבר ב מכרסמים קובייה כזו ומכלים אותה ב-8 שעות. אנו מתבקשים לקבוע איזה חלק מהקובייה יכרסם עכבר ג בשעה.

תחילה, נבין מה הספקו של עכבר ג. לשם כך, נשאף להגיע לזמן זהה בכל אחד מהנתונים שלפנינו.
כאמור, עכברים א, ב ו-ג מכרסמים יחד קוביית עץ אחת ב-4 שעות.
לפיכך, עכברים א, ב ו-ג מכרסמים **2 קוביות ב-8 שעות**.
עכברים א ו-ב מכרסמים **קובייה אחת ב-8 שעות**.

כלומר, במשך 8 שעות מכרסמים שלושת העכברים **2 קוביות**. בזמן זה, עכברים א ו-ב מכרסמים **קובייה אחת**.
לפיכך, עכבר ג מכרסם בזמן זה **קובייה אחת**. אם לעכבר ג דרושות 8 שעות כדי לכרסם קובייה אחת, הרי שבמשך שעה הוא מכרסם $\frac{1}{8}$ קובייה.

<u>ניתן לראות זאת גם בטבלה</u>

עבודה	זמן	
1	8	
?	1	:8

ניתן לזהות יחס אנכי של חלוקה ב-8 בין 8 ל-1, ולכן נחלק גם את 1 ב-8 $\Leftarrow \frac{1}{8}$.

דרך ב' – טבלת צוות-עבודה-זמן

עכברים א, ב ו-ג מכרסמים יחד קוביית עץ ומכלים אותה ב-4 שעות. עכבר א ועכבר ב מכרסמים קובייה כזו ומכלים אותה ב-8 שעות. לפיכך, עכבר א ועכבר ב מכרסמים חצי קובייה ב-4 שעות.

כלומר, ב-4 שעות עכבר א ועכבר ב מבצעים חצי מהעבודה, ואילו עכבר ג מבצע את החצי השני של העבודה. ניתן לראות זאת כעבודה של שני פועלים בעלי הספק זהה, כאשר עכבר ג הוא פועל אחד ועכברים א ו-ב יחד הם פועל נוסף.
לפיכך, ב-4 שעות מכרסמים 2 פועלים קובייה אחת. נציג זאת בטבלת צוות-עבודה-זמן ונבדוק כמה עבודה ייבצע פועל אחד בשעה (משמע, איזה חלק מהקובייה יכרסם עכבר ג בשעה).

	צוות	עבודה	זמן
נתון:	2	1	4
צריך למצוא:	1	?	1

נכפול בין המספרים המחוברים בקו, ונחלק במספרים שנשארו חופשיים:

$$\frac{1\cdot 1\cdot 1}{2\cdot 4}=\frac{1}{8}$$

מצאנו שפועל אחד יבצע $\frac{1}{8}$ מהעבודה בשעה. משמע, עכבר ג מכרסם $\frac{1}{8}$ קובייה בשעה.

15. תשובה (3) נכונה. שאלה 16 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הצבת מספרים

נתון כי 2 פועלים מיומנים קוטפים בשעה פי 2 יותר תפוזים ממספר התפוזים שקוטפים 3 פועלים לא מיומנים בשעה. עלינו למצוא את היחס בין מספר התפוזים שקוטף פועל מיומן בשעה לבין מספר התפוזים שקוטף פועל לא מיומן בשעה. מכיוון שאנו מחפשים יחס, ומפני שלא נתון עוגן מספרי כלשהו, כדאי להציב מספר נוח.

נציב כי 3 פועלים לא מיומנים קוטפים בשעה 3 תפוזים. לפיכך, פועל לא מיומן אחד קוטף תפוז אחד בשעה.
על כן, 2 פועלים מיומנים קוטפים בשעה 6 תפוזים (פי 2 ממספר התפוזים שקוטפים 3 פועלים לא מיומנים בשעה – 3). משמע, פועל מיומן אחד קוטף 3 תפוזים בשעה.

כעת ניתן לחשב את היחס המבוקש:

$$\frac{\text{מספר התפוזים שקוטף פועל מיומן בשעה}}{\text{מספר התפוזים שקוטף פועל לא מיומן בשעה}} = \frac{3}{1} = 3$$

דרך ב' – יחסים

נתון שהספקם של 2 פועלים מיומנים כפול מהספקם של 3 פועלים לא מיומנים, כלומר ניתן להגיד שהספקם של 2 פועלים מיומנים שווה להספקם של 6 לא מיומנים (כפול פי 2 מההספק של 3 לא מיומנים).
לפיכך, אם 2 מיומנים שווים ל-6 לא מיומנים, אזי פועל מיומן אחד שווה בהספקו ל-3 לא מיומנים. כלומר, מספר התפוזים שקוטף פועל מיומן בשעה גדול פי 3 ממספר התפוזים שקוטף פועל לא מיומן בשעה.

דרך ג' – פתרון מתמטי

נציב n בתור מספר התפוזים שקוטף פועל לא מיומן אחד בשעה. לפיכך, 3 פועלים לא מיומנים קוטפים 3n תפוזים בשעה.

כאמור, 2 פועלים מיומנים קוטפים בשעה פי 2 יותר תפוזים ממספר התפוזים שקוטפים 3 פועלים לא מיומנים בשעה. על כן, 2 פועלים מיומנים קוטפים בשעה 6n תפוזים. מכאן שפועל מיומן אחד קוטף בשעה 3n תפוזים.

$$\frac{\text{מספר התפוזים שקוטף פועל מיומן בשעה}}{\text{מספר התפוזים שקוטף פועל לא מיומן בשעה}} = \frac{3n}{n} = 3$$

16. תשובה (1) נכונה. שאלה 18 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הערכת סדר גודל

בזמן שצביקה צועד 3 צעדים, שלומי צועד 5 צעדים. כלומר, שלומי מהיר מצביקה (באותו פרק זמן שלומי צועד יותר צעדים). נתון שלצביקה נדרשת $\frac{1}{2}$ שנייה כדי לעשות צעד אחד, ולכן לשלומי צריך לקחת פחות מ- $\frac{1}{2}$ שנייה (הוא מהיר יותר כאמור).

נחפש בתשובות תשובה הקטנה מ- $\frac{1}{2}$:

מתאים	$\Rightarrow$	קטן מ- $\frac{1}{2}$	$\Rightarrow$	(1) $\frac{3}{2\cdot 5}=\frac{3}{10}$
לא מתאים, התשובה נפסלת	$\Rightarrow$	גדול מ- $\frac{1}{2}$	$\Rightarrow$	(2) $\frac{2\cdot 3}{5}=\frac{6}{5}=1\frac{1}{5}$
לא מתאים, התשובה נפסלת	$\Rightarrow$	גדול מ- $\frac{1}{2}$	$\Rightarrow$	(3) $\frac{3\cdot 5}{2}=\frac{15}{2}=7\frac{1}{2}$
לא מתאים, התשובה נפסלת	$\Rightarrow$	גדול מ- $\frac{1}{2}$	$\Rightarrow$	(4) $\frac{5}{3\cdot 2}=\frac{5}{6}$

רק תשובה (1) קטנה מ-$\frac{1}{2}$ ולכן זוהי התשובה הנכונה.

דרך ב' – חישוב

בזמן שצביקה צועד 3 צעדים, שלומי צועד 5 צעדים. עלינו למצוא כמה שניות נדרשות לשלומי כדי לעשות צעד אחד. לשם כך, תחילה נבין כמה זמן לוקח לצביקה לצעוד 3 צעדים. אם לצביקה נדרשת $\frac{1}{2}$ שנייה כדי לעשות צעד אחד, הרי שנדרשות לו $\frac{3}{2}$ שניות כדי לעשות 3 צעדים $\left(3\cdot\frac{1}{2}\right)$. כאמור, בזמן זה שלומי צועד 5 צעדים. נציב נתונים אלה בטבלת עבודה – זמן כדי למצוא כמה זמן לוקח לשלומי לעשות צעד אחד בלבד:

עבודה	זמן
5	$\frac{3}{2}$
1	?

$:5$

ניתן לזהות יחס אנכי של חלוקה ב-5 בין 5 ל-1, ולכן נחלק גם את$\frac{3}{2}$ ב-5 $\Leftarrow$

$$\frac{\frac{3}{2}}{\frac{5}{1}}=\frac{3}{2\cdot 5}$$

---

17. תשובה (1) נכונה. שאלה 18 מתוך 20 בפרק.

לפנינו שאלת צוות. נפתור בשיטת ה-:V

	צוות	עבודה	זמן
נתון:	M	L	1
צריך למצוא:	D	?	2

נכפול בין המספרים המחוברים בקו, ונחלק במספרים שנשארו חופשיים:

$$\frac{2\cdot L\cdot D}{M\cdot 1}=\frac{2LD}{M}$$

18. תשובה (4) נכונה. שאלה 19 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – השוואת זמנים

3 פועלים בונים קיר אחד ב-3 שעות. מצטרף אליהם פועל שעובד בקצב אחר, ויחד איתו הם בונים קיר בשעתיים. כדי לחשב מה ההספק של הפועל הרביעי לבדו, נשווה את עמודת הזמנים, וכך נמצא מה הוסיף הפועל הרביעי בזמן זה. נרחיב את הזמנים ל-6 שעות:

	עבודה	זמן
3 פועלים	1	3
פועל רביעי	?	?
יחד	1	2

⇐

	עבודה	זמן
3 פועלים	2	6
פועל רביעי	?	6
יחד	3	6

3 הפועלים לבדם בונים קיר אחד ב-3 שעות, ולכן ב-6 שעות (פי 2 זמן) יבנו הפועלים 2 קירות. יחד עם הפועל הרביעי, בנו הפועלים קיר אחד בשעתיים, ולכן ב-6 שעות (פי 3 זמן) יבנו כולם יחד 3 קירות. ניתן לראות כי הוספת הפועל הרביעי גרמה להם לבנות קיר אחד יותר ב-6 שעות, ועל כן הפועל הרביעי יבנה לבדו קיר ב-6 שעות.

דרך ב' – שיטת ה-V

ניתן להתייחס לשאלה כאל שאלת צוות – כך נוכל למצוא לכמה פועלים "רגילים" שווה הפועל הרביעי.

	צוות	עבודה	זמן
נתון:	3	1	3
צריך למצוא	?	1	2

נכפול בין המספרים המחוברים בקו, ונחלק במספרים שנשארו חופשיים:

$$\frac{3\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 1}=\frac{9}{2}=4\frac{1}{2}$$

כלומר, הוספת הפועל הרביעי הוסיפה כביכול עוד פועל וחצי רגילים. לכן, נבדוק כמה זמן ייקח לפועל וחצי לבנות קיר אחד. נציב את הנתונים שוב בטבלה:

	צוות	עבודה	זמן
נתון:	3	1	3
צריך למצוא	1.5	1	?

נכפול בין המספרים המחוברים בקו, ונחלק במספרים שנשארו חופשיים:

$$\frac{3\cdot 1\cdot 3}{1\cdot 1.5}=\frac{9}{1.5}=\frac{18}{3}=6$$

<u>שימו לב שניתן לפתור זאת גם באמצעות יחסים</u>: מספר הפועלים קטן פי 2 (1.5 במקום 3), ועל כן יידרש להם פי 2 יותר זמן בכדי לעשות את אותה העבודה – כלומר, 6 שעות במקום 3 שעות.

מכאן שפועל וחצי רגילים יבנו קיר אחד ב-6 שעות, ועל כן כך גם הפועל הרביעי, שכאמור הספקו שווה להספק של אחד וחצי פועלים רגילים.

19. תשובה (4) נכונה. שאלה 19 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הבנה

עלינו למצוא בכמה שעות חתול אחד ירוקן את הפחים שמילאו 3 משפחות ב-24 שעות. לכן, תחילה עלינו למצוא כמה פחים תמלאנה המשפחות.

נתון שמשפחה אחת ממלאת פח אחד ב-8 שעות, אזי ב-24 שעות ממלאת משפחה אחת 3 פחים (מכיוון שהזמן גדל פי 3, העבודה גדלה פי 3). לכן, 3 משפחות תמלאנה 9 פחים ב-24 שעות (מכיוון שהצוות גדל פי 3, העבודה גדלה פי 3).

כעת, עלינו למצוא בכמה שעות ירוקן חתול אחד 9 פחים.
נתון ש-2 חתולים מרוקנים יחד פח אחד ב-3 שעות, ומכאן שחתול אחד מרוקן פח ב-6 שעות (מכיוון שהצוות קטן פי 2, הזמן גדל פי 2). לכן, הוא ירוקן 9 פחים ב-54 שעות ($54 = 9 \cdot 6$).

דרך ב' – פתרון לפי שיטת ה-V

נתון שמשפחה אחת ממלאת פח אחד ב-8 שעות, ועלינו למצוא את מספר הפחים שממלאות 3 משפחות ב-24 שעות:

	צוות	עבודה	זמן
נתון:	1	1	8
צריך למצוא:	3	?	24

נכפול בין המספרים המחוברים בקו, ונחלק במספרים שנשארו חופשיים:

$$\frac{3 \cdot 24 \cdot 1}{8 \cdot 1} = 3 \cdot 3 = 9$$

כלומר, המשפחות תמלאנה 9 פחים. לכן, אנו מחפשים בכמה שעות ירוקן חתול אחד 9 פחים, כאשר נתון לנו כי 2 חתולים מרוקנים יחד פח אחד ב-3 שעות:

	צוות	עבודה	זמן
נתון:	2	1	3
צריך למצוא:	1	9	?

נכפול בין המספרים המחוברים בקו, ונחלק במספרים שנשארו חופשיים:

$$\frac{3 \cdot 9 \cdot 2}{1 \cdot 1} = 54$$

---

20. תשובה (3) נכונה. שאלה 20 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – יחסים

אמיר וגדי בונים ביחד בית ב-10 ימים. קצב העבודה של אמיר גדול פי 4 מקצב העבודה של גדי. כלומר, היחס בין ההספקים שלהם הוא 1 : 4. לפיכך, אמיר עושה $\frac{4}{5}$ מהעבודה בעוד שגדי עושה $\frac{1}{5}$ מהעבודה. משמע, ב-10 ימים בונה גדי $\frac{1}{5}$ בית. כדי לבנות בית שלם הוא יצטרך לעבוד פי 5 יותר זמן – 50 ימים.

דרך ב' – הצבת מספרים

כאמור, קצב העבודה של אמיר גדול פי 4 מקצב העבודה של גדי. לצורך העניין נניח כי גדי בונה קיר אחד ביום, ואמיר בונה 4 קירות ביום. כלומר, ביחד הם בונים 5 קירות בכל יום ובסך הכול 50 קירות ב-10 ימים. משמע, בית בנוי מ-50 קירות.
כפי שנאמר לעיל, גדי בונה קיר אחד ביום. אם עליו לבנות בית (המורכב מ-50 קירות) עליו לעבוד במשך 50 ימים.

תנועה

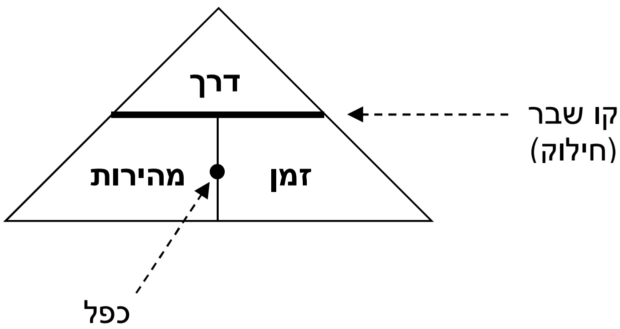
שאלות תנועה הן בעצם סוג של בעיות הספק: מהירות היא הדרך שאני **<u>מספיק</u>** לעבור בזמן מסוים.

את רוב בעיות התנועה בבחינה נפתור בעזרת משוואת התנועה:

דרך = זמן x מהירות

<u>שינוי נושא נוסחה</u>

כאשר נתונים לנו שני פרמטרים מתוך שלושת הפרמטרים המופעים בנוסחה, ניתן תמיד למצוא את השלישי באמצעות סרטוט הפרמידה:



$\text{מהירות} = \frac{\text{דרך}}{\text{זמן}}$ $\quad$ $\text{זמן} = \frac{\text{דרך}}{\text{מהירות}}$ $\quad$ $\text{דרך} = \text{זמן} \cdot \text{מהירות}$

המרת יחידות

1 ק״מ = 1,000 מטר
1 מטר = 100 ס״מ

1 שעה = 60 דקות
1 דקה = 60 שניות

מהירות היא הדרך שעוברים בזמן מסוים, ולכן תכיל שני פרמטרים, דרך וזמן.
היחידות הנפוצות להגדרת מהירות הן:

קמ״ש = ק״מ בשעה - מספר הקילומטרים שעוברים בשעה אחת.

מ/ש = מטרים בשנייה - מספר המטרים שעוברים בשנייה אחת.

דוגמה:
מהירות הולך רגל היא 5 מטרים בשנייה. כמה ק"מ יעבור בחצי שעה?

פתרון -
כדי להמיר יחידות נשתמש ביחסים / ערך משולש:

	מרחק		זמן
	5 מטרים	←	1 שנייה
$\cdot 60$	300 מטרים	→	דקה (60 שניות)
$\cdot 30$	9,000 מטרים	→	30 דקות

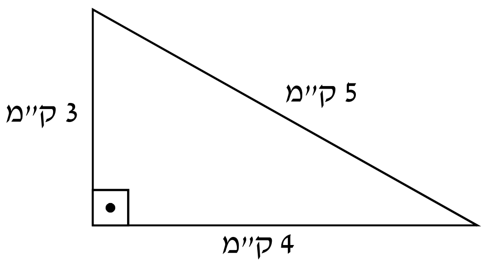
הולך הרגל יעבור 9 ק"מ בחצי שעה.

פיתגורס

חלק מהשאלות נפתרות בעזרת שימוש במשפט פיתגורס.

דוגמה:
מטוס ממריא במהירות 300 קמ"ש בזווית קבועה. לאיזה גובה הגיע המטוס לאחר דקה אם ידוע כי המרחק האופקי שעבר הוא 4 ק"מ?

פתרון -
אם המטוס עובר 300 ק"מ בשעה (60 דקות), בדקה אחת הוא יעבור 5 ק"מ.
נציב את הנתונים בסרטוט:



על פי משפט פיתגורס, ניתן לראות שהמטוס יהיה בגובה 3 ק"מ.

מהירות יחסית

מהירות יחסית היא הקצב בו שני גופים מתקרבים זה לזה או מתרחקים זה מזה.

תנועה באותו כיוון (→ →) - מחסרים מהירויות

תנועה בכיוונים מנוגדים (→ ←) או (← →) - מחברים מהירויות

לאחר שמוצאים את המהירות היחסית בין הגופים, פותרים כשאלת תנועה רגילה.

דוגמה:
בשעה 06:00, יוצאת משאית מאשדוד לחיפה במהירות 80 קמ"ש, ומכונית מחיפה לאשדוד במהירות 100 קמ"ש. באיזו שעה יפגשו אם המרחק בין חיפה לאשדוד הוא 90 ק"מ?

פתרון -
מכיוון שהמשאית והמכונית נעות זו לקראת זו, נחבר את מהירויותיהן - המהירות היחסית ביניהן היא 180 קמ"ש.

המרחק בין כלי הרכב הוא 90 ק"מ.

נציב בטבלה:

דרך	זמן	מהירות
90 ק"מ	$\frac{1}{2}$ **שעה**	180 קמ"ש

המרחק ביניהן הוא 90 ק"מ, המהירות היחסית ביניהן היא 180 קמ"ש, ולכן הן ייפגשו לאחר $\frac{1}{2}$ שעה.

דוגמה:
אצן רץ צפונה במהירות 10 קמ"ש. רוכב אופניים רוכב מדרום לצפון במהירות גדולה פי 3 ממהירות האצן, באותה דרך בדיוק. כאשר רוכב האופניים יצא לדרכו, המרחק בינו לבין האצן היה 20 ק"מ. כעבור כמה זמן (בשעות) ישיג רוכב האופניים את האצן?

פתרון -
מהירותו של רוכב האופניים היא 30 קמ"ש.
מכיוון שהאצן ורוכב האופניים נעים באותו כיוון, המהירות היחסית ביניהם תהיה ההפרש בין המהירויות שלהם, זאת אומרת 20 קמ"ש.
נציב את הנתונים בטבלה:

דרך	זמן	מהירות
20 ק"מ	**1 שעה**	20 קמ"ש

המרחק ביניהם הוא 20 ק"מ, והמהירות היחסית היא 20 קמ"ש, ולכן רוכב האופניים ישיג את האצן לאחר שעה אחת.

יחסים

חלק מהשאלות במבחן יכולות להיפתר במהירות, כמעט ללא חישוב, רק באמצעות ההבנה של יחסים.

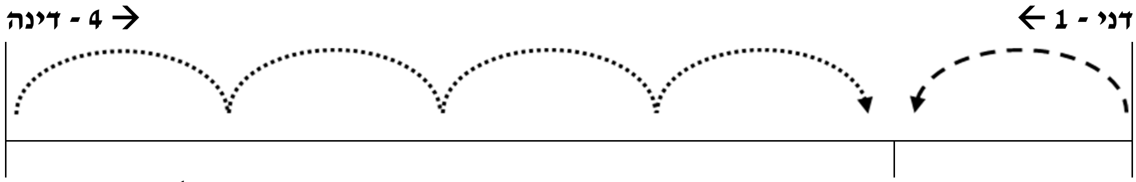
דוגמה:

דני ודינה יוצאים זה לקראת זה. מהירותה של דינה גבוהה פי 4 ממהירותו של דני.
איזה חלק מהדרך יעבור דני עד למפגש ביניהם?

פתרון -

אם דינה מהירה פי 4, כאשר דני יעבור מרחק כלשהו, דינה תעבור מרחק גדול פי 4.

לפיכך, ניתן לחלק את המרחק ביניהם ל-5 חלקים שווים, באופן הבא:



ניתן לראות כי הדרך כולה חולקה ל-5 חלקים, ודני עבר חלק אחד מתוכה, זאת אומרת דני עבר $\frac{1}{5}$ מהדרך.

כאשר אין נתונים מספריים בשאלה (דרך/זמן/מהירות) ניתן להציב מספרים נוחים

בשאלה זו, יכולנו גם להציב מספרים.

נציב:

מהירות דני - 10 קמ"ש, מהירות דינה - 40 קמ"ש

כעת נניח כי הם הלכו שעה אחת עד המפגש - דני עבר 10 ק"מ ודינה עברה 40 ק"מ - סה"כ הדרך 50 ק"מ.

תרגול שאלות מבחינות אמת

.1 נהג מכונית מירוץ יכול לנסוע בשתי מהירויות: א' ו–ב'.
במהירות א' הנהג משלים הקפה אחת של המסלול בדקה אחת.
במהירות ב' הנהג משלים 2 הקפות של המסלול ב–5 דקות.
הנהג נסע חצי שעה במהירות א' וחצי שעה במהירות ב'.

כמה הקפות של המסלול השלים הנהג במשך השעה כולה?

(1) 60
(2) 42
(3) 36
(4) 24

.2 מכונית נוסעת במהירות קבועה ועוברת a ק"מ ב-b שעות.

כמה ק"מ תעבור המכונית ב-3b שעות אם היא תיסע במהירות גדולה פי 2?

(1) $\frac{2}{3}a$ (2) $\frac{3}{2}a$ (3) 3a (4) 6a

.3 אבישי נסע x שעות במהירות קבועה של x קמ"ש, ואחר כך הוא נסע עוד y שעות במהירות קבועה של y קמ"ש.

מה המרחק שעבר אבישי בסך הכול (בק"מ)?

(1) $x + y$
(2) $2(x + y)$
(3) $(x + y)^2$
(4) $x^2 + y^2$

.4 יוליה יצאה מ-A ונסעה במהירות קבועה של 70 קמ"ש.
לאחר 3 שעות הגיעה ל-B.
ידוע כי הדרך מ-B ל-C ארוכה ב-30 ק"מ מהדרך מ-A ל-B.
בכמה זמן תגיע יוליה מ-B ל-C אם תיסע במהירות של 80 קמ"ש?

(1) $1\frac{3}{4}$ שעות
(2) $2\frac{1}{2}$ שעות
(3) 3 שעות
(4) 4 שעות

פתרתי ______________ שאלות ב ______________ דקות, ______________ תשובות נכונות

5. עודד יצא מ-A ונסע במהירות של 60 קמ"ש ל-B. הוא הגיע ל-B כעבור $1\frac{1}{2}$ שעות, ומיד חזר מ-B ל-A במהירות של 40 קמ"ש.

כמה שעות ארכה נסיעתו חזרה מ-B ל-A ?

(1) $2\frac{1}{4}$ (2) $2\frac{1}{2}$ (3) 3 (4) $2\frac{3}{4}$

---

6. אילנה נסעה 250 ק"מ ב-3 שעות.

כמה **שעות** הייתה אורכת נסיעתה של אילנה אילו הייתה נוסעת במהירות הגדולה פי 1.5 מהמהירות שבה נסעה?

(1) 1
(2) 2
(3) 1.5
(4) 4.5

---

7. כלב רודף אחרי חתול לאורך כביש ישר. מהירותו של הכלב גדולה פי 3 ממהירותו של החתול.

אם המרחק ביניהם הוא 10 ק"מ והחתול רץ במהירות של 5 קמ"ש, כעבור כמה זמן (בשעות) ישיג הכלב את החתול?

(1) 1 (2) $\frac{2}{3}$ (3) 3 (4) $\frac{3}{2}$

---

8. חמור יצא מ-A ב-9:00, הלך במהירות קבועה של 5 קמ"ש, והגיע ל-B ב-12:00.
סוס הלך באותה הדרך במהירות קבועה של 6 קמ"ש.

מתי היה הסוס צריך לצאת מ-A כדי להגיע ל-B ב-12:00 בדיוק?

(1) ב-10:00
(2) ב-9:45
(3) ב-9:30
(4) ב-9:15

פתרתי ____________ שאלות ב ____________ דקות, ____________ תשובות נכונות

9. איציק נסע 300 ק"מ מ-A ל-B. את 100 הק"מ הראשונים הוא נסע במהירות של 50 קמ"ש.
$\frac{1}{4}$ משאר הדרך הוא נסע במהירות של 150 קמ"ש, ואת יתרת הדרך הוא נסע במהירות של 25 קמ"ש.

כמה שעות נדרשו לאיציק כדי להגיע מ-A ל-B?

(1) $9\frac{1}{2}$

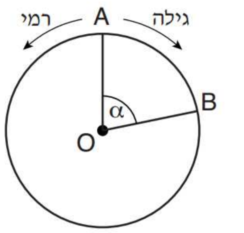
(2) $8\frac{1}{3}$

(3) $7\frac{1}{4}$

(4) $6\frac{1}{5}$

---

10. רמי וגילה מתחילים לרוץ יחד מאותה נקודה A במסלול מעגלי ובכיוונים מנוגדים (ראו סרטוט). מרכז המעגל מסומן ב-O.
מהירותו של רמי גדולה פי 4 ממהירותה של גילה.
B היא הנקודה שבה רמי וגילה ייפגשו בפעם הראשונה.



למה שווה הזווית α?

(1) $72°$

(2) $60°$

(3) $120°$

(4) $80°$

---

11. שתי מכוניות יוצאות באותו זמן מ-A ל-B. המרחק בין A ל-B הוא 100 ק"מ.
מהירותה של מכונית **א** גדולה ב-10 קמ"ש ממהירותה של מכונית **ב**.

בכמה זמן תקדים מכונית **א** את מכונית **ב**?

(1) 10 דקות

(2) 15 דקות

(3) 60 דקות

(4) אי-אפשר לדעת לפי הנתונים

---

12. גילת שוחה בכל בוקר 2 ק"מ ובכל ערב 2.5 ק"מ. בבוקר שוחה גילת בקצב של 50 מטר בדקה, ובערב קצב השחייה שלה קטן פי 2.

כמה דקות **ביום** משקיעה גילת בשחייה?

(1) 250
(2) 200
(3) 160
(4) 140

---

13. מהירות האור היא 300,000,000 מטר בשנייה.

מה הדרך שאור עובר ב-10^{-9} שניות (במטרים)?

(1) 0.03 (2) 0.3 (3) 3 (4) 30

---

14. נמרוד ועמוס רצים על מסלול **מעגלי** שאורכו 2 ק"מ.
נמרוד רץ במהירות קבועה של 12 קמ"ש, ועמוס רץ במהירות קבועה של 6 קמ"ש.
שניהם התחילו לרוץ יחד לאותו כיוון, מאותה נקודה על המסלול.

כמה דקות ירוץ נמרוד עד שיחלוף על פני עמוס בפעם הראשונה?

(1) 15
(2) 20
(3) 25
(4) 30

---

15. אסף וחנן יצאו מחיפה בדרכם לאילת באותה שעה ובאותה הדרך.
חנן נסע במהירות של 80 קמ"ש.
אסף נסע במהירות של 100 קמ"ש, לאחר 150 ק"מ עצר למנוחה של שעה, ואחר כך המשיך לנסוע באותה מהירות.

כעבור כמה שעות מאז יצאו לדרך, השיג חנן את אסף?

(1) $1\frac{7}{8}$
(2) 2
(3) 3
(4) $2\frac{1}{4}$

פתרתי ______ שאלות ב ______ דקות, ______ תשובות נכונות

16. כביש ישר שאורכו 100 ק"מ מחבר את העיר A לעיר B.
בשעה 10:00 יצאה מכונית מהעיר A לעיר B.
בשעה 11:00 יצאה מכונית מהעיר B לעיר A.
שתי המכוניות נסעו על הכביש במהירויות קבועות ושוות, ונפגשו במרחק 20 ק"מ מהעיר B.

מה מהירותן של המכוניות (בקמ"ש)?

(1) 50
(2) 60
(3) 30
(4) 40

---

17. מכונית נסעה y ק"מ ב-3 שעות.
המכונית נסעה את $\frac{y}{2}$ הק"מ הראשונים במהירות של x קמ"ש, ואת שאר הדרך במהירות של 2x קמ"ש.

אילו נסעה המכונית את כל y הק"מ במהירות של x קמ"ש, כמה שעות הייתה אורכת הנסיעה?

(1) 5
(2) 4.5
(3) 3.5
(4) 4

---

18. קנגורו קופץ 50 קפיצות **בדקה**, והמהירות שהוא מתקדם בה בדרך זו היא 24 **קילומטרים בשעה**.
כמה **מטרים** הוא עובר בכל קפיצה?

(1) 4.8
(2) 6
(3) 8
(4) 12

פתרתי ______________ שאלות ב ______________ דקות, ______________ תשובות נכונות

19. היקפו של מסלול ריצה מעגלי הוא 400 מטרים. דני ודינה יצאו מאותה נקודת זינוק, באותו זמן ובכיוונים מנוגדים זה לזה.
שניהם רצו באותה מהירות קבועה, כל אחד מהם למרחק של 5,000 מטרים.

כמה פעמים נפגשו דני ודינה **לאחר** שיצאו מנקודת הזינוק (ועד שסיימו את הריצה)?

(1) 25
(2) 12
(3) 13
(4) 48

---

20. אביתר נמצא ב-A ובנימין נמצא ב-B.
בשעה 8:00 התחיל אביתר ללכת במהירות קבועה
של 6 קמ"ש מ-A לכיוון B.
t דקות לאחר מכן התחיל בנימין ללכת במהירות קבועה של 8 קמ"ש מ-B לכיוון A.
אביתר ובנימין נפגשו במחצית הדרך בין A ל-B בשעה 8:40.

t = ?

(1) 10 (2) 20 (3) 24 (4) 14

תשובות

שאלה	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
תשובה	2	4	4	3	1	2	1	3	2	1

שאלה	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
תשובה	4	4	2	2	1	2	4	3	1	1

פתרתי 20 שאלות - ____________ נכונות, ____________ אחוזי הצלחה

1. תשובה (2) נכונה. שאלה 2 מתוך 20 בפרק.

<u>מהירות א'</u>: נתון כי הנהג משלים הקפה אחת של המסלול בדקה, ועל כן בחצי שעה (30 דקות) השלים הנהג 30 הקפות. ניתן לראות זאת גם בריבוע יחסים:

הקפה אחת → 1 דק'

30 הקפות → 30 דק'

$\cdot 30$

<u>מהירות ב'</u>: נתון כי הנהג משלים 2 הקפות של המסלול ב-5 דק', ועל כן ב-30 דק' (פי 6 זמן) השלים הנהג 12 הקפות. ניתן לראות זאת גם בריבוע יחסים:

2 הקפות → 5 דק'

12 הקפות → 30 דק'

$\cdot 6$

מכאן שבמשך השעה כולה השלים הנהג 42 הקפות (30+12).

.2 תשובה (4) נכונה. שאלה 2 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – יחסים

מכונית נוסעת a ק"מ ב-b שעות. עלינו לקבוע כמה ק"מ היא תעבור אם היא תיסע במשך 3b שעות במהירות גדולה פי 2. אם המכונית תיסע במהירות גדולה פי 2, היא תספיק לעבור 2a ק"מ ב-b שעות (המהירות גדלה פי 2 ולכן גם המרחק גדל פי 2 $\Leftarrow$ $a \cdot 2$). אם המכונית תיסע במשך 3b שעות, היא תספיק לעבור 6a ק"מ (הזמן גדל פי 3 ולכן המרחק גדל פי 3 $\Leftarrow$ $2b \cdot 3$).

כלומר, ב-3b שעות המכונית תעבור 6a ק"מ.

דרך ב' – הצבה

מכונית עוברת a ק"מ ב-b שעות. נציב שהמכונית עוברת 10 ק"מ ב-1 שעות ($b = 1$, $a = 10$). כלומר, מהירות המכונית היא 10 קמ"ש.

נשאלנו כמה ק"מ המכונית תעבור ב-3 שעות ($3 \cdot 1 \Rightarrow 3b$) אם היא תיסע במהירות גדולה פי 2, 20 קמ"ש. נחשב:

$$3 \cdot 20 = 60$$

כעת, נציב גם בתשובות $b = 1$, $a = 10$ ונחפש תשובה השווה ל-60. נשים לב שמכיוון שהשתמשנו בהצבת מספרים במקום הנעלמים, עלינו לפסול 3 תשובות בטרם נוכל לסמן תשובה נכונה.

(1) $\frac{2}{3}a \Rightarrow \frac{2}{3} \cdot 10$ $\Rightarrow$ לא מתאים, התשובה נפסלת

(2) $\frac{3}{2}a \Rightarrow \frac{3}{2} \cdot 10 = 3 \cdot 5 = 15$ $\Rightarrow$ לא מתאים, התשובה נפסלת

(3) $3a \Rightarrow 3 \cdot 10 = 30$ $\Rightarrow$ לא מתאים, התשובה נפסלת

טיפ: כיוון שפסלנו 3 תשובות, ניתן לסמן את תשובה (4) מבלי לבדוק אותה. למען שלמות ההסבר, נבדוק את נכונותה:

(4) $6a \Rightarrow 6 \cdot 10 = 60$ $\Rightarrow$ **מתאים**

דרך ג' – פתרון מתמטי

מכונית נוסעת a ק"מ ב-b שעות. על כן, מהירותה היא $\frac{a}{b}$ $\left(\frac{\text{מרחק}}{\text{זמן}}\right)$. עלינו לחשב כמה ק"מ המכונית תעבור ב-3b שעות אם היא תיסע במהירות גדולה פי 2. כלומר, מהירות המכונית תהיה $2 \cdot \frac{a}{b}$. כעת נחשב את המרחק:

$$\frac{2a}{b} \cdot 3b = 6a$$

3. תשובה (4) נכונה. שאלה 4 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – פתרון מתמטי

עלינו למצוא את המרחק שאבישי עבר. תחילה, אבישי נסע x שעות במהירות קבועה של x קמ"ש. בשלב זה הוא עבר מרחק של x^2 ק"מ (דרך = זמן · מהירות).

לאחר מכן, אבישי נסע עוד y שעות במהירות קבועה של y קמ"ש. בשלב זה הוא עבר מרחק של y^2 ק"מ.

בסך הכל, אבישי עבר מרחק של $x^2 + y^2$ ק"מ.

דרך ב' – הצבת מספרים

נציב $x = 1$, $y = 2$. אבישי נסע במשך שעה אחת במהירות 1 קמ"ש. המרחק שאבישי עבר בשלב זה הוא 1 ק"מ ($1 \cdot 1$). לאחר מכן הוא נסע במשך שעתיים במהירות 2 קמ"ש. המרחק שאבישי עבר בשלב זה הוא 4 ק"מ ($2 \cdot 2$).

בסך הכול, אבישי עבר מרחק של 5 ק"מ ($4 + 1$).

כעת, נציב גם בתשובות $x = 1$, $y = 2$ ונחפש תשובה השווה ל-5. נשים לב שמכיוון שהשתמשנו בהצבת מספרים במקום הנעלמים, עלינו לפסול 3 תשובות בטרם נוכל לסמן תשובה נכונה.

לא מתאים, התשובה נפסלת $\Rightarrow$ (1) $x + y \Rightarrow 1 + 2 = 3$

לא מתאים, התשובה נפסלת $\Rightarrow$ (2) $2(x + y) \Rightarrow 2(1 + 2) = 6$

לא מתאים, התשובה נפסלת $\Rightarrow$ (3) $(x + y)^2 \Rightarrow (1 + 2)^2 = 9$

טיפ: כיוון שפסלנו 3 תשובות, ניתן לסמן את תשובה (4) מבלי לבדוק אותה. למען שלמות ההסבר, נבדוק את נכונותה:

מתאים $\Rightarrow$ (4) $x^2 + y^2 \Rightarrow 1^2 + 2^2 = 5$

---

4. תשובה (3) נכונה. שאלה 5 מתוך 20 בפרק.

עלינו לקבוע בכמה זמן תגיע יוליה מ-B ל-C אם תיסע במהירות 80 קמ"ש. לשם כך, עלינו לדעת מה המרחק בין B ל-C. נתון שהוא גדול ב-30 ק"מ מהמרחק בין A ל-B. נמצא מרחק זה.

יוליה יצאה מ-A ונסעה במהירות 70 קמ"ש במשך 3 שעות שבסופן הגיעה ל-B. לפיכך, המרחק בין A ל-B הוא 210 ק"מ ($70 \cdot 3$). לכן, המרחק בין B ל-C הוא 240 ק"מ ($30 + 210$).

נתון שיוליה נוסעת במהירות 80 קמ"ש. מצאנו שהמרחק אותו היא נוסעת הוא 240 ק"מ. על כן, נסיעתה תימשך 3 שעות $\left(\frac{240}{80}\right)$.

---

5. תשובה (1) נכונה. שאלה 6 מתוך 20 בפרק.

עלינו לקבוע כמה זמן ארכה נסיעתו של עודד חזרה מ-B ל-A. ידוע לנו שמהירותו הייתה 40 קמ״ש. כדי לדעת כמה זמן ארכה נסיעתו, נמצא את המרחק בין B ל-A.

עודד נסע במהירות 60 קמ״ש מ-A ל-B והגיע תוך $1\frac{1}{2}$ שעות. לפיכך, המרחק בין A ל-B הוא 90 ק״מ $\left(1\frac{1}{2}\cdot 60\right)$.

כעת נמצא את הזמן הדרוש לעודד כדי להגיע מ-B ל-A. עודד ייסע מרחק של 90 ק״מ במהירות 40 קמ״ש ⇐ נסיעתו תימשך $2\frac{1}{4}$ שעות $\left(\frac{90}{40}=\frac{80}{40}+\frac{10}{40}\right)$.

---

6. תשובה (2) נכונה. שאלה 4 מתוך 20 בפרק.

דרך א׳ – יחסים

אילנה נסעה 250 ק״מ ב-3 שעות. אילו אילנה הייתה נוסעת במהירות הגדולה פי 1.5 ממהירותה המקורית, זמן נסיעתה היה מתקצר פי 1.5:

$$\frac{3}{1.5}=\frac{6}{3}=2$$

כלומר, הנסיעה הייתה נמשכת שעתיים.

דרך ב׳ – חישוב

עלינו לקבוע כמה שעות הייתה נמשכת נסיעתה של אילנה אילו מהירותה הייתה גדולה פי 1.5. לשם כך, תחילה נמצא את מהירותה המקורית.

אילנה נסעה 250 ק״מ במשך 3 שעות. לפיכך, מהירותה הייתה $\frac{250}{3}$. מהירותה של אילנה גדלה פי 1.5. נחשב זאת:

$$\frac{250}{3}\cdot 1.5=\frac{250}{3}\cdot\frac{3}{2}=\frac{250}{2}=125$$

ידוע שאילנה נסעה 250 ק״מ במהירות זו. נחשב את הזמן שארכה נסיעתה:

$$\frac{250}{125}=2$$

כלומר, הנסיעה הייתה נמשכת שעתיים.

---

7. תשובה (1) נכונה. שאלה 8 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – מרדף

חתול רץ במהירות 5 קמ"ש, וכלב רודף אחריו במהירות 15 קמ"ש (נתון שמהירותו גדולה פי 3 ממהירות החתול). עלינו לקבוע כעבור כמה זמן ישיג הכלב את החתול, בהנחה שהמרחק ביניהם הוא 10 ק"מ.

אם החתול רץ במהירות 5 קמ"ש והכלב רץ במהירות 15 קמ"ש, הרי שהמהירות היחסית ביניהם היא 10 קמ"ש (בשאלות מרדף אנו מחסרים מהירויות). משמע, הכלב מצמצם את המרחק ב-10 ק"מ בכל שעה. כאמור, המרחק ביניהם הוא 10 ק"מ ולכן הכלב ישיג את החתול תוך שעה.

דרך ב' – הצבת תשובות

כלב מתחיל לרדוף אחר חתול כאשר המרחק ביניהם הוא 10 ק"מ. מהירות הכלב היא 15 קמ"ש ומהירות החתול 5 קמ"ש.

עלינו למצוא תוך כמה זמן השיג הכלב את החתול. ניתן להציב את הזמנים המובאים בתשובות ולראות האם בזמן זה הכלב השיג את החתול (עבר מרחק הגדול ב-10 ק"מ מזה של החתול).

טיפ: בהצבת תשובות, כדאי להתחיל בתשובות הנוחות יותר.

<u>נבדוק את תשובה (1):</u> אם כל המרדף ארך שעה אחת, אזי במהלך זמן זה עבר הכלב מרחק של 15 ק"מ ($15 \cdot 1$). כמו כן, החתול עבר 5 ק"מ ($5 \cdot 1$). ניתן לראות כי הכלב אכן עבר מרחק הגדול ב-10 ק"מ מזה שעבר החתול ובכך למעשה צמצם את הפער ביניהם ($15 - 5$). **תשובה נכונה.**

טיפ: מכיוון שהצבנו את התשובות, ברגע שמצאנו תשובה נכונה אין צורך להמשיך לבדוק את שאר התשובות, אך למען שלמות ההסבר נפסול אותן:

<u>נבדוק את תשובה (2):</u> אם כל המרדף ארך $\frac{2}{3}$ שעות, אזי במהלך זמן זה עבר הכלב מרחק של 10 ק"מ ($15 \cdot \frac{2}{3}$). כמו כן, החתול עבר $3\frac{1}{3}$ ק"מ ($5 \cdot \frac{2}{3}$). במקרה זה הכלב עבר מרחק הגדול ב-$6\frac{2}{3}$ ק"מ יותר מהחתול, ולמעשה לא צמצם את הפער של 10 הק"מ ביניהם. התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (3):</u> אם כל המרדף ארך 3 שעות, אזי במהלך זמן זה עבר הכלב מרחק של 45 ק"מ ($15 \cdot 3$). כמו כן, החתול עבר 15 ק"מ ($5 \cdot 3$). במקרה זה הכלב עבר מרחק הגדול ב-30 ק"מ מהחתול. התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (4):</u> אם כל המרדף ארך $\frac{3}{2}$ שעות, אזי במהלך זמן זה עבר הכלב מרחק של 22.5 ק"מ ($15 \cdot \frac{3}{2}$). כמו כן, החתול עבר 7.5 ק"מ ($5 \cdot \frac{3}{2}$). במקרה זה הכלב עבר מרחק הגדול ב-15 ק"מ מהחתול. התשובה נפסלת.

דרך ג' – פתרון מתמטי

נתונות לנו המהירויות של הכלב והחתול והמרחק ביניהם. אנו נדרשים לחשב תוך כמה זמן ישיג הכלב את החתול – יצמצם את הפער. נציב את זמן המרדף כ-t.

מהירות הכלב היא 15 ק"מ והוא רץ במהירות זו במשך t זמן עד המפגש ביניהם. לכן, הדרך שעובר הכלב היא 15t (דרך = זמן · מהירות). באותו אופן, הדרך שעובר החתול עד המפגש היא 5t. אנו יודעים שהכלב עבר מרחק הגדול ב-10 ק"מ מהחתול (צמצם את הפער ביניהם). נבנה משוואה לפי נתונים אלו ע"פ עיקרון "תן למסכן":

$15t = 5t + 10$

$10t = 10$

$t = 1$

כלומר הזמן שבו לקח לכלב "לסגור את הפער" של ה-10 ק"מ הוא שעה.

8. תשובה (3) נכונה. שאלה 8 מתוך 20 בפרק.

תחילה, ניתן לחשב את המרחק מ-A ל-B באמצעות מהירותו של החמור והזמן שנדרש לו על מנת להגיע ל-B. החמור יצא ב-9:00 והגיע ב-12:00, ולכן בסך הכול נמשכה הליכתו 3 שעות. כלומר, החמור הלך במשך 3 שעות במהירות 5 קמ״ש, ולכן אורך הדרך הוא 15 ק״מ ($3 \cdot 5 = 15$).

הסוס עבר את אותה הדרך – 15 ק״מ – במהירות 6 קמ״ש. נחלק את הדרך במהירות על מנת לחשב כמה זמן תיארך הליכתו:

$$\frac{15}{6} = 2.5$$

מצאנו שדרושות לסוס שעתיים וחצי של הליכה כדי להגיע מ-A ל-B. כלומר, כדי להגיע ב-12:00 עליו לצאת שעתיים וחצי קודם לכן. מכאן שעליו לצאת ב-09:30.

---

9. תשובה (2) נכונה. שאלה 10 מתוך 20 בפרק.

נבדוק כמה זמן נמשך כל חלק בנסיעתו של איציק מ-A ל-B. תחילה, איציק נסע 100 ק״מ במהירות 50 קמ״ש. הזמן שנדרש לו לשם כך הוא שעתיים $\left(\frac{100}{50}\right)$.

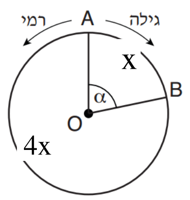
איציק נסע $\frac{1}{4}$ משאר הדרך במהירות של 150 קמ״ש. נותרו 200 ק״מ ($300 - 100$), $\frac{1}{4}$ מהם שווה ל-50 ק״מ $\left(\frac{200}{4}\right)$. כלומר, איציק נסע 50 ק״מ במהירות 150 קמ״ש. הזמן שנדרש לו לשם כך הוא $\frac{1}{3}$ שעה $\left(\frac{50}{150}\right)$.

את יתרת הדרך איציק נסע במהירות 25 קמ״ש. איציק נסע תחילה 100 ק״מ ולאחר מכן נסע 50 ק״מ. נותרו לו 150 ק״מ לנסיעה ($300 - 100 - 50$). הזמן שנדרש לו לשם כך הוא 6 שעות $\left(\frac{150}{25}\right)$.

בסך הכול נדרשו לאיציק $8\frac{1}{3}$ שעות כדי להגיע מ-A ל-B.

---

10. תשובה (1) נכונה. שאלה 12 מתוך 20 בפרק.



עלינו לקבוע מה גודלה של זווית α. זווית זו נשענת על קשת AB. כדי לקבוע מה גודל הזווית, עלינו למצוא את היחס בין קשת AB (שהיא הדרך שעברה גילה עד לפגישתה עם רמי) לבין היקף המעגל כולו (שהוא הדרך שעברו גילה ורמי יחד עד לפגישתם).

מהירותו של רמי גדולה פי 4 ממהירותה של גילה. לכן, בזמן שגילה תרוץ יחידת מרחק אחת, רמי ירוץ 4 יחידות מרחק. לשם הנוחות, נציב x בתור המרחק שגילה עברה. משמע, רמי רץ מרחק של 4x. בסך הכל, היקף המעגל הוא 5x. כעת ניתן לחשב את גודלה של α:

$$\frac{\alpha}{360} = \frac{x}{5x} = \frac{1}{5}$$

נכפול את שני האגפים ב-360:

$$\alpha = \frac{360}{5} = 72°$$

---

11. תשובה (4) נכונה. שאלה 14 מתוך 20 בפרק.

דרך א׳ – הצבת מספרים

נציב שמהירותה של מכונית ב׳ היא 10 קמ״ש. נתון שמהירותה של מכונית א׳ גדולה ב-10 קמ״ש מזו של מכונית ב׳, ולכן מהירות מכונית א׳ היא 20 קמ״ש (20 = 10 + 10). נתון לנו כי המרחק אותו הן עוברות הוא 100 ק״מ – נחשב כמה זמן לוקח לכל מכונית לעבור מרחק זה לפי הנוסחה: $\text{זמן} = \frac{\text{דרך}}{\text{מהירות}}$

מכונית ב׳ תגיע לנקודה B כעבור 10 שעות $\left(\frac{100}{10}\right)$.

מכונית א׳ תגיע לנקודה B כעבור 5 שעות $\left(\frac{100}{20}\right)$.

כלומר, מכונית א׳ תקדים את מכונית ב׳ ב-5 שעות. לפיכך, ניתן לפסול את תשובות (1), (2) ו-(3). התשובה היחידה שמתאימה היא תשובה (4).

דרך ב׳ – הבנה

המכוניות נוסעות מרחק של 100 ק״מ. נתון שמהירותה של מכונית א׳ גדולה ב-10 קמ״ש ממהירותה של מכונית ב׳, אולם לא נתונה מהירותה של אף אחת מהמכוניות. לפיכך, איננו יכולים לחשב כמה זמן ייקח לכל אחת מהן להגיע לנקודה B. כל מספר שנציב עבור המהירויות שלהן יביא לתוצאה שונה. כלומר, אי אפשר לדעת לפי הנתונים.

---

12. תשובה (4) נכונה. שאלה 14 מתוך 20 בפרק.

לפנינו בעיית תנועה שבה המרחקים נתונים לנו ביחידות מידה שונות; המרחקים שגילת שוחה נתונים בק״מ, ואילו הקצב שלה (המהירות) נתון במטרים. כאשר אנו נתקלים במצב כזה, עלינו להשוות את יחידות המידה.

1 ק״מ שווה ל-1,000 מטרים. לכן, המרחקים שהיא שוחה במטרים הם:
2,000 מטרים בבוקר ו-2,500 מטרים בערב.

בבוקר, גילת שוחה במהירות של 50 מטרים בדקה. נחשב כמה דקות היא שוחה:

<u>דרך א׳ – טבלת יחסים</u>

<u>דרך</u>		<u>זמן</u>
50	=	1 דק׳
2,000	=	?

ניתן לזהות, לדוגמה, יחס אנכי בין 50 ל-2,000 (פי 40). לכן נרחיב גם את 1 פי 40 ⇐ 40. כלומר, גילת שוחה 40 דק׳ בבוקר.

בערב, גילת שוחה במהירות הקטנה פי 2 מהבוקר, כלומר במהירות של 25 מטרים בדקה (במקום 50 מטרים בדקה). כאמור, היא שוחה 2,500 מטרים בערב. נחשב כמה דקות היא שוחה בערב:

<u>דרך</u>		<u>זמן</u>
25	=	1 דק׳
2,500	=	?

ניתן לזהות, לדוגמה, יחס אנכי בין 25 ל-2,500 (פי 100). לכן נרחיב גם את 1 פי 100 ⇐ 100. כלומר, גילת שוחה 100 דק׳ בערב.

בסך הכול, גילת משקיעה 140 דקות לשחייה (100 + 40).

<u>דרך ב' – בעזרת הנוסחה</u>

בבוקר -

$$\text{זמן} = \frac{\text{דרך}}{\text{מהירות}} = \frac{2{,}000}{50} = 40\text{ דק'}$$

בערב -

$$\text{זמן} = \frac{\text{דרך}}{\text{מהירות}} = \frac{2{,}500}{25} = 100\text{ דק'}$$

בסך הכול, גילת משקיעה 140 דקות לשחייה (40 + 100).

---

13. תשובה (2) נכונה. שאלה 15 מתוך 20 בפרק.

ידועים לנו המהירות והזמן, ועלינו למצוא את הדרך.

תחילה, נבטא את 10^{-9} באופן נוח יותר:

$$10^{-9} = \frac{1}{10^9}$$

טיפ: החזקה מעל ה-10 מציינת את מספר האפסים שלאחר ה-1. לדוגמה: $10^2 = 100$

$$\frac{1}{10^9} = \frac{1}{1{,}000{,}000{,}000}$$

כעת ניתן להשתמש בנוסחה: דרך = זמן · מהירות

$$\text{דרך} = \frac{1}{1{,}000{,}000{,}000} \cdot 300{,}000{,}000$$

נצמצם אפסים:

$$\frac{1}{1{,}000{,}000{,}000} \cdot 300{,}000{,}000 = \frac{1}{10} \cdot 3 = 0.3$$

---

14. תשובה (2) נכונה. שאלה 16 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – מרדף

נמרוד ועמוס רצים במסלול מעגלי לאותו כיוון. לכן, המהירות היחסית ביניהם היא הפרש המהירויות שלהם – 6 קמ"ש.

כדי שנמרוד יחלוף על פני עמוס עליו לבצע הקפה אחת יותר מעמוס. כלומר לעבור מרחק של 2 ק"מ במהירות היחסית. נציב בנוסחה כדי לחשב כמה זמן ייקח לנמרוד לעבור דרך של 2 ק"מ במהירות 6 קמ"ש:

$$\text{זמן} = \frac{\text{דרך}}{\text{מהירות}}$$

$$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

לפיכך, לנמרוד דרוש שליש שעה על מנת לעקוף את עמוס בהקפה שלמה. נחשב כמה זה שליש שעה בדקות:

$$\frac{1}{3} \cdot 60 = 20$$

דרך ב' – הצבת תשובות

על מנת שנמרוד יחלוף על פניו של עמוס, עליו לעקוף אותו בהקפה אחת שלמה (2 ק"מ). נחשב עבור כל תשובה את המרחק שעבר כל אחד מהרצים ונבדוק באיזו תשובה המרחק של נמרוד גדול משל עמוס ב-2 ק"מ. נחשב את הדרך ע"י הנוסחה: דרך = מהירות · זמן.

<u>נבדוק את תשובה (1)</u>: כעבור 15 דק' שהן רבע שעה $\left(\frac{15}{60} = \frac{1}{4}\right)$, נמרוד שרץ במהירות 12 קמ"ש עבר מרחק של 3 ק"מ $\left(12 \cdot \frac{1}{4}\right)$. בזמן זה עבר עמוס, שרץ במהירות 6 קמ"ש, 1.5 ק"מ $\left(6 \cdot \frac{1}{4}\right)$. הדרך אותה עבר נמרוד אינה ארוכה בהקפה אחת (2 ק"מ) מזו שעבר עמוס. התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (2)</u>: כעבור 20 דק' שהן שליש שעה $\left(\frac{20}{60} = \frac{1}{3}\right)$, נמרוד שרץ במהירות 12 קמ"ש עבר מרחק של 4 ק"מ $\left(12 \cdot \frac{1}{3}\right)$. בזמן זה עבר עמוס, שרץ במהירות 6 קמ"ש, רק 2 ק"מ $\left(6 \cdot \frac{1}{3}\right)$. הדרך אותה עבר נמרוד ארוכה בדיוק בהקפה אחת (2 ק"מ) מזו שעבר עמוס. **תשובה נכונה.**

טיפ: מכיוון שהצבנו את התשובות, ברגע שמצאנו תשובה נכונה ניתן לסמנה ואין צורך להמשיך לבדוק את שאר התשובות, אך למען שלמות ההסבר נפסול אותן.

<u>נבדוק את תשובה (3)</u>: כעבור 25 דק' שהן $\frac{5}{12}$ שעה $\left(\frac{25}{60} = \frac{5}{12}\right)$, נמרוד שרץ במהירות 12 קמ"ש עבר מרחק של 5 ק"מ $\left(12 \cdot \frac{5}{12}\right)$. בזמן זה עבר עמוס, שרץ במהירות 6 קמ"ש, רק 2.5 ק"מ $\left(6 \cdot \frac{5}{12}\right)$. הדרך אותה עבר נמרוד אינה ארוכה בהקפה אחת (2 ק"מ) מזו שעבר עמוס. התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (4)</u>: כעבור 30 דק' שהן חצי שעה $\left(\frac{30}{60} = \frac{1}{2}\right)$, נמרוד שרץ במהירות 12 קמ"ש עבר מרחק של 6 ק"מ $\left(12 \cdot \frac{1}{2}\right)$. בזמן זה עבר עמוס, שרץ במהירות 6 קמ"ש, רק 3 ק"מ $\left(6 \cdot \frac{1}{2}\right)$. הדרך אותה עבר נמרוד אינה ארוכה בהקפה אחת (2 ק"מ) מזו שעבר עמוס. התשובה נפסלת.

דרך ג' – פתרון מתמטי

נבין כי על מנת שנמרוד יחלוף על פניו של עמוס עליו לבצע הקפה אחת יותר מעמוס. נציב את הזמן שייקח לו לעשות זאת כ-t שעות. נמרוד רץ במהירות 12 קמ"ש ולכן ב- t שעות הוא יעבור דרך של $12 \cdot t$ ק"מ. עמוס לעומתו רץ במהירות 6 קמ"ש ולכן הוא יעבור מרחק של $6 \cdot t$ ק"מ בזמן t שעות. כאמור, עד לזמן הפגישה ביניהם, ישלים נמרוד הקפה אחת יותר מאשר עמוס, קרי הוא יעבור דרך הארוכה ב-2 ק"מ ממנו. לכן, על מנת ליצור את המשוואה נשתמש בעיקרון "תן למסכן" ונוסיף לדרך שעבר עמוס עוד 2.

$$6t + 2 = 12t$$

$$2 = 6t$$

$$\frac{2}{6} = t$$

$$\frac{1}{3} = t$$

לפיכך, לנמרוד ייקח שליש שעה לעקוף את עמוס בהקפה אחת שלמה. נבדוק כמה זה שליש שעה בדקות $\leftarrow \frac{1}{3} \cdot 60$ $\leftarrow$ 20 דקות.

דרך ד' – יחס מהירויות

נבין שכדי שנמרוד יחלוף על פניו של עמוס, עליו לעקוף אותו בהקפה שלמה של מסלול הריצה. ידוע כי מהירות ריצתו של נמרוד כפולה מזו של עמוס. לכן, בזמן שייקח לעמוס לבצע הקפה שלמה של המסלול, נמרוד יספיק לבצע שתי הקפות מלאות, ובכך להשיג את עמוס בהקפה שלמה ולחלוף על פניו.
עתה, כל שנותר לנו זה לחשב כמה זמן יחלוף עד שעמוס יספיק לבצע הקפה שלמה של המסלול.

עמוס רץ במהירות 6 קמ"ש ועליו לעבור דרך של 2 ק"מ. נציב נתונים אלו בנוסחה ונחשב את זמן ריצתו:

$$\text{זמן} = \frac{\text{דרך}}{\text{מהירות}}$$

$$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

כלומר, יחלוף שליש שעה עד שעמוס יסיים הקפה מלאה של המסלול. בזמן זה יעבור נמרוד, המהיר מעמוס פי 2, שתי הקפות מלאות ולמעשה יחלוף על פניו של עמוס.

נחשב כמה זה שליש שעה בדקות $\leftarrow \frac{1}{3} \cdot 60 \leftarrow$ 20 דקות.

15. תשובה (1) נכונה. שאלה 17 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הבנה
מהירותו של אסף גדולה ממהירותו של חנן ולפיכך לפני המנוחה ככל שעובר הזמן כך הפער בין השניים גדל, וכך גם לאחריה. אם חנן השיג את אסף, הזמן היחיד בו הוא יכול לעשות זאת הוא כאשר אסף במנוחה.
בשלב זה אסף עבר 150 ק"מ. נחשב כמה זמן ייקח לחנן לעבור מרחק זה:

$$\frac{150}{80} = 1 + \frac{70}{80} = 1\frac{7}{8}$$

טיפ: שימו לב שאין צורך להשלים את החישוב במלואו. בשלב זה ניתן להעריך את סדר הגודל.
$\frac{160}{80}$ שווה 2 ומכאן ש- $\frac{150}{80}$ קטן מ-2. כלומר, התשובה צריכה להיות קטנה מ-2. ישנה רק תשובה אחת מתאימה.

דרך ב' – הצבת תשובות
מפורטות דרכיהם של אסף ושל חנן ועלינו לקבוע תוך כמה שעות השיג חנן את אסף. כלומר, מתי הדרכים של השניים השתוו. אסף נסע במהירות של 100 קמ"ש ולאחר 150 ק"מ עצר למנוחה של שעה. לאחר מכן המשיך לנסוע באותה מהירות. עד לפגישתם חנן נסע במהירות של 80 קמ"ש לאורך פרק זמן לא ידוע שאותו עלינו למצוא. פרק זמן זה נמצא בתשובות ולכן אנו יכולים לבדוק כל אחת מהן. כאמור, עלינו למצוא פרק זמן שיביא לכך שהדרכים יהיו שוות.

טיפ: בבדיקת התשובות מומלץ להתחיל בבדיקת התשובה הנוחה ביותר.

<u>נתחיל בבדיקת תשובה (2):</u>
אסף נסע 150 ק"מ במהירות 100 קמ"ש – לשם כך נדרשה לו שעה וחצי $\left(\frac{150}{100}\right)$. לאחר מכן הוא נח במשך שעה.
כלומר, כעבור שעתיים אסף היה במהלכה של ההפסקה ועבר מרחק של 150 ק"מ.
מהירותו של חנן הייתה 80 קמ"ש ומכאן שבשעתיים הוא עבר מרחק של 160 ק"מ ($2 \cdot 80$).
הדרכים אינן שוות ועל כן התשובה נפסלת.

שימו לב שכבר בשלב זה ניתן לדעת מהי התשובה הנכונה: הדרך שחנן עבר גדולה יותר מדרכו של אסף, משמע הוא כבר השיג אותו קודם לכן. מכאן שעלינו לבחור בתשובה הקטנה מ-2. התשובה היחידה שמתאימה היא תשובה (1), ועל כן זו **התשובה הנכונה**.

למען שלמות ההסבר נבדוק את יתר התשובות:

<u>התשובה הנוחה הבאה היא תשובה (3), נבדוק אותה:</u>
כאמור לעיל, אסף מתחיל את נסיעתו בשעה וחצי שבהן הוא עובר מרחק של 150 ק"מ. לאחר מכן הוא עוצר למנוחה של שעה ועל כן לאחר שעתיים וחצי המרחק שעבר הוא עדיין 150 ק"מ. בחצי השעה שנותרה הוא נוסע שוב במהירות של 100 קמ"ש ובזמן זה הוא עובר מרחק של 50 ק"מ $\left(\frac{1}{2} \cdot 100\right)$. בסך הכול, עבר אסף 200 ק"מ.
חנן נוסע לאורך כל הדרך במהירות 80 קמ"ש. ב-3 שעות יעבור מרחק של 240 ק"מ. מרחקים אלה אינם שווים, התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (1):</u>
אסף נסע 150 ק"מ במשך שעה וחצי ולאחר מכן עצר למנוחה של שעה. כלומר, לאחר $1\frac{7}{8}$ שעות הוא היה במהלכה של המנוחה ועבר 150 קמ"ש. כעת נחשב את הדרך שעבר חנן בזמן זה:

$$1\frac{7}{8} \cdot 80 = 80 + \frac{7}{8} \cdot 80 = 80 + 70 = 150$$

המרחקים שווים, **תשובה נכונה.**

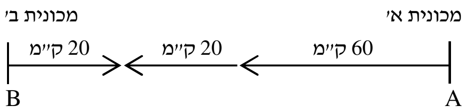
<u>נבדוק את תשובה (4):</u>
כפי שהסברנו לעיל, לאחר שעה וחצי עצר אסף למנוחה של שעה. כלומר, לאחר $2\frac{1}{4}$ שעות הוא היה במהלכה של המנוחה ועבר 150 קמ"ש. כעת נחשב את הדרך שעבר חנן בזמן זה:

$$2\frac{1}{8} \cdot 80 = 160 + \frac{1}{4} \cdot 80 = 160 + 20 = 180$$

המרחקים שונים, התשובה נפסלת.

16. תשובה (2) נכונה. שאלה 18 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הבנה



נחלק את הנסיעה לשני חלקים. בשעה הראשונה נסעה רק מכונית א'. לאחר מכן, נסעו שתי המכוניות יחד. מהירותן זהה ולכן בחלק השני של הנסיעה, כאשר מכונית ב' עברה 20 ק"מ, גם מכונית א' עברה 20 ק"מ.

ידוע לנו שמכונית א' עברה בסך הכול 80 ק"מ. לכן, אם בחלק השני של הנסיעה היא עברה 20 ק"מ, הרי שבחלק הראשון של הנסיעה היא נסעה 60 ק"מ. כאמור, החלק הראשון של הנסיעה נמשך שעה. אם במשך שעה המכונית נסעה 60 ק"מ, מהירותה 60 קמ"ש.

דרך ב' – הצבת התשובות

מכונית א' יוצאת בשעה 10:00 מ-A ל-B, ומכונית ב' יוצאת בשעה 11:00 מ-B ל-A. המרחק בין A ל-B הוא 100 ק"מ. המכוניות נפגשו במרחק 20 ק"מ מ-B.

לפיכך, מכונית א' (שיצאה מ-A) נסעה 80 ק"מ, ומכונית ב' (שיצאה מ-B) נסעה 20 ק"מ. עלינו למצוא את המהירות של המכוניות. ניתן לבדוק את התשובות. נמצא את זמן הנסיעה של כל מכונית $\left(\frac{\text{דרך}}{\text{מהירות}}\right)$, ונחפש תשובה אשר יוצרת הפרש של שעה בין זמני הנסיעה של המכוניות (שכן כאמור, מכונית א' יצאה שעה אחת מוקדם יותר ממכונית ב' ולכן נסעה שעה אחת יותר ממנה).

<u>נבדוק את תשובה (1):</u> אם מהירות המכוניות היא 50 קמ"ש, זמן נסיעתה של מכונית א' הוא $1\frac{3}{5}$ $\left(\frac{80}{50}\right)$ וזמן נסיעתה של מכונית ב' הוא $\frac{2}{5}$ $\left(\frac{20}{50}\right)$. ההפרש אינו שעה. התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (2):</u> אם מהירות המכוניות היא 60 קמ"ש, זמן נסיעתה של מכונית א' הוא $1\frac{1}{3}$ $\left(\frac{80}{60}\right)$ וזמן נסיעתה של מכונית ב' הוא $\frac{1}{3}$ $\left(\frac{20}{60}\right)$. ההפרש הוא שעה. **תשובה נכונה.**

טיפ: מכיוון שהצבנו את התשובות, ברגע שמצאנו תשובה נכונה אין צורך להמשיך לבדוק את שאר התשובות, אך למען שלמות ההסבר נפסול אותן:

<u>נבדוק את תשובה (3):</u> אם מהירות המכוניות היא 30 קמ"ש, זמן נסיעתה של מכונית א' הוא $2\frac{2}{3}$ $\left(\frac{80}{30}\right)$ וזמן נסיעתה של מכונית ב' הוא $\frac{2}{3}$ $\left(\frac{20}{30}\right)$. ההפרש אינו שעה. התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (4):</u> אם מהירות המכוניות היא 40 קמ"ש, זמן נסיעתה של מכונית א' הוא 2 $\left(\frac{80}{40}\right)$ וזמן נסיעתה של מכונית ב' הוא $\frac{1}{2}$ $\left(\frac{20}{40}\right)$. ההפרש אינו שעה. התשובה נפסלת.

דרך ג' – פתרון מתמטי

נסמן את מהירות המכוניות ב-x. כאמור, מכונית א' נסעה 80 ק"מ. לכן, זמן הנסיעה שלה הוא $\frac{80}{x}$ $\left(\frac{\text{דרך}}{\text{מהירות}}\right)$.

מכונית ב' נסעה 20 ק"מ. זמן הנסיעה שלה הוא $\frac{20}{x}$. ידוע לנו שמכונית א' נסעה שעה אחת יותר ממכונית ב', שכן הראשונה יצאה ב-10:00 ואילו השנייה יצאה ב-11:00. ניתן להשתמש בנתון זה כדי לבנות משוואה וממנה לחלץ את x. כרגיל, ניתן למסכן:

$$\frac{80}{x} = \frac{20}{x} + 1$$

ניצור מכנה משותף:

$$80 = 20 + x$$

נסדר אגפים:

$$60 = x$$

17. תשובה (4) נכונה. שאלה 19 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – יחסים

מכונית נסעה y ק"מ ב-3 שעות. המכונית נסעה חצי מהדרך, $\frac{y}{2}$, במהירות x קמ"ש, ואת החצי השני של הדרך במהירות 2x קמ"ש. עלינו לחשב כמה זמן הייתה אורכת נסיעתה אילו המהירות הייתה x לאורך כל הדרך.

תחילה, נבין כמה זמן לקח למכונית לנסוע את החצי הראשון של הדרך וכמה זמן לקח לה לנסוע את החצי השני של הדרך. יחס המהירויות בין החצי הראשון של הדרך לשני הוא $x : 2x \Leftarrow 2 : 1$. לפיכך, יחס הזמנים הוא הפוך $\Leftarrow 1 : 2$ (זאת, מפני שמהירותה בחצי הראשון של הדרך הייתה קטנה פי 2 ממהירותה בחצי השני, ולכן זמן הנסיעה בחצי הראשון היה גדול פי 2 מזמן הנסיעה בחצי השני). בסך הכל הנסיעה ארכה 3 שעות. לפיכך, החצי הראשון של הדרך ארך שעתיים (איטי פי 2), ואילו החצי השני ארך שעה (מהיר פי 2).

בחצי הראשון של הדרך, המכונית נסעה $\frac{y}{2}$ ק"מ במהירות x קמ"ש תוך שעתיים. לפיכך, אם המכונית הייתה נוסעת את כל הדרך (y) במהירות x קמ"ש, הנסיעה הייתה אורכת 4 שעות (הזמן גדל פי 2, שכן הדרך גדלה פי 2).

דרך ב' – פתרון מתמטי

נשאלים כמה שעות הייתה אורכת נסיעת המכונית אילו לאורך כל y הק"מ היא הייתה נוסעת במהירות x. במקרה זה, נסיעתה הייתה אורכת $\frac{y}{x}$ שעות (זמן = $\frac{\text{דרך}}{\text{מהירות}}$). כלומר, עלינו למצוא את ערך הביטוי $\frac{y}{x}$.

ניעזר בנתונים כדי לבנות משוואה המתארת את הקשר בין x ל-y. ננסח את המשוואה המתארת את זמן נסיעת המכונית. המכונית נסעה $\frac{y}{2}$ ק"מ במהירות x קמ"ש. הזמן הדרוש לשם כך הוא $\frac{y}{2x}$ $\left(\frac{\frac{y}{2}}{x}\right)$. לאחר מכן, המכונית נסעה $\frac{y}{2}$ ק"מ במהירות 2x קמ"ש. הזמן הדרוש לשם כך הוא $\frac{y}{4x}$ $\left(\frac{\frac{y}{2}}{2x}\right)$. נתון שהנסיעה ארכה 3 שעות.

נכתוב זאת באופן אלגברי:

$$\frac{y}{2x} + \frac{y}{4x} = 3$$

נוציא גורם משותף $\frac{y}{x}$ מהאגף השמאלי:

$$\frac{y}{x} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = 3$$

$$\frac{y}{x} \cdot \left(\frac{3}{4}\right) = 3$$

נחלק את שני האגפים ב- $\frac{3}{4}$:

$$\frac{y}{x} = \frac{3}{\frac{3}{4}}$$

ניעזר בקשתות:

$$\frac{\frac{3}{1}}{\frac{3}{4}} = \frac{3 \cdot 4}{3 \cdot 1} = 4$$

אם ערך הביטוי $\frac{y}{x}$ הוא 4, הרי שמשך הנסיעה הוא 4 שעות.

שימו לב, ניתן גם לבודד את אחד הנעלמים ולהציב אותו בביטוי המבוקש $\frac{y}{x}$.

נבודד את y ונבטא אותו באמצעות x :

$$\frac{y}{2x} + \frac{y}{4x} = 3$$

ניצור מכנה משותף 4x:

$$2y + y = 3 \cdot 4x$$

נכנס איברים דומים:

$$3y = 12x$$

נחלק ב-3:

$$y = 4x$$

כעת נציב את ערכו של y בביטוי המבוקש:

$$\frac{y}{x} \Rightarrow \frac{4x}{x} = 4$$

---

18. תשובה (3) נכונה. שאלה 19 מתוך 20 בפרק.

דרך חישוב א'

נתון שהקנגורו מתקדם במהירות של 24 קי"מ בשעה. נשאלנו כמה מטרים הוא עובר בכל קפיצה, ולכן ראשית נמיר את המרחק למטרים - הקנגורו עובר 24,000 מטרים בשעה.

כעת, נמיר את הזמן לדקות על מנת למצוא איזה מרחק הוא עובר בדקה – הקנגורו עובר 24,000 מטרים ב-60 דקות. כדי להבין מה המרחק שהוא עובר בדקה נחלק ב-60:

$$\frac{24{,}000}{60} = 400$$

הקנגורו עובר 400 מטרים בדקה. כמו כן, נתון שהקנגורו קופץ 50 קפיצות בדקה. כדי למצוא כמה מטרים הוא עובר בכל קפיצה, נחלק את כל המרחק שהוא עובר בדקה (400) במספר הקפיצות בדקה (50):

$$\frac{400}{50} = 8$$

דרך חישוב ב'

נתון שהקנגורו קופץ 50 קפיצות בדקה. כלומר, בשעה (60 דקות) הוא יקפוץ פי 60 קפיצות - 3,000.

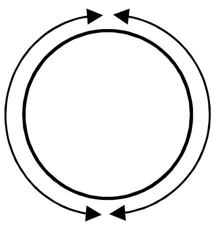
כידוע, נשאלנו כמה מטרים הוא עובר בכל קפיצה ולכן נמיר את מהירותו למטרים לשעה. ידוע שמהירותו היא 24 קי"מ לשעה, כלומר 24,000 מטרים לשעה.

כעת אנו יודעים כמה מטרים עובר הקנגורו בשעה וכמה קפיצות הוא קופץ בשעה. כדי למצוא מה מרחק כל קפיצה, נחלק את המרחק במספר הקפיצות:

$$\frac{24{,}000}{3{,}000} = 8$$

---

19. תשובה (1) נכונה. שאלה 20 מתוך 20 בפרק.



מכיוון שנתון שדני ודינה נעים בכיוונים מנוגדים במהירות זהה, ניתן להגיד שהם ייפגשו בכל הקפה פעמיים; פעם אחת באמצע הדרך, ופעם שנייה בנקודה שבה התחילו (כמתואר בסרטוט).

נתון שהיקף המסלול הוא 400 מטרים. ניתן להגיד, אם כן, שדני ודינה נפגשו כל 200 מטרים.

כלומר, כל אחד מהם רץ מרחק של 5,000 ופגש את האחר כל 200 מטרים, ולכן הם נפגשו:

$$\frac{5{,}000}{200} = \text{25 פעמים}$$

---

20. תשובה (1) נכונה. שאלה 20 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הצבת תשובות

הנעלם t מציין כמה דקות אחרי 8:00 התחיל בנימין ללכת. נשתמש בערכים הנמצאים בתשובות ונבדוק איזו תשובה מקיימת את הנתונים:

<u>נציב את תשובה (1)</u>: לפי תשובה זו $t = 10$ – כלומר, בנימין יצא בשעה 8:10 והגיע בשעה 8:40. בנימין הלך במהירות 8 קמ"ש במשך 30 דקות שהן חצי שעה. נחשב את המרחק שעבר בנימין:

$$\frac{1}{2} \cdot 8 = 4$$

אביתר הלך 40 דקות במהירות 6 קמ"ש. 40 דקות הן $\frac{2}{3}$ שעה $\left(\frac{40}{60}\right)$. נחשב את המרחק שאביתר הלך:

$$\frac{2}{3} \cdot 6 = 4$$

מצאנו כי לפי תשובה זו, אביתר ובנימין הלכו שניהם 4 ק"מ. תוצאה זו תואמת את הנתון שבנימין ואביתר נפגשו באמצע הדרך, כלומר כל אחד מהם הלך את אותו המרחק, ועל כן **התשובה נכונה**.

טיפ: מכיוון שהצבנו את התשובות, ברגע שמצאנו תשובה נכונה אין צורך להמשיך לבדוק את שאר התשובות, אך למען שלמות ההסבר נפסול אותן:

<u>נציב את תשובה (2)</u>: $t = 20$ – כלומר, בנימין יצא בשעה 8:20 והגיע בשעה 8:40. בנימין הלך במהירות 8 קמ"ש במשך 20 דקות שהן $\frac{1}{3}$ שעה $\left(\frac{20}{60}\right)$. נחשב את המרחק שעבר בנימין: $8 \cdot \frac{1}{3}$

הערה: ניתן לשים לב שהמרחק שאביתר עבר אינו משתנה בהתאם לתשובות, אלא נשאר קבוע – אנו מחשבים מרחק זה בעזרת הנתונים שמופיעים בשאלה עצמה. לכן, אנו יכולים לחסוך את החישוב ולדעת שבכל תשובה המרחק של אביתר יישאר 4 ק"מ .

מאחר שנתון כי בנימין ואביתר נפגשו באמצע, כל אחד מהם אמור ללכת בדיוק אותו מרחק. שימו לב שאין צורך להשלים את החישוב של המרחק אותו עבר בנימין מכיוון שאנו מבינים שהתשובה לא תהיה שלמה ומכאן שלא תהיה שווה ל-4. התשובה נפסלת.

<u>נציב את תשובה (3)</u>: $t = 24$ – כלומר, בנימין יצא בשעה 8:24 והגיע בשעה 8:40. בנימין הלך במהירות 8 קמ"ש במשך 16 דקות שהן $\frac{4}{15}$ שעה $\left(\frac{16}{60}\right)$. נחשב את המרחק שעבר בנימין: $8 \cdot \frac{4}{15}$

כאמור לעיל, גם לפי תשובה זו אביתר עבר מרחק של 4 ק"מ. מאחר שנתון כי בנימין ואביתר נפגשו באמצע, כל אחד מהם אמור ללכת בדיוק אותו מרחק. שימו לב שאין צורך להשלים את החישוב של המרחק אותו עבר בנימין מכיוון שאנו מבינים שהתשובה לא תהיה שלמה ומכאן שלא תהיה שווה ל-4. התשובה נפסלת.

<u>נציב את תשובה (4)</u>: $t = 14$ – כלומר, בנימין יצא בשעה 8:14 והגיע בשעה 8:40. בנימין הלך במהירות 8 קמ"ש במשך 26 דקות שהן $\frac{13}{30}$ שעה $\left(\frac{26}{60}\right)$. נחשב את המרחק שעבר בנימין: $8 \cdot \frac{13}{30}$

כאמור לעיל, גם לפי תשובה זו אביתר עבר מרחק של 4 ק"מ. מאחר שנתון כי בנימין ואביתר נפגשו באמצע, כל אחד מהם אמור ללכת בדיוק אותו מרחק. שימו לב שאין צורך להשלים את החישוב של המרחק אותו עבר בנימין מכיוון שאנו מבינים שהתשובה לא תהיה שלמה ומכאן שלא תהיה שווה ל-4. התשובה נפסלת.

דרך ב' – פתרון מתמטי

אנו מחפשים את t, נעלם אשר מציין את מספר הדקות שעברו מ-8:00 ועד ליציאתו של בנימין. ידוע שבנימין הפסיק ללכת ב-8:40 ועל כן אם נמצא כמה זמן הלך בנימין, נוכל למצוא את t.

ידוע לנו שאביתר ובנימין נפגשו באמצע, כלומר הדרכים שהם עברו שוות. את הדרך שעבר אביתר אנו יכולים למצוא; נתון שאביתר התחיל ללכת בשעה 8:00 והגיע ב-8:40 – כלומר, אביתר הלך במשך $\frac{2}{3}$ שעה $\left(\frac{40}{60}\right)$ במהירות של 6 קמ״ש. המהירות והזמן נתונים ועל כן ניתן למצוא את הדרך לפי הנוסחה: דרך = מהירות · זמן.

$$\frac{2}{3} \cdot 6 = 4$$

מצאנו שאביתר עבר 4 ק״מ, ומכאן שגם בנימין הלך 4 ק״מ. מהירותו של בנימין נתונה – 8 קמ״ש. הדרך והמהירות של בנימין נתונים ועל כן ניתן למצוא את הזמן לפי הנוסחה: זמן $= \frac{\text{דרך}}{\text{מהירות}}$

$$\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

מצאנו שבנימין הלך במשך חצי שעה – 30 דקות. ידוע שהוא הגיע בשעה 8:40 ומכאן שהוא יצא ב-8:10, כלומר t = 10 (10 דקות לאחר 8:00).

צרופים

בשאלות צירופים נתבקש למצוא את מספר האפשרויות השונות לסידור או בחירה של איברים מתוך קבוצה מסוימת. הדרך לפתור שאלות צירופים היא לבדוק מהו מספר האפשרויות בכל שלב בחירה, ולכפול ביניהן.

דוגמה:
במסעדת "בר-סלט" יש 3 סוגים של סלט ו-5 סוגים של משקאות. כמה ארוחות שונות המורכבות מסלט אחד ומשקה אחד ניתן ליצור?

פתרון -
בשלב הראשון עלינו לבחור סלט - יש 3 אפשרויות.
בשלב השני עלינו לבחור משקה - יש 5 אפשרויות.
מספר הצירופים יהיה:

3	$\cdot$	5	=	15
סלט		משקה		

עבור כל אחד מהסלטים שבחרנו אנו יכולים לבחור 5 משקאות שונים, ולכן בסך הכל יש $3\cdot 5$ אפשרויות שונות לארוחה.

עם/בלי החזרה

כאשר אנו בודקים מהו מספר האפשרויות בכל שלב עלינו לשים לב האם האיבר שבחרנו בשלב בקודם "יצא מהמאגר" או שניתן לבחור בו שוב.

דוגמה:
כמה מספרים תלת-ספרתיים שונים ניתן ליצור מהספרות 1-5?

פתרון -
בבחירת הספרה הראשונה יש 5 אפשרויות. בבחירת הספרה השנייה יש גם כן 5 אפשרויות, שכן הספרה שבחרנו כספרה ראשונה "חוזרת" למאגר הספרות וניתן לבחור בה שנית:

5	$\cdot$	5	$\cdot$	5	=	125
ספרת מאות		ספרת עשרות		ספרת אחדות		

דוגמה:
כמה מספרים תלת-ספרתיים בעלי ספרות **שונות** ניתן ליצור מהספרות 1-5?

פתרון -
בבחירת הספרה הראשונה יש 5 אפשרויות, אך במקרה זה הספרה הראשונה שבחרנו "נמחקה" מהמאגר, ואסור לנו לבחור אותה שוב (הספרות של המספר חייבות להיות שונות). לכן, בבחירת הספרה השנייה יש רק 4 אפשרויות.
באותו אופן, לספרה השלישית יש רק 3 אפשרויות, שכן אסור לה להיות זהה לספרה הראשונה או לשנייה:

5	$\cdot$	4	$\cdot$	3	=	60
ספרת מאות		ספרת עשרות		ספרת אחדות		

סידור איברים בשורה

סידור איברים בשורה הוא בעצם סידור רגיל בלי החזרה (לאחר שבחרנו את האיבר הראשון לא ניתן לבחור בו שוב).

דוגמה:
בכמה אפשרויות שונות ניתן לסדר 5 ספרים שונים על המדף?

פתרון -
נכפול בין מספר האפשרויות בכל שלב ושלב:

ראשון		שני		שלישי		רביעי		חמישי		
5	$\cdot$	4	$\cdot$	3	$\cdot$	2	$\cdot$	1	$\cdot$	120

הפעולה שביצענו נקראת ״עצרת״, והיא מסומנת באופן הבא:

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

סידור n איברים בשורה = $n!$

פעולה הדדית

פעולה המתבצעת בין שני איברים בו זמנית. מסיבה זו, כאשר מחשבים את מספר הצירופים על ידי מכפלת אפשרויות נוצרת כפילות, וכל אפשרות נספרת פעמיים. לכן, כאשר מחשבים את מספר האפשרויות בפעולה הדדית, יש לחלק את התוצאה הסופית ב-2.

דוגמה:
5 אנשים לוחצים ידיים זה לזה. אם ידוע כי כל אחד לחץ את ידו הימנית של כל מהאחרים פעם אחת בלבד, כמה לחיצות ידיים היו?

פתרון -
תחילה, עלינו לבחור אדם אחד שיושיט את היד - יש 5 אפשרויות. כעת, עלינו לבחור אדם שני שילחץ את ידו של הראשון - יש 4 אפשרויות (לאחר שבחרנו את האדם הראשון, הוא יכול ללחוץ את היד לכל אחד מהארבעה שנשארו).
מספר הצירופים הוא מכפלת האפשרויות: $5 \cdot 4 = 20$

אולם, מכיוון שמדובר בפעולה הדדית נוצרה הכפלה של האפשרויות.
על פי החישוב שעשינו, כאשר נתי לחץ את היד ליפעת, וכאשר יפעת לחצה את היד לנתי, מדובר בשתי אפשרויות שונות, אך מבחינתנו מדובר <u>באותה לחיצת יד</u>, ולכן עלינו לחלק את התוצאה שקיבלנו ב-2:

״לוחץ״		״נלחץ״				
5	$\cdot$	4	$=$	20	→	$\frac{20}{2} = 10$

דוגמאות לפעולה הדדית: שבילים בין בתים, משחקים בין קבוצות, קווי תעופה בין מדינות, קווים בין נקודות (אלכסונים במצולע) וכו׳.

ניסוי וטעייה

בשאלות אלו דרך הפתרון תהיה פשוט לפרוט את האפשרויות שמקיימות את תנאי השאלה ולספור אותן.

דוגמה:
כמה מספרים בני 3 ספרות ניתן ליצור מהספרות 1-4 כך שספרת האחדות גדולה מספרת העשרות, וספרת העשרות גדולה מספרת המאות?

פתרון -
בשאלה זו עלינו לפרוט אפשרויות ולמצוא את המספרים שעומדים בתנאי השאלה:

4 אפשרויות $\Leftarrow$ 123, 124, 134, 234

חיבור אפשרויות

לעיתים (נדירות יחסית) יהיה עלינו להפריד את החישוב למקרים שונים **<u>ולחבר</u>** בין האפשרויות.

דוגמה:
לאברי יש 2 אופנועים, 3 זוגות אופניים, 3 קסדות ו-5 כפפות רכיבה.
אברי מעוניין להגיע למקום עבודתו באמצעות אופניים או אפנוע.
אם אברי יבחר באופנוע, הוא צריך כפפות רכיבה וקסדה.
אם אברי יבחר באופניים, הוא צריך רק כפפות רכיבה.
כמה אפשרויות שונות יש לאברי לבחור את כלי הרכב ולבוש המגן?

פתרון -
נפריד לשני מקרים:

1. בחר אופנוע:

$$30 = \underset{\text{קסדה}}{\underline{3}} \cdot \underset{\text{כפפות}}{\underline{5}} \cdot \underset{\text{אופנוע}}{\underline{2}}$$

2. בחר אופניים:

$$15 = \underset{\text{כפפות}}{\underline{5}} \cdot \underset{\text{אופניים}}{\underline{3}}$$

כעת נחבר בין האפשרויות: $30 + 15 = 45$

סה"כ 45 אפשרויות.

בחירה משלימה / n-1 מתוך n

בשאלות אלו, מספר האיברים שאנו אמורים לבחור הוא בדיוק אחד פחות ממספר האיברים הכולל בקבוצה, ומספר האפשרויות יהיה שווה **תמיד** למספר האיברים בקבוצה.

דוגמה:
בכמה דרכים שונות ניתן לבחור 5 חיילים מתוך כיתה של 6 חיילים?

פתרון -
במקום להתחיל לחשב אפשרויות ולהסתבך, ניתן להסתכל על זה כך:
במקום לבחור 5 חיילים, נבחר את החייל שנשאר - זה שלא בוחרים אותו. מכיוון שיש 6 חיילים בסך הכל, בכל פעם יכול להישאר חייל אחר - זאת אומרת שיש 6 אפשרויות שחייל כלשהו לא ייבחר.

בפועל, כשאנחנו בוחרים איבר אחד ש"נשאר", זה בדיוק כמו לבחור "לקחת" את 5 האיברים האחרים. זאת אומרת שיש 6 אפשרויות לבחור 5 חיילים מתוך קבוצה של 6.

כאשר בוחרים $n - 1$ איברים מתוך n (אחד פחות מכל האיברים), התשובה היא תמיד n (מספר האיברים).

תרגול שאלות מבחינות אמת

1. 4 חברים נפגשו ולחצו זה את ידי זה. כל אחד מהם לחץ את ידו הימנית של כל אחד מחבריו. הוא לא עשה זאת יותר מפעם אחת עם כל חבר.

כמה לחיצות ידיים היו במפגש?

(1) 6
(2) 8
(3) 12
(4) 16

---

2. $1!\cdot 2!\cdot 3!\cdot 4! = ?$

(1) $2^4\cdot 3^2$
(2) $2^5\cdot 3^2$
(3) $2^4\cdot 3^3$
(4) $2^5\cdot 3^3$

---

3. במקרר של אסף ירקות ירוקים מ-3 סוגים שונים, וירקות אדומים מ-3 סוגים שונים. אסף רוצה להכין סלט מ-2 סוגים **שונים** של ירקות.

כמה סלטים שונים **בצבע אחד** (אדום או ירוק) יוכל אסף להכין?

(1) 6
(2) 9
(3) 3
(4) 8

---

4. לכל פרה ברפת יש מספר מזהה ייחודי (כלומר, אין ברפת שתי פרות או יותר עם אותו מספר מזהה). המספרים המזהים של הפרות הם בני 5 ספרות **שונות** זו מזו שכולן אי-זוגיות.

כמה פרות, לכל היותר, יש ברפת?

(1) 120 (2) 200 (3) 300 (4) 500

---

5. בשפה מסוימת יש 4 אותיות שונות, וכל מילה מורכבת משתי אותיות (זהות או שונות) הנכתבות זו מעל זו.

כמה מילים שונות לכל היותר קיימות בשפה זו?

(1) 4^2 (2) 2^3 (3) 12 (4) 4

פתרתי ____________ שאלות ב ____________ דקות, ____________ תשובות נכונות

6. ל-n אנשים יש 6 אפשרויות שונות להסתדר בתור כאשר יש חשיבות למיקום בתור.

n = ?

(1) 6
(2) 2
(3) 3
(4) 4

---

7. סבא יהושע קנה 3 מתנות שונות ל-3 נכדיו. הוא רוצה לתת מתנה לכל נכד, אך מתלבט איזו מתנה לתת לאיזה נכד.

כמה אפשרויות שונות יש לו לחלוקת המתנות?

(1) 5 (2) 6 (3) 3 (4) 9

---

8. ליאיר יש - שלושה כובעים בצבעים שונים: אדום, לבן וירוק
שלוש חולצות בצבעים שונים: אדום, לבן וירוק
שלושה זוגות מכנסיים בצבעים שונים: אדום, לבן וירוק

כשיאיר מתלבש, הוא תמיד מקפיד לצרף כובע, חולצה ומכנסיים - כל אחד בצבע אחר.

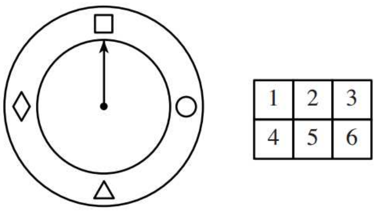
כמה צירופים **שונים** של כובע, חולצה ומכנסיים יכול יאיר ללבוש?

(1) 6 (2) 9 (3) 24 (4) 27

---

9. כדי לפתוח כספת יש לסובב חוגה לעבר אחת מ-4 צורות, ולהקיש בסדר מסוים על 3 ספרות **שונות** מתוך 6 ספרות (ראו סרטוט).
רק צירוף אחד של סיבוב והקשה פותח את הכספת.

מה המספר **המקסימלי** של צירופים שונים שיש לנסות כדי לפתוח את הכספת?



(1) 1,440
(2) 240
(3) 360
(4) 480

---

10. בתחרות שחייה מתמודדות 4 שחייניות. בסוף התחרות כל שחיינית מדורגת באחד מהמקומות - ראשון, שני, שלישי או רביעי (שחיינית אחת בכל מקום).

כמה אפשרויות שונות יש לדירוג שלושת המקומות הראשונים בתחרות?

(1) $4\cdot 3$
(2) $4!\cdot 3!$
(3) $3!$
(4) $4!$

פתרתי ____________ שאלות ב ____________ דקות, ____________ תשובות נכונות

11. לשירה שני זוגות מכנסיים, ארבע חולצות, שמלה אחת ושני זוגות נעליים.
חליפה היא צירוף של שמלה וזוג נעליים **או** צירוף של מכנסיים, חולצה וזוג נעליים.

כמה חליפות השונות זו מזו לפחות בפריט אחד יכולה שירה ללבוש?

(1) 20 (2) 12 (3) 16 (4) 18

---

12. למסיבה באו כמה אנשים. כל אחד מהם לחץ פעם אחת את ידו של כל אחד מהאנשים האחרים. בסך הכול היו 36 לחיצות ידיים במסיבה.

כמה אנשים היו במסיבה?

(1) 5
(2) 6
(3) 9
(4) 11

---

13. לשלמה יש 5 מפתחות שונים, ובאמצעותם הוא צריך לפתוח 5 דלתות שונות (לכל דלת מפתח אחר). שלמה אינו יודע איזה מפתח מתאים לכל דלת, והוא רוצה לפתוח את הדלתות במספר הניסיונות הקטן ביותר.

כמה ניסיונות (כולל ניסיונות מוצלחים) יעשה שלמה **לכל היותר**, עד לפתיחת כל הדלתות?

(1) 10
(2) 13
(3) 15
(4) 25

---

14. בגן ילדים מסוים 5 בנים ו-5 בנות.
הגננת מעוניינת להעמיד את כל הבנים בשורה מימינה, ואת כל הבנות בשורה משמאלה.

בכמה דרכים שונות ניתן להעמיד את הילדים באופן זה?

(1) $2\cdot5^2$
(2) $(5!)^2$
(3) $(2\cdot5)!$
(4) $(5^2)!$

פתרתי ____________ שאלות ב ____________ דקות, ____________ תשובות נכונות

15. קרן רוצה לסדר בשורה 3 כדורים ירוקים זהים ו-4 כדורים אדומים זהים.

בכמה מהסידורים האפשריים **לא** יהיו שני כדורים אדומים זה ליד זה?

(1) 1
(2) $3\cdot 4!$
(3) $3\cdot 4$
(4) $4!$

---

16. דני רוצה לבחור מספר בן x ספרות, שכל ספרותיו שונות מ-0.

יש לו 3^{2n} אפשרויות בחירה.

$x = ?$

(1) n
(2) 2n
(3) 3 + n
(4) אי-אפשר לדעת על פי הנתונים

---

17. הקוד הסודי של כספת מסוימת הוא מספר בן 4 ספרות. הספרה הראשונה היא 5,
וכל אחת מהספרות הבאות **גדולה** מהספרה הקודמת לה.

כמה אפשרויות שונות ייתכנו עבור הקוד הסודי של כספת זו?

(1) 1
(2) 10
(3) 6
(4) 4

---

18. דורון ואפרת שיחקו ב"משחק הניחוש". דורון הטיל 2 קוביות הוגנות שפאותיהן ממוספרות מ-1 עד 6, ואמר לאפרת מה סכום התוצאות שהראו הקוביות. אפרת נדרשה לנחש את שני המספרים שיצרו סכום זה (אין חשיבות לסדר קבלתם).

בכמה מסכומי התוצאות האפשריים, אפרת זקוקה לניחוש אחד בלבד כדי לנחש נכונה?

(1) 1
(2) 5
(3) 6
(4) 4

---

19. קוד סודי של 4 ספרות מקיים שלושה תנאים:
א. כל הספרות שונות מאפס.
ב. הספרה הראשונה שווה לספרה האחרונה.
ג. הספרה השלישית גדולה פי 3 מהספרה השנייה.

כמה אפשרויות יש להרכבת הקוד הסודי?

(1) 1,000 (2) 81 (3) 64 (4) 27

---

20. יואל מעוניין להרכיב סִסמה בת 6 ספרות. הססמה צריכה להיות מורכבת בדיוק מ-2 ספרות שונות, שכל אחת מהן צריכה להופיע 3 פעמים. כמו כן, סכום כל הספרות בססמה צריך להתחלק ב-10 ללא שארית.

כמה זוגות שונים של ספרות יכול יואל לבחור כדי להרכיב את הססמה?

(1) 1
(2) 2
(3) 3
(4) 4

תשובות

שאלה	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
תשובה	1	2	1	1	1	3	2	1	4	4

שאלה	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
תשובה	4	3	3	2	1	1	4	4	4	4

פתרתי 20 שאלות - ______________ נכונות, ______________ אחוזי הצלחה

1. תשובה (1) נכונה. שאלה 6 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – פעולה הדדית

עלינו לחשב כמה לחיצות ידיים היו במפגש. כאמור, 4 חברים לחצו זה את ידי זה. עבור האדם הראשון שמעורב בלחיצת הידיים יש 4 אפשרויות בחירה (כל אחד מהמשתתפים). עבור האדם השני נותרו 3 אפשרויות (שכן אחד האנשים כבר נבחר). כידוע, עלינו לכפול את מספר האפשרויות זה בזה. מאחר שמדובר בפעולה הדדית, יש לחלק מכפלה זו ב-2:

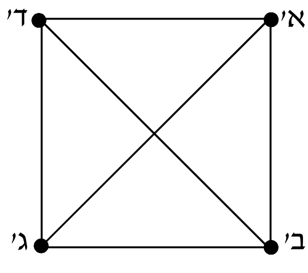
$$\frac{4 \cdot 3}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

דרך ב' – ניסוי וטעייה

4 חברים לחצו זה את ידי זה. כל חבר לחץ את ידו של כל אחד מחבריו פעם אחת בלבד. עלינו לקבוע כמה לחיצות ידיים התבצעו. מפני שהמספרים בתשובות נמוכים למדי, ניתן למנות את האפשרויות באופן ידני. נסמן את שמות החברים באותיות א', ב', ג' ו-ד'.

תחילה, א' לחץ את ידיהם של ב', ג' ו-ד'. 3 לחיצות ידיים.
ב' כבר לחץ את ידו של א'. נותר לו ללחוץ את ידיהם של ג' ו-ד'. 2 לחיצות ידיים.
ג' כבר לחץ את ידו של א' ואת ידו של ב'. נותר לו ללחוץ את ידו של ד' בלבד. לחיצת ידיים אחת.
ד' כבר לחץ את ידיהם של א', ב' ו-ג'.

שימו לב, ניתן להמחיש זאת גם באמצעות שרטוט. נסמן 4 נקודות (א', ב', ג' ו-ד') ונמנה את מספר הקווים שניתן להעביר ביניהם. כל קו מייצג לחיצת ידיים.



בסך הכול היו 6 לחיצות ידיים.

.2 תשובה (2) נכונה. שאלה 6 מתוך 20 בפרק.

עלינו לפשט את הביטוי הנתון, כך שהתוצאה תכיל את הגורמים 2 ו-3 בלבד. תחילה, נפשט את העצרת:

$$1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot 4! = 1 \cdot (1 \cdot 2) \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3) \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4)$$

$$1 \cdot (1 \cdot 2) \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3) \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 4$$

כאמור, התוצאה צריכה להכיל את הבסיסים 2 ו-3. לכן, נציג את 4 כחזקה שבסיסה 2:

$$2^3 \cdot 3^2 \cdot 4 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 2^2 = 2^5 \cdot 3^2$$

.3 תשובה (1) נכונה. שאלה 9 מתוך 20 בפרק.

ירקות ירוקים	1	2	3
ירקות אדומים	X	Y	Z

דרך א' – ניסוי וטעיה
כיוון שמדובר במספר קטן של ירקות והמספרים המופיעים בתשובות המוצעות בשאלה נמוכים, ניתן לבדוק באמצעות ניסוי וטעייה, מה האפשרויות שלנו.
נצייר בצד 6 ירקות, 3 אדומים ו-3 ירוקים, נבדיל בין ירוק לאדום על ידי שימוש במספרים ובאותיות.
כעת נחשוב על הקומבינציות של סלטים בצבע אחד: 1+2, 1+3, 2+3. אין אפשרויות נוספות. חשוב להבחין שאין הבדל בין סדר הבחירה של הירקות – קודם חסה ואז מלפפון, או מלפפון ורק לאחר מכן חסה – הסלט יישאר מורכב משני הירקות בכל מקרה.
אם כן, יש 3 אפשרויות שונות להרכיב סלט בירקות הירוקים, וניתן להסיק שכך גם יהיה בירקות האדומים (כיוון שזה מספר זהה של ירקות).
X+Y, X+Z, Z+Y. ⇐ 3 אפשרויות.
סך הכל, יהיה לאסף 6 אפשרויות שונות להכנת סלט מירקות בצבע זהה.

דרך ב' – צירופים
בשאלה זו חשוב להבין ששואלים אותנו על בחירה של שני ירקות <u>ללא חשיבות לסדר.</u> זה לא משנה אם ייבחר מלפפון ואחר כך חסה או חסה ולאחר מכן מלפפון. הסלט יישאר סלט זהה.
לכן, בחישוב עלינו להתייחס לזה.

***טיפ:** בשאלות צירופים של בחירה ללא חשיבות סדר הבחירה אנו מחלקים במספר הפריטים עצרת(!).

לאסף יש 6 אפשרויות לבחור בירק הראשון, ומשבחר בו עליו לבחור ירק <u>אחר</u> באותו הצבע, ולכן יהיו לו 2 אפשרויות לירק השני (הוא כבר בחר אחד מהשלוש). כיוון שאין חשיבות לסדר הבחירה נחלק במספר הפריטים (בחר שני פריטים) עצרת:

$$\frac{6 \cdot 2}{2!} = \frac{12}{2} = 6$$

.4 תשובה (1) נכונה. שאלה 9 מתוך 20 בפרק.

לפנינו שאלת צירופים.
לכל פרה מספר מזהה המורכב מ-5 ספרות שונות זו מזו ואי-זוגיות. ישנן 5 ספרות אי-זוגיות (1, 3, 5, 7, 9) ולכן לספרה הראשונה יש 5 אפשרויות. כיוון שהספרות צריכות להיות שונות זו מזו, כל הכנסה של ספרה למקום מוציאה אותה ממאגר הספרות שבהן ניתן להשתמש. לכן, מספר האפשרויות יורד ממקום למקום – לספרה הבאה יש 4 אפשרויות, לזו שאחריה 3 אפשרויות וכן הלאה.

ספרה 1		ספרה 2		ספרה 3		ספרה 4		ספרה 5		
5	·	4	·	3	·	2	·	1	=	120

בסך הכול יש 120 אפשרויות שונות למספרים מזהים. כלומר, ברפת יש 120 פרות לכל היותר.

---

5. תשובה (1) נכונה. שאלה 13 מתוך 20 בפרק.

אנו מתבקשים לקבוע כמה מילים שונות לכל היותר קיימות בשפה שבה כל מילה מורכבת משתי אותיות. בשפה יש 4 אותיות שונות. האותיות יכולות להיות שונות או זהות, ולכן עבור כל אחת מהן יש 4 אפשרויות. נכפול בין האפשרויות ונגלה כי כמות האפשרויות השונות המקסימלית למילים בשפה זו היא 4^2 $(4 \cdot 4)$.

משיקולי נוחות נציג את הדרכים כאילו כל אות נכתבת מימין לאות השנייה ולא מעליה (כמובן שלמיקום במרחב אין השפעה על מספר הצירופים האפשריים).

$$\underbrace{4}_{\text{אות ראשונה}} \cdot \underbrace{4}_{\text{אות שנייה}} = 16$$

---

6. תשובה (3) נכונה. שאלה 13 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – נוסחה

ל-n אנשים יש 6 אפשרויות שונות להסתדר בתור. הנוסחה לסידור איברים בשורה היא:

מספר האפשרויות לסידור = !(מספר האיברים)

אם ידוע שישנם 6 סידורים שונים ל-n איברים, אזי $\Leftarrow$ $n! = 6$.

אנו יודעים כי !3 שווה ל-6 ומכאן, ש- $n = 3$.

דרך ב' – הצבת מספרים

ל-n אנשים יש 6 אפשרויות שונות להסתדר בתור. יש חשיבות למיקום בתור. עלינו לקבוע כמה אנשים יש (מה ערכו של n).

אם יש חשיבות לסדר, מספר האפשרויות הוא !n (כאשר n הוא מספר הגורמים). אם למשל יש 5 אנשים, יש !5 אפשרויות לסידורים בתור. עבור המקום הראשון יש 5 אנשים אפשריים, למקום השני נותרו 4 אנשים אפשריים, למקום השלישי נותרו 3 אנשים אפשריים וכך הלאה:

$$\underline{5} \cdot \underline{4} \cdot \underline{3} \quad \underline{2} \cdot \underline{1} = 120$$

כעת נבדוק את התשובות באותו אופן.

טיפ: בהצבת תשובות, כדאי להתחיל בתשובות הנוחות יותר. נתחיל בתשובה הקטנה ביותר כדי לכפול כמה שפחות איברים.

<u>נבדוק את תשובה (2):</u> נחשב את מספר האפשרויות לסידור 2 אנשים בתור:

$$2! \Rightarrow 2 \cdot 1 = 2$$

התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (3):</u> נחשב את מספר האפשרויות לסידור 3 אנשים בתור:

$$3! \Rightarrow 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

תשובה נכונה.

טיפ: מכיוון שהצבנו את התשובות, ברגע שמצאנו תשובה נכונה אין צורך להמשיך לבדוק את שאר התשובות, אך למען שלמות ההסבר נפסול אותן:

<u>נבדוק את תשובה (4):</u> נחשב את מספר האפשרויות לסידור 4 אנשים בתור:

$$4! \Rightarrow 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (1):</u> נחשב את מספר האפשרויות לסידור 6 אנשים בתור:

$$6! \Rightarrow 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 30 \cdot 24 = 720$$

התשובה נפסלת.

---

7. תשובה (2) נכונה. שאלה 13 מתוך 20 בפרק.

לפנינו שאלת צירופים.

כאשר הוא יבחר מתנה לנכד הראשון תהיינה לו 3 אפשרויות. בבחירה לנכד השני נותרו לו רק 2 אפשרויות – אחת המתנות כבר נבחרה לנכד הראשון, ועל כן "נמחקה" ממאגר האפשרויות.
בבחירה השלישית והאחרונה, נותרה רק מתנה אחת שטרם ניתנה לנכדים האחרים ולכן תהיה לו רק אפשרות אחת.

כעת נכפול את האפשרויות:

$$\underset{\text{נכד 1}}{3} \cdot \underset{\text{נכד 2}}{2} \cdot \underset{\text{נכד 3}}{1} = 6$$

---

8. תשובה (1) נכונה. שאלה 14 מתוך 20 בפרק.

יאיר לובש כובע, חולצה ומכנסיים – כל אחד בצבע אחר. נחשב כמה צירופים שונים יכול יאיר ללבוש:
בבחירה הראשונה, כובע לצורך העניין, יש ליאיר 3 אפשרויות (אדום, לבן או ירוק)
בבחירה השנייה, כאשר יאיר בוחר חולצה, נותרו לו רק 2 אפשרויות – אחד הצבעים כבר נבחר לצבע הכובע, ועל כן הוא אינו יכול להיות צבעה של החולצה.
בבחירה השלישית והאחרונה, נותר רק צבע אחד שבו יכול יאיר לבחור (שני הצבעים האחרים כבר "נמחקו" ממאגר האפשרויות כיוון שלא ניתן לבחור שוב בצבעים של הכובע והחולצה).
נכפיל את האפשרויות:

$$\underset{\text{כובע}}{3} \cdot \underset{\text{חולצה}}{2} \cdot \underset{\text{מכנסיים}}{1} = 6$$

---

9. תשובה (4) נכונה. שאלה 15 מתוך 20 בפרק.

עלינו לקבוע מה המספר המקסימלי של צירופים שונים שיש לנסות כדי לפתוח את הכספת. כדי לפתוח אותה, יש לסובב חוגה לעבר אחת מתוך 4 צורות וכן להקיש קוד. כאמור, לצורה המתאימה יש 4 אפשרויות. נבדוק כמה אפשרויות יש לקוד המתאים.

עלינו להקיש על 3 ספרות שונות מתוך 6 ספרות קיימות. עבור הספרה הראשונה קיימות 6 אפשרויות. לספרה השנייה נותרו 5 אפשרויות (לאחר שספרה אחת כבר נבחרה). לספרה השלישית נותרו 4 אפשרויות (לאחר ששתי ספרות כבר נבחרו):

$6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$

כעת נכפול בין מספר האפשרויות לבחירת הצורה לבין מספר האפשרויות להקשת הקוד:

$120 \cdot 4 = 480$

$$\underset{\text{צורה}}{4} \cdot \underset{\substack{\text{ספרה}\\1}}{6} \cdot \underset{\substack{\text{ספרה}\\2}}{5} \quad \underset{\substack{\text{ספרה}\\3}}{4} = 480$$

---

10. תשובה (4) נכונה. שאלה 16 מתוך 20 בפרק.

בתחרות מתמודדות 4 שחייניות. למקום הראשון בתחרות יש 4 אפשרויות. למקום השני נותרו 3 אפשרויות (4 השחייניות, פחות זו שנבחרה). למקום השלישי נותרו 2 אפשרויות (4 השחייניות, פחות השתיים שנבחרו). נחשב את מכפלת האפשרויות:

$4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$

מכיוון שאין תשובה כזו, נפשט את הביטויים שבתשובות.

טיפ: בהצבת תשובות, כדאי להתחיל בתשובות הנוחות יותר.

לא מתאים, התשובה נפסלת	$\Rightarrow$	(1) $4 \cdot 3 = 12$
לא מתאים, התשובה נפסלת	$\Rightarrow$	(3) $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$
מתאים	$\Rightarrow$	(4) $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

טיפ: מכיוון שהצבנו את התשובות, ברגע שמצאנו תשובה נכונה אין צורך להמשיך לבדוק את שאר התשובות, אך למען שלמות ההסבר נפסול את תשובה (4):

לא מתאים, התשובה נפסלת	$\Rightarrow$	(2) $4! \cdot 3! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24 \cdot 6 = 144$

לחלופין, ניתן להבחין בכך שהתשובות מיוצגות בעצרת, ולהמיר את הביטוי שמצאנו לעצרת:

$4 \cdot 3 \cdot 2 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4!$

---

11. תשובה (4) נכונה. שאלה 16 מתוך 20 בפרק.

תחילה נבין את נוסח השאלה: מכיוון שזו שאלת "או", עלינו לחשב את מספר הצירופים האפשרי בכל אחת מן האפשרויות ליצירת חליפה **ולחבר ביניהם**.

צירוף של שמלה וזוג נעליים:
ישנה אפשרות אחת לבחירת שמלה ושתי אפשרויות לבחירת נעליים. נציב את מספר האפשרויות לכל גורם ונכפול ביניהן:

$$\underset{\text{שמלה}}{\underline{\quad 1 \quad}} \cdot \underset{\text{נעליים}}{\underline{\quad 2 \quad}} = 2$$

צירוף של מכנסיים, חולצה וזוג נעליים:
ישנן שתי אפשרויות לבחירת מכנסיים, 4 אפשרויות לבחירת חולצה ושתי אפשרויות לבחירת נעליים. נציב את מספר האפשרויות לכל גורם ונכפול ביניהן:

$$\underset{\text{מכנסיים}}{\underline{\quad 2 \quad}} \cdot \underset{\text{חולצה}}{\underline{\quad 4 \quad}} \cdot \underset{\text{נעליים}}{\underline{\quad 2 \quad}} = 16$$

כעת, נחבר בין מספר הצירופים בכל אחת מן האפשרויות:

$2 + 16 = 18$

---

12. תשובה (3) נכונה. שאלה 16 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הצבת תשובות

מתוארת **פעולה הדדית** – לחיצות ידיים בין כל האנשים במסיבה. נתון שבסך הכול היו 36 לחיצות ידיים ועלינו למצוא כמה אנשים היו במסיבה. נבדוק את התשובות ונבדוק באיזה מקרה יהיו 36 לחיצות ידיים.

טיפ: כדאי להתחיל בהצבת תשובה שערכה המספרי הוא אחד הערכים האמצעיים מבין התשובות המוצעות (ולא התשובה הקטנה ביותר או הגדולה ביותר). כך, אם נמצא שהערך המופיע בתשובה גדול מדי, ייפסלו יחד עם תשובה זו גם התשובות הגדולות יותר ממנה; ואם נמצא שהערך המופיע בתשובה קטן מדי, ייפסלו יחד עם תשובה זו גם התשובות הקטנות יותר ממנה.

נבדוק את תשובה (2):

$$\frac{6\cdot 5}{2}=15$$

לא מתאים, התשובה נפסלת. ככתוב בטיפ, ניתן לראות כי הגענו למספר לחיצות קטן מדי, ועל כן יחד עם תשובה זו ניתן לפסול גם את תשובה (1). למען שלמות ההסבר נפסול אותה באופן מלא:

נבדוק את תשובה (1): תחילה נחשב את הצירופים באופן רגיל – כל אחד מ-5 הנוכחים במסיבה לחץ את ידם של 4 אנשים. מכיוון שמדובר בפעולה הדדית, נחלק ב-2.

$$\frac{5\cdot 4}{2}=10$$

לא מתאים, התשובה נפסלת.

נבדוק את תשובה (3): תחילה נחשב את הצירופים באופן רגיל – 9 אנשים במסיבה לחצו את ידם של 8 אנשים. כאמור, מדובר בפעולה הדדית ולכן נחלק ב-2.

$$\frac{9\cdot 8}{2}=36$$

תשובה נכונה.

טיפ: מכיוון שהצבנו את התשובות, ברגע שמצאנו תשובה נכונה אין צורך להמשיך לבדוק את שאר התשובות, אך למען שלמות ההסבר נפסול את תשובה (4).

נבדוק את תשובה (4):

$$\frac{11\cdot 10}{2}=55$$

לא מתאים, התשובה נפסלת.

דרך ב' – פתרון מתמטי

נתון כי היו במסיבה x אנשים. כל אחד מהם לחץ את ידו לכל שאר האנשים, משמע ל-$(x-1)$ אנשים. הפעולה המתוארת היא פעולה הדדית, ועל כן עלינו לחלק את מספר הצירופים ב-2. כלומר, מספר הלחיצות שהיו הוא:

$$\frac{x\cdot(x-1)}{2}$$

נתון כי בסך הכול היו במסיבה 36 לחיצות, ולכן:

$$\frac{x\cdot(x-1)}{2}=36$$

$$x\cdot(x-1)=72$$

כלומר אנו מחפשים שני מספרים עוקבים שמכפלתם תהיה 72. המספרים המקיימים זאת 8 ו-9.
x הוא הגדול מבין השניים, ולכן היו 9 אנשים במסיבה.

13. תשובה (3) נכונה. שאלה 17 מתוך 20 בפרק.

אנו נשאלים כמה ניסיונות יעשה שלמה לכל היותר. כלומר, עלינו לחשוב על המקרה הגרוע ביותר, שבו שלמה לא יצליח לפתוח את הדלתות מהר, אלא ייכשל שוב ושוב עד שכבר לא יישארו לו אופציות להיכשל.

לשלמה יש 5 דלתות לפתוח, ויש לו 5 מפתחות שונים. הוא ניגש לדלת הראשונה ומנסה לפתוח אותה. הוא ינסה מפתח לאחר מפתח, ובמקרה הגרוע ביותר הוא ייכשל ב-4 הניסיונות הראשונים, ורק בניסיון החמישי (שבו נותר לו רק המפתח האחרון שטרם ניסה) הוא יפתח את הדלת (5 ניסיונות בסך הכול).

כך יקרה גם בדלתות הבאות:

הוא ניגש כעת לדלת השנייה, ויש לו 4 מפתחות (שהרי אחד המפתחות כבר שייך לדלת הראשונה). הוא ייכשל שוב ושוב, עד הניסיון הרביעי והאחרון שבו הוא יפתח את הדלת (4 ניסיונות נוספים);

בדלת השלישית יישארו בידו 3 מפתחות, והוא יצליח רק בניסיון השלישי (3 ניסיונות נוספים);

בדלת הרביעית יהיו רק 2 ניסיונות, והוא יצליח רק בניסיון השני (2 ניסיונות נוספים);

ובדלת האחרונה יישאר לו רק מפתח אחד, והוא בוודאות יפתח את הדלת (ניסיון אחד נוסף).

סך הכול, מספר הניסיונות המקסימלי שמתקבל הוא: $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$.

---

14. תשובה (2) נכונה. שאלה 18 מתוך 20 בפרק.

גננת מעוניינת להעמיד 5 בנים בשורה מימינה ו-5 בנות בשורה משמאלה. נבדוק כמה אפשרויות יש עבור כל בחירה, ונכפול את מספר האפשרויות זה בזה.

תחילה, נתמקד בבנים. ישנם 5 בנים. מספר האפשרויות לסידור 5 ילדים בשורה הוא כידוע $5!$.

ניתן להבין זאת מפני שעבור המקום הראשון בשורה לגננת יש 5 אפשרויות. למקום השני נותרו לה 4 אפשרויות, שכן היא כבר מיקמה את אחד הבנים. למקום השלישי נותרו לה 3 אפשרויות ($5-2$). למקום הרביעי נותרו לה 2 אפשרויות ($5-3$) ולמקום החמישי נותרה לה אפשרות אחת ($5-4$). נכפול את מספר האפשרויות. נשים לב שבתשובות יש שימוש בעצרת ולכן נשאף להגיע לביטוי עם עצרת:

$$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5!$$

באותו אופן, גם מספר האפשרויות למיקום הבנות בשורה הוא $5!$, שכן יש 5 בנות.

עתה, מכיוון שלכל סידור של הבנות ניתן להתאים כול אחד מ-$5!$ הסידורים של הבנים, נכפול את מספר האפשרויות לסידור הבנות במספר האפשרויות לסידור הבנים:

$$5! \cdot 5! = (5!)^2$$

---

15. תשובה (1) נכונה. שאלה 18 מתוך 20 בפרק.

עלינו להגיע למצב בו לא יהיו שני כדורים אדומים זה ליד זה. ישנם 3 כדורים ירוקים זהים ו-4 כדורים אדומים זהים. כדי שלא יהיו שני כדורים אדומים צמודים, עלינו להציב כדור ירוק שיפריד ביניהם. הסידור היחיד המתאים ייראה כך:

מאחר שהכדורים זהים, החלפתם לא משנה דבר ולכן אין לה משמעות. כלומר, יש סידור אחד אפשרי בלבד.

---

16. תשובה (1) נכונה. שאלה 19 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – פתרון מתמטי

דני רוצה לבחור מספר בן x ספרות שכל ספרותיו שונות מ-0. כלומר, לדני יש x בחירות לבצע ועבור כל בחירה יש לו 9 אפשרויות (ספרות 1-9). לפיכך, מספר האפשרויות של דני הוא כלהלן:

$$\underbrace{9\cdot 9\cdot 9\cdot 9\cdot \ldots\ldots \cdot 9}_{\text{פעמים } x}$$

משמע, לדני יש 9^x אפשרויות. ידוע שמספר האפשרויות של דני הוא 3^{2n}. עלינו לבטא את x באמצעות n. לשם כך, נשווה בין הביטויים המתארים את מספר האפשרויות של דני.

$9^x = 3^{2n}$

כדי לפתור משוואה מעריכית, עלינו להגיע למצב בו הבסיסים שווים וכך נוכל להשוות בין המעריכים. תחילה, נפשט את האגף השמאלי של המשוואה:

$9^x = (3^2)^x = 3^{2x}$

כעת נשווה בין אגפי המשוואה:

$3^{2x} = 3^{2n}$

מכיוון שהבסיסים שווים, ניתן להשוות בין המעריכים:

$2x = 2n \quad \Rightarrow \quad x = n$

דרך ב' – הצבת מספרים

עלינו לבטא את x באמצעות n. ניתן להציב מספר במקום אחד הנעלמים ולחפש תשובה מתאימה. נציב $x = 1$.

כלומר, דני רוצה לבחור מספר בן ספרה אחת השונה מ-0. יש לו 9 אפשרויות שונות (כל אחת מהספרות 1-9).

משמע, הביטוי 3^{2n} שווה ל-9.

$3^{2n} = 9$

כדי לפתור משוואה מעריכית, עלינו להגיע למצב בו הבסיסים שווים וכך נוכל להשוות בין המעריכים.

$3^{2n} = 3^2$

נשווה בין המעריכים:

$2n = 2 \quad \Rightarrow \quad n = 1$

כלומר, עבור $x = 1$, גם $n = 1$.

כעת, נציב גם בתשובות $n = 1$ ונחפש תשובה השווה ל-1. נשים לב שמכיוון שהשתמשנו בהצבת מספרים במקום הנעלמים, עלינו לפסול 3 תשובות בטרם נוכל לסמן תשובה נכונה.

(1) $n \Rightarrow 1 \quad \Rightarrow$ **מתאים**

(2) $2n \Rightarrow 2\cdot 1 = 2 \quad \Rightarrow$ לא מתאים, התשובה נפסלת

(3) $3 + n \Rightarrow 3 + 1 = 4 \quad \Rightarrow$ לא מתאים, התשובה נפסלת

את תשובה (4) לא ניתן לפסול בהצבה, וצריך להגיע להבנה מסוימת כי התשובה איננה נכונה (ההוכחה לכך בדרך א'). יחד עם זאת, ניתן לבצע הצבה נוספת ולבדוק האם גם בה תשובה (1) היא הנכונה. אם נמצא שכן, הסיכוי שזוהי התשובה הנכונה (ולא תשובה (4)) גדל.

נציב $x = 2$. כלומר, דני רוצה לבחור מספר בן שתי ספרות. לכל אחת מהן 9 אפשרויות ולכן יש בסך הכול 81 אפשרויות ($9 \cdot 9$). משמע, הביטוי 3^{2n} שווה ל-81.

$3^{2n} = 81$

כדי לפתור משוואה מעריכית, עלינו להגיע למצב בו הבסיסים שווים וכך נוכל להשוות בין המעריכים.

$3^{2n} = 3^4$

נשווה בין המעריכים:

$2n = 4 \quad \Rightarrow \quad n = 2$

כלומר, עבור $x = 2$, גם $n = 2$.

כעת, נציב גם בתשובות $n = 2$ ונחפש תשובה השווה ל-2. נשים לב שמכיוון שהשתמשנו בהצבת מספרים במקום הנעלמים, עלינו לפסול 3 תשובות בטרם נוכל לסמן תשובה נכונה.

מתאים $\Rightarrow$ (1) $n \Rightarrow 2$

לא מתאים, התשובה נפסלת $\Rightarrow$ (2) $2n \Rightarrow 2 \cdot 2 = 4$

לא מתאים, התשובה נפסלת $\Rightarrow$ (3) $3 + n \Rightarrow 3 + 2 = 5$

לאחר שתי הצבות התשובה המתאימה היא עדיין תשובה (1). אין הדבר מבטיח כי תשובה (4) איננה נכונה אך סיכוי סביר שתשובה (1) היא התשובה הנכונה.

.17 תשובה (4) נכונה. שאלה 19 מתוך 20 בפרק.

הקוד הסודי של כספת מורכב מ-4 ספרות. הראשונה היא 5 וכל אחת מהספרות גדולה מזו שקדמה לה. ההגבלות והתנאים בשאלה מורכבים מדי כדי לנסות לפתור אותה בצורה הרגילה של מכפלת האפשריות, לכן נשים לב שהתשובות המוצעות הן מספרים נמוכים וניתן לבדוק באופן ידני את האפשרויות להרכבת קוד. נבדוק את האפשרויות בסדר עולה

5678
5679
5689
5789

בסך הכול ישנן 4 אפשרויות עבור הקוד הסודי של כספת זו.

.18 תשובה (4) נכונה. שאלה 19 מתוך 20 בפרק.

אפרת תהיה זקוקה לניחוש אחד בלבד כאשר יש אפשרות אחת שתביא לסכום שהתקבל בהטלת הקוביות. נבדוק את כל הסכומים האפשריים המתקבלים מהטלת שתי קוביות, ונמנה כמה סכומים קיימים אשר ניתן להגיע אליהם בדרך אחת בלבד. ברגע שנמצא יותר מדרך אחת, ניתן לפסול את הסכום הנבדק ולהמשיך לסכום הבא:

סכום 2: 1 + 1. **מתאים.**
סכום 3: 1 + 2. **מתאים.**
סכום 4: 2 + 2 או 1 + 3. לא מתאים.
סכום 5: 3 + 2 או 1 + 4. לא מתאים.
סכום 6: 3 + 3 או 2 + 4 או 1 + 5. לא מתאים.
סכום 7: 3 + 4 או 2 + 5 או 1 + 6. לא מתאים.
סכום 8: 4 + 4 או 3 + 5 או 2 + 6. לא מתאים.
סכום 9: 4 + 5 או 3 + 6. לא מתאים.
סכום 10: 5 + 5 או 4 + 6. לא מתאים.
סכום 11: 6 + 5. **מתאים.**
סכום 12: 6 + 6. **מתאים.**

בסך הכול ישנם 4 סכומים שדורשים ניחוש אחד בלבד.

שימו לב, כאשר בדקנו את הדרכים להגעה לכל סכום, למעשה הפחתנו מאחת הקוביות והוספנו לשנייה, במטרה שהסכום יישאר זהה. למשל, כדי להגיע לסכום 4 הקוביות יכולות להציג 2 ו-2. נפחית 1 מאחת הקוביות ונוסיף 1 לשנייה ונקבל 3 ו-1.
באפשרויות הקיצוניות לא ניתן לעשות זאת, שכן המספר המוצג עליהן לא יכול להיות נמוך מ-1 או גבוה מ-6. אם מבחינים בכך, ניתן לדלג על הסכומים האמצעיים ולבדוק רק את הקיצוניים.

---

19. תשובה (4) נכונה. שאלה 19 מתוך 20 בפרק.

לפנינו שאלת צירופים.
עלינו למצוא כמה אפשרויות יש להרכבת קוד סודי המורכב מארבע ספרות. נכתוב כל תנאי תחת הספרה שעליה הוא משפיע.

1	·	1	·	3	·	9
שונה מ-0 שווה לספרה הראשונה		שונה מ-0 גדולה מהספרה השנייה פי 3		שונה מ-0 1, 2 או 3		שונה מ-0

א' - כל הספרות שונות מאפס.

ב' - הספרה הראשונה שווה לאחרונה. כלומר, ישנן 9 אפשרויות לבחירת הספרה הראשונה (כל הספרות למעט 0), ואפשרות אחת לבחירת הספרה האחרונה כך שתהיה זהה לראשונה.

ג' - הספרה השלישית גדולה פי 3 מהספרה השנייה. לכן, בבחירת הספרה השנייה עלינו לבחור ספרה שכאשר נכפיל אותה ב-3, התוצאה תהיה חד-ספרתית. הספרות היחידות שמתאימות הן 1, 2 ו-3. מכאן שלספרה השנייה יש 3 אפשרויות. הספרה השלישית צריכה להיות גדולה מהשנייה פי 3 ולכן יש לה רק אפשרות אחת.

בסך הכול ישנן 27 אפשרויות ($1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 9$).

---

20. תשובה (4) נכונה. שאלה 20 מתוך 20 בפרק.

תחילה נבין את נוסח השאלה: הקוד מורכב משתי ספרות שונות שכל אחת חוזרת על עצמה 3 פעמים. בשאלה אנו נשאלים למעשה כמה זוגות שונים מקיימים את הנתונים ולא כמה סיסמות תיתכנה, לכן אפשר להבין כי סדר הספרות אינו רלוונטי.
כמו כן, עלינו להבין כי סכומן של שתי הספרות השונות חייב להתחלק ב-10. רק כך סכום 6 הספרות, הגדול פי 3 מסכום שתי הספרות השונות, יתחלק גם הוא ב-10 ללא שארית.
נבדוק לגבי כל מספר עם איזה מספר עליו להתחבר על מנת להרכיב סכום המתחלק ב-10:

אם בסיסמה מופיעה הספרה 1 היא חייבת "להיצמד" לספרה 9 כדי להגיע לסכום 10 ← 191919
אם בסיסמה מופיעה הספרה 2 היא חייבת "להיצמד" לספרה 8 כדי להגיע לסכום 10 ← 282828
אם בסיסמה מופיעה הספרה 3 היא חייבת "להיצמד" לספרה 7 כדי להגיע לסכום 10 ← 373737
אם בסיסמה מופיעה הספרה 4 היא חייבת "להיצמד" לספרה 6 כדי להגיע לסכום 10 ← 464646

אלו הן כל האפשרויות של הזוגות ולכן ישנם רק 4 זוגות המקיימים את הנתונים.

הסתברות

ההסתברות (הסיכוי) שמאורע (אירוע, מקרה) מסוים יקרה היא ניסיון לאמוד את הסבירות שהוא יקרה, והיא תמיד מובעת כשבר, כאשר המונה הוא מספר המאורעות הרצויים, והמכנה הוא מספר המאורעות האפשריים $\left(\frac{\text{רצוי}}{\text{מצוי}}\right)$.

$0 \le$ הסתברות ≤ 1

דוגמה:
מטילים פעם אחת קובייה הוגנת. מה ההסתברות לקבל מספר זוגי?

פתרון -
יש 3 אפשרויות רצויות (2,4,6) מתוך 6 אפשרויות בסך הכל, לכן ההסתברות תהיה שווה ל-

$$\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

דוגמה:
בכד יש כדורים שחורים בלבד. מה ההסתברות להוציא מהכד כדור לבן?

פתרון - מכיוון שאין בכד כדורים לבנים, ההסתברות היא 0.

הסתברות של מספר מאורעות (וגם / או)

ההסתברות להתרחשותם של כמה מאורעות תלויה בקשר ביניהם.

קשר של "**וגם**" ← כופלים בין ההסתברויות

קשר של "**או**" ← מחברים בין ההסתברויות (נדיר בבחינה)

דוגמה:
מטילים פעם אחת קובייה הוגנת שעל פאותיה המספרים 1-6, ופעם אחת מטבע הוגן.
מה ההסתברות לקבל "פלי" במטבע ו-3 בקובייה?

פתרון - נחשב את ההסתברות בעזרת מכפלת הסתברויות ("וגם"):

$$\frac{1}{12} = \underset{\text{קובייה}}{\frac{1}{6}} \cdot \underset{\text{מטבע}}{\frac{1}{2}}$$

"**קוביות הוגנות**" - זה ניסוח שהמרכז הארצי משתמש בו לתאר קוביות רגילות (בניגוד לקוביות לא הוגנות, שיכולות ליפול על מספר מסוים יותר פעמים מאשר על מספר אחר)

בחירה ראשונה לא משנה

דוגמה:
מטילים שתי קוביות הוגנות שעל פאותיהן המספרים 1-6.
מה ההסתברות לקבל פעמיים את אותו מספר?

פתרון -

בקובייה הראשונה התוצאה לא משנה, ולכן ההסתברות היא $\frac{6}{6}$ (או 1).

בקובייה השנייה צריך לקבל את אותו מספר שקיבלנו בקובייה הראשונה, ולכן ההסתברות היא $\frac{1}{6}$.

נכפול בין ההסתברויות:

$$\frac{6}{6}\cdot\frac{1}{6}=1\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$$

עם/בלי החזרה

בכל שאלה, עלינו לשים לב האם לאחר שבחרנו איבר מסוים ניתן לבחור בו שוב, או שהוא יוצא מה"מאגר".

דוגמה:
בכד 3 כדורים אדומים ו-3 צהובים בלבד.
מה הסיכוי בהוצאת 2 כדורים (ללא החזרה) שכל אחד מהם יהיה בצבע שונה?

פתרון -

צבעו של הכדור הראשון אינו משנה, ולכן ההסתברות להוצאתו שווה ל- $\frac{6}{6}$ (או 1).

השני צריך להיות מהצבע השני, אך כעת יש בכד רק 5 כדורים, ולכן ההסתברות להוצאתו שווה ל- $\frac{3}{5}$:

$$\frac{6}{6}\cdot\frac{3}{5}=1\cdot\frac{3}{5}=\frac{3}{5}$$

הסתברות משלימה

סכום כל ההסתברויות האפשריות תמיד ישלים ל-1.

דוגמה:

בכד 15 כדורים, חלקם שחורים וחלקם לבנים. הסיכוי להוצאת כדור שחור שווה ל- $\frac{2}{5}$.

כמה כדורים לבנים יש בכד?

פתרון -

הסיכוי להוציא כדור לבן משלים את $\frac{2}{5}$ ל-1, ולכן שווה ל- $\frac{3}{5}$:

$$\frac{\text{כדורים לבנים}}{\text{סה"כ כדורים}}=\frac{x}{15}=\frac{3}{5}\quad\Rightarrow\quad x=\frac{15\cdot 3}{5}=9$$

היסטוריה

הסתברות לא יודעת היסטוריה... ההסתברות להתרחשותו של מאורע מסוים לא תלויה במאורעות שקרו בעבר. כאשר אנו רוצים לחשב הסתברות של מאורע שאמור לקרות, אסור להתחשב במאורעות שכבר קרו - גם אם נראה לנו שהסיכוי שמצב כזה יקרה הוא נמוך.

דוגמה:

יורם הטיל 4 פעמים מטבע הוגן ובכל ההטלות קיבל "פלי". ארבל הטיל 4 פעמים מטבע הוגן ובכל ההטלות קיבל "עץ".
יורם וארבל מעוניינים להטיל כל אחד את המטבע שלו פעם נוספת.
מה ההפרש בין ההסתברות שיורם יקבל "עץ" להסתברות שארבל יקבל "עץ"?

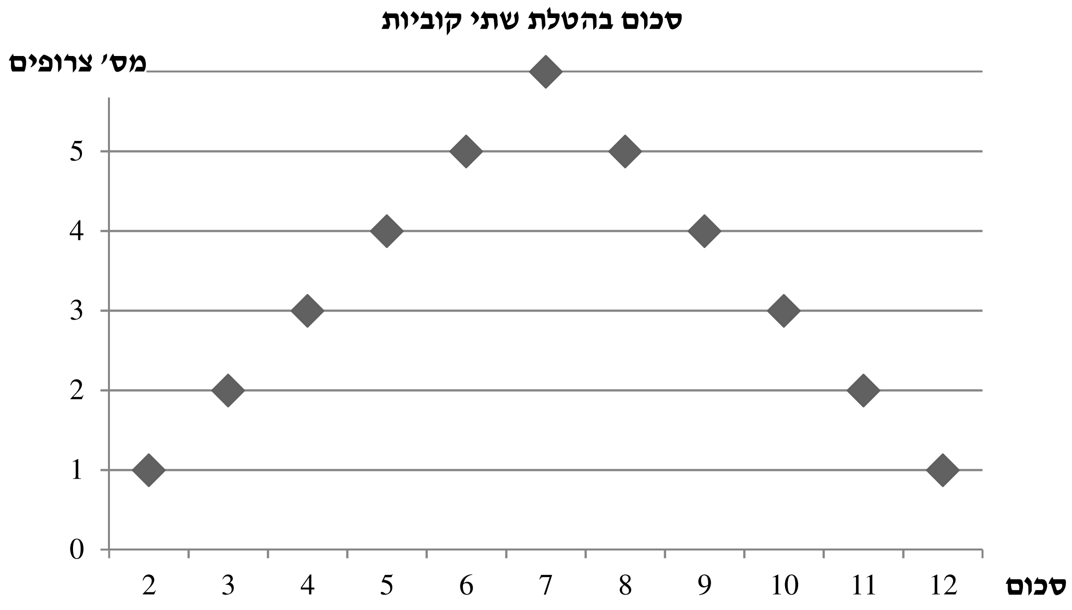
פתרון -

מה שקרה בעבר אינו משפיע על העתיד, לכל אחד מהם יש סיכוי של $\frac{1}{2}$ לקבל "עץ", ולכן ההפרש הוא 0.

סימטריה בקוביות

כאשר אנו נשאלים לגבי ההסתברות לקבל סכום מסוים בהטלת שתי קוביות, בחלק גדול מהמקרים אין צורך לחשב את ההסתברות המדויקת לקבלת הסכום, אלא רק לדעת איזה סכום מתקבל בהסתברות גבוהה יותר.

ההסתברויות לקבלת סכומים שונים בהטלת שתי קוביות מתחלקות בצורה סימטרית, כך שההסתברות לקבל את הסכום 7 היא הגבוהה ביותר, וככל שמתרחקים מ-7 (לא משנה לאיזה כיוון), ההסתברות יורדת.



דוגמה:

A - ההסתברות לקבלת סכום 10 בהטלת שתי קוביות הוגנות.

B - ההסתברות לקבלת סכום 4 בהטלת שתי קוביות הוגנות.

איזו מהטענות הבאות נכונה בהכרח?

(1) $A < B$

(2) $B < A$

(3) $A = B$

(4) אי אפשר לדעת מהנתונים

פתרון -

אין צורך לחשב דבר. מכיוון שגם 10 וגם 4 רחוקים מ-7 בדיוק ב-3, ההסתברות שלהם שווה (עקרון הסימטריה).

תשובה (3) נכונה.

תרגול שאלות מבחינות אמת

1. בשק 10 כדורים אדומים ו-10 כדורים כחולים.
יוסי הוציא כדור כחול מהשק והשאירו בחוץ. אחר כך הוא הוציא מהשק כדור נוסף.

מה ההסתברות שהכדור השני שהוציא יוסי הוא **אדום**?

(1) $\frac{10}{19}$ (2) $\frac{11}{19}$ (3) $\frac{9}{20}$ (4) $\frac{10}{20}$

---

2. בכד 11 כדורים בצבעים שונים. הסיכוי להוציא מהכד כדור לבן שווה לסיכוי להוציא מהכד כדור שחור.

איזה מן המספרים הבאים יכול להיות מספר הכדורים השחורים בכד?

(1) 5
(2) 6
(3) 7
(4) 8

---

3. מטילים יחד שתי קוביות הוגנות.

מה ההסתברות שיתקבל אותו מספר בשתי הקוביות?

(1) $\frac{1}{18}$ (2) $\frac{1}{12}$ (3) $\frac{1}{9}$ (4) $\frac{1}{6}$

---

4. במפעל א' מייצרים 100 נורות ביום, ומהן 10 פגומות.
במפעל ב' מייצרים 50 נורות ביום, ומהן 15 פגומות.

אם נבחר באקראי נורה מן התוצרת היומית המשותפת של שני המפעלים,
מה הסיכוי שהיא **לא** תהיה פגומה?

(1) $\frac{5}{6}$ (2) $\frac{11}{20}$ (3) $\frac{2}{3}$ (4) $\frac{4}{5}$

פתרתי ____________ שאלות ב ____________ דקות, ____________ תשובות נכונות

5. במשחק מסוים מטילים שתי קוביות הוגנות (שפאותיהן ממוספרות מ-1 עד 6).
על השחקן לנחש מה **סכום** המספרים שיראו שתי הקוביות.
אם השחקן מנחש נכונה הוא זוכה בפרס.

איזה מהסכומים הבאים כדאי ביותר לנחש במשחק זה?

(1) 11
(2) 2
(3) 7
(4) 4

---

6. בכד יש 24 כדורים בשלושה צבעים: ירוקים, צהובים וכחולים. ההסתברות להוציא באקראי כדור ירוק היא $\frac{1}{4}$, וההסתברות להוציא באקראי כדור צהוב היא $\frac{1}{3}$.

כמה כדורים **כחולים** יש בכד?

(1) 12
(2) 10
(3) 7
(4) 6

---

7. בקופסה 5 כדורים לבנים, 5 כדורים שחורים ו-5 כדורים אדומים.
צביקה הוציא מהקופסה 3 כדורים מאותו הצבע בזה אחר זה, בלי להחזירם.

כעת צביקה מוציא באקראי כדור רביעי, מה ההסתברות שצבעו כצבעם של שלושת הכדורים הראשונים?

(1) $\frac{1}{6}$
(2) $\frac{2}{15}$
(3) $\frac{1}{3}$
(4) $\frac{3}{12}$

---

8. מה ההסתברות שבזריקת קובייה הוגנת 3 פעמים, תהיינה שתי התוצאות הראשונות זוגיות והתוצאה השלישית אי-זוגית?

(1) $\frac{1}{8}$ (2) $\frac{1}{12}$ (3) $\frac{1}{6}$ (4) $\frac{1}{4}$

פתרתי ____________ שאלות ב ____________ דקות, ____________ תשובות נכונות

9. בשק יש 12 כדורים: 3 כחולים, 3 ירוקים, 3 צהובים ו-3 אדומים.
עופר הוציא כדור באקראי והחזירו לשק. הוא חזר על הפעולה 3 פעמים בסך הכול.

מה ההסתברות ש-3 הכדורים שהוציא עופר הם כחולים?

(1) $\frac{1}{12^3}$ (2) $\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{11}\cdot\frac{1}{12}$ (3) $\frac{1}{24}$ (4) $\frac{1}{4^3}$

---

10. בשק **א** יש 10 כדורים: 5 אדומים ו-5 כחולים.
בשק **ב** יש 8 כדורים: 2 אדומים ו-6 כחולים.
יעל בוחרת באקראי את אחד השקים, ומוציאה באקראי כדור אחד מן השק שבחרה.

מה ההסתברות שהכדור אדום?

(1) $\frac{2}{5}$ (2) $\frac{7}{18}$ (3) $\frac{3}{8}$ (4) $\frac{4}{9}$

---

11. שם, חם ויפת הטילו, כל אחד, קוביית משחק הוגנת שפאותיה ממוספרות מ-1 עד 6.

מה ההסתברות **שרק** הקובייה שהטיל יפת תיפול על המספר 6?

(1) $\frac{1}{216}$ (2) $\frac{25}{216}$ (3) $\frac{25}{36}$ (4) $\frac{1}{6}$

---

12. לנטלי יש 3 זוגות גרביים - לבנים, שחורים ואדומים, ו-2 זוגות נעליים - לבנות ושחורות.
נטלי בוחרת באקראי את אחד מזוגות הגרביים ואת אחד מזוגות הנעליים.

מה הסיכוי שצבע הגרביים יהיה כצבע הנעליים?

(1) $\frac{4}{5}$ (2) $\frac{2}{5}$ (3) $\frac{1}{3}$ (4) $\frac{1}{6}$

---

13. ארנון מטיל קובייה הוגנת שוב ושוב, ומפסיק כאשר תוצאת ההטלה היא 6.

מה ההסתברות שארנון יטיל את הקובייה **בדיוק** 4 פעמים?

(1) $\frac{1}{4}$ (2) $\left(\frac{1}{6}\right)^4$ (3) $\frac{5^3}{6^4}$ (4) $\frac{5}{6^3}$

פתרתי ____________ שאלות ב ____________ דקות, ____________ תשובות נכונות

.14 כל משתתף בהגרלה מסוימת מגריל באקראי מספר שלם בין 0 ל-9, וזוכה בנקודות:
אם המספר שיצא קטן מ-5, מוסיפים למספר 1 וזה מספר הנקודות של המשתתף.
אם המספר גדול מ-5 או שווה לו, מחסירים מהמספר 1 וזה מספר הנקודות של המשתתף.

צביקה השתתף פעמיים בהגרלה. מה הסיכוי שמספר הנקודות שבו זכה צביקה היה שווה ל-4 בפעם הראשונה ושונה מ-4 בפעם השנייה?

(1) $\frac{1}{5}$ (2) $\frac{2}{25}$ (3) $\frac{2}{5}$ (4) $\frac{4}{25}$

.15 לרחל יש 3 טבעות: כחולה, אדומה וצהובה, ובכל יום היא עונדת רק אחת מהן.
בכל יום היא בוחרת באקראי אחת מ-2 הטבעות שלא ענדה ביום הקודם.

ידוע כי ביום ראשון ענדה רחל את הטבעת הכחולה. מה ההסתברות שביום שלישי באותו שבוע היא תענוד את הטבעת הצהובה?

(1) $\frac{2}{3}$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) $\frac{1}{3}$ (4) $\frac{1}{4}$

.16 לאיריס יש קובייה הוגנת שפאותיה ממוספרות מ-1 עד 6, ומטבע הוגן שעל צִדו האחד רשום המספר 0 ועל צִדו האחר רשום המספר 1.
איריס מטילה את הקובייה פעם אחת ולאחר מכן מטילה את המטבע פעמיים.

מה הסיכוי שסכום המספרים שיתקבלו מהטלות המטבע יהיה **גדול** מהמספר שיתקבל מהטלת הקובייה?

(1) $\frac{1}{24}$ (2) $\frac{1}{12}$ (3) $\frac{1}{6}$ (4) $\frac{1}{4}$

.17 למיכל יש 4 חברות: איילת, איריס, אורית ואסנת. מיכל קנתה מחברת, אלבום ו-2 ספרים וחילקה אותם באקראי בין 4 חברותיה. כל חברה קיבלה פריט אחד.

מה ההסתברות שאיריס ואורית קיבלו ספר?

(1) $\frac{1}{16}$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) $\frac{1}{3}$ (4) $\frac{1}{6}$

.18 רוני מטיל מטבע **לא** הוגן.
ההסתברות שהמטבע של רוני ייפול על "עץ" היא $\frac{3}{4}$ מההסתברות שהמטבע ייפול על "פלי".

מה ההסתברות שהמטבע ייפול על "עץ"?

(1) $\frac{4}{13}$ (2) $\frac{9}{16}$ (3) $\frac{3}{7}$ (4) $\frac{1}{4}$

פתרתי ___________ שאלות ב ___________ דקות, ___________ תשובות נכונות

19. על צִדו האחד של מטבע הוגן רשומה הספרה 1 ועל צִדו האחר רשומה הספרה 2.
אורן מטיל את המטבע שלוש פעמים.

מה הסיכוי שסכום הספרות שיתקבלו משלוש ההטלות יהיה זוגי?

(1) $\frac{1}{8}$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) $\frac{3}{8}$ (4) $\frac{1}{4}$

---

20. לדני יש p שקים. בתוך כל אחד מהם יש n קלפים, הממוספרים במספרים מ-1 עד n.
דני מוציא באקראי קלף אחד מכל אחד מהשקים.

מה הסיכוי שעל **כל** הקלפים שהוציא דני רשום המספר 1?

(1) $\frac{1}{p^n}$ (2) $\frac{p}{n}$ (3) $\frac{1}{np}$ (4) $\frac{1}{n^p}$

פתרתי ____________ שאלות ב ____________ דקות, ____________ תשובות נכונות

תשובות

שאלה	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
תשובה	1	1	4	1	3	2	1	1	4	3

שאלה	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
תשובה	2	3	3	4	4	1	4	3	2	4

פתרתי 20 שאלות - ______________ נכונות, ______________ אחוזי הצלחה

1. תשובה (1) נכונה. שאלה 1 מתוך 20 בפרק.

בשק היו 10 כדורים אדומים ו-10 כדורים כחולים. יוסי הוציא כדור כחול מהשק. בשלב זה נותרו בשק 10 כדורים אדומים ו-9 כדורים כחולים. עלינו לחשב את ההסתברות שהכדור השני שהוציא יוסי הוא אדום.

כאמור, בשלב זה יש 10 כדורים אדומים. בסך הכול יש 19 כדורים. כלומר, יש 10 אפשרויות רצויות מתוך 19 מצויות. ההסתברות היא $\frac{10}{19}$.

---

2. תשובה (1) נכונה. שאלה 3 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הבנה

בכד 11 כדורים בצבעים שונים. לא ידוע לנו מספר הצבעים, אולם ידוע שהסיכוי להוציא מהכד כדור לבן שווה לסיכוי להוציא כדור שחור. משמע, מספר הכדורים הלבנים בכד שווה למספר הכדורים השחורים בכד.
לפיכך, מספר הכדורים השחורים הוא לכל היותר מחצית מסך כל הכדורים בכד. הואיל ומספר הכדורים השחורים היה יותר מחצי, לא יכול היה להיות שהיה מספר זהה של לבנים, מפני שאז היינו עוברים את השלם.
מחצית מ-11 זה $5\frac{1}{2}$. מכיוון שלא יתכן חצי כדור, אז מספר הכדורים השחורים המקסימאלי בכד הוא 5. רק תשובה (1) מתאימה.

דרך ב' – הצבת תשובות

בכד 11 כדורים בצבעים שונים. לא ידוע לנו מספר הצבעים, אולם ידוע שהסיכוי להוציא מהכד כדור לבן שווה לסיכוי להוציא כדור שחור. משמע, מספר הכדורים הלבנים בכד שווה למספר הכדורים השחורים בכד. נבדוק את התשובות.

<u>נבדוק את תשובה (1):</u> בכד ישנם 5 כדורים שחורים. לפיכך, מספר הכדורים הלבנים הוא גם כן 5. הכדור הנוסף יכול להיות בצבע שונה (צהוב למשל), וכך יהיו בסך הכול 11 כדורים. מתאים, **תשובה נכונה.**

טיפ: מכיוון שהצבנו את התשובות, ברגע שמצאנו תשובה נכונה אין צורך להמשיך לבדוק את שאר התשובות, אך למען שלמות ההסבר נפסול אותן:

<u>נבדוק את תשובה (2):</u> בכד ישנם 6 כדורים שחורים. לפיכך, מספר הכדורים הלבנים הוא גם כן 6. בסך הכול בשלב זה יש 12 כדורים – יותר מדי. לא מתאים, התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (3):</u> בכד ישנם 7 כדורים שחורים. לפיכך, מספר הכדורים הלבנים הוא גם כן 7. בסך הכול בשלב זה יש 14 כדורים – יותר מדי. לא מתאים, התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (4):</u> בכד ישנם 8 כדורים שחורים. לפיכך, מספר הכדורים הלבנים הוא גם כן 8. בסך הכול בשלב זה יש 16 כדורים – יותר מדי. לא מתאים, התשובה נפסלת.

דרך ג' – פתרון מתמטי

נציב את מספר הכדורים השחורים בכד כ-b. ידוע, כאמור, שמספר הכדורים השחורים בכד שווה למספר הכדורים הלבנים. מכאן, שבכד גם b כדורים לבנים. בכד בסה"כ 11 כדורים ולא ידוע לנו האם ישנם כדורים בצבעים שונים. נבנה אי-שוויון מתאים:

$$b + b \leq 11$$
$$2b \leq 11$$

נחלק את האי-שוויון ב-2:

$$b \leq 5.5$$

מכיוון שמספר הכדורים חייב להיות מספרים שלם, b הוא לכל היותר 5. תשובה (1) היחידה שמתאימה.

.3 תשובה (4) נכונה. שאלה 5 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – בחירה ראשונה

שואלים מה ההסתברות שנקבל בשתי קוביות הוגנות את אותו המספר. בשאלות כאלו ניתן לעבוד גם בשלבים (כאילו הטלנו קובייה לאחר קובייה, ולא את שתי הקוביות במקביל).

בקובייה הראשונה התוצאה אינה משנה, ולכן ההסתברות היא 1 $\left(\frac{6}{6}\right)$.

בקובייה השנייה עלינו לקבל את אותו מספר שקיבלנו בקובייה הראשונה, ולכן ההסתברות היא $\frac{1}{6}$ (רק אפשרות אחת רצויה מבין 6 אפשרויות מצויות).

נכפול בין ההסתברויות:

$$1 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$$

דרך ב' – מציאת האפשרויות המתאימות

תחילה, נבין שסה"כ ישנן 36 אפשרויות מצויות לתוצאות שמתקבלות מהטלת 2 קוביות (בקובייה הראשונה יש 6 אפשרויות, בקובייה השנייה יש 6 אפשרויות, סך הכול $6 \cdot 6 = 36$ אפשרויות מצויות).
כעת, נמצא מהן האפשרויות לקבלת מספר זהה בשתי הקוביות, כלומר דאבל:
1-1, 2-2, 3-3, 4-4, 5-5, 6-6. בסך הכול ישנן 6 אפשרויות לקבל דאבל.
נחשב את ההסתברות לקבל דאבל:

$$\frac{\text{רצוי}}{\text{מצוי}} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

.4 תשובה (1) נכונה. שאלה 6 מתוך 20 בפרק.

דרך א – חישוב ישיר

בשני המפעלים יחד מיוצרות 150 נורות בכל יום (50 + 100).
מתוך תוצרת זו, מיוצרות 25 נורות פגומות (15 + 10). כלומר, בכל יום מיוצרות 125 נורות שאינן פגומות (150 – 25).

נחשב את ההסתברות לבחור נורה לא פגומה מתוך כלל הנורות:

$$\frac{125}{150} = \frac{5}{6}$$

דרך ב – מאורע משלים

נחשב את הסיכוי לבחור נורה פגומה (15 + 10).

$$\frac{25}{150} = \frac{1}{6}$$

ההסתברות לבחור נורה לא פגומה היא המאורע המשלים:

$$1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

---

5. תשובה (3) נכונה. שאלה 7 מתוך 20 בפרק.

שחקן צריך לנחש מה סכום המספרים שיראו שתי קוביות. עלינו לקבוע איזה מהסכומים שבתשובות כדאי ביותר לנחש. נבדוק כל אחד מהמספרים שבתשובות ונקבע מה הסכום שההסתברות לקבלו היא הגבוהה ביותר. שימו לב, למעשה אין צורך לחשב את ההסתברות, אלא לבדוק כמה צירופים שונים יכולים להביא לסכום זה. הסכום שיש הכי הרבה אפשרויות לקבלו הוא הסכום שהכי כדאי לנחש.

<u>נבדוק את תשובה (1):</u> סכום 11 יתקבל בהטלות הבאות: 5 ו-6, 6 ו-5. בסך הכול 2 אפשרויות.

<u>נבדוק את תשובה (2):</u> סכום 2 יתקבל בהטלה 1 ו-1 בלבד. אפשרות אחת.

<u>נבדוק את תשובה (3):</u> סכום 7 יתקבל בהטלות הבאות: 6 ו-1, 1 ו-6, 5 ו-2, 2 ו-5, 4 ו-3, 3 ו-4. בסך הכול 6 אפשרויות.

<u>נבדוק את תשובה (4):</u> סכום 4 יתקבל בהטלות הבאות: 3 ו-1, 1 ו-3, 2 ו-2.

<u>כדאי לזכור</u> – בהטלת שתי קוביות, סכום 7 הוא הסכום שיש הכי הרבה צירופים המתאימים לו, ולכן זה הסכום שהסיכויים לקבלו הם הגבוהים ביותר. בנוסף, ככל שמתרחקים מ-7 ככה ההסתברות לקבל את הסכום קטנה (ההסתברות לקבל 6 שווה להסתברות לקבל 8; ההסתברות לקבל 5 שווה להסתברות לקבל 9 וכן הלאה...).

---

6. תשובה (2) נכונה. שאלה 7 מתוך 20 בפרק.

בכד יש 24 כדורים בצבעים ירוק, צהוב וכחול. עלינו לקבוע כמה כדורים כחולים יש בכד.

נתון שההסתברות להוציא כדור ירוק היא $\frac{1}{4}$. כלומר, $\frac{1}{4}$ מהכדורים בכד הם ירוקים $\Leftarrow$ בכד יש 6 כדורים ירוקים $\left(\frac{24}{4}\right)$.

נתון שההסתברות להוציא כדור צהוב היא $\frac{1}{3}$. כלומר, $\frac{1}{3}$ מהכדורים בכד הם צהובים $\Leftarrow$ בכד יש 8 כדורים ירוקים $\left(\frac{24}{3}\right)$.

לפיכך, נותרו בכד 10 כדורים (8 – 6 – 24) וצבעם כחול.

---

7. תשובה (1) נכונה. שאלה 9 מתוך 20 בפרק.

אנו מתבקשים למצוא את ההסתברות לכך שצבעו של הכדור הרביעי שצביקה הוציא זהה לצבעם של שלושת הכדורים הראשונים שהוציא.

תחילה, היו בקופסה 5 כדורים מכל צבע, ובסך הכול 15 כדורים. לאחר שהוצאו 3 כדורים מצבע מסוים, נותרו בקופסה עוד שני כדורים מצבע זה (3 – 5). כמו כן, סך הכדורים בקופסה לאחר ההוצאה הוא 12 (3 – 15). כלומר, יש 2 אפשרויות רצויות מתוך 12 מצויות להוצאת כדור באותו הצבע:

$$\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$$

---

8. תשובה (1) נכונה. שאלה 12 מתוך 20 בפרק.

ההסתברות לקבל תוצאה זוגית היא $\frac{1}{2}$, שכן יש 3 תוצאות רצויות (2, 4, 6) מתוך 6 מצויות $\left(\frac{3}{6}\right)$.
ההסתברות לקבל תוצאה אי- זוגית היא $\frac{1}{2}$, שכן יש 3 תוצאות רצויות (1, 3, 5) מתוך 6 מצויות $\left(\frac{3}{6}\right)$.

נשאלנו מה ההסתברות שבשתי ההטלות הראשונות תתקבל תוצאה זוגית ובהטלה השלישית תתקבל תוצאה אי-זוגית. נכפול את ההסתברויות:

$\frac{1}{8}$	$=$	$\frac{1}{2}$	$\cdot$	$\frac{1}{2}$	$\cdot$	$\frac{1}{2}$
		הטלה שלישית **אי-זוגית**		הטלה שנייה **זוגית**		הטלה ראשונה **זוגית**

---

9. תשובה (4) נכונה. שאלה 14 מתוך 20 בפרק.

נזהה כי מדובר בריבוי מאורעות, כלומר עלינו לחשב את ההסתברות להוצאת כדור כחול **גם** בהוצאה הראשונה, **גם** בהוצאה השנייה **וגם** בהוצאה השלישית. לכן, עלינו לבדוק מה ההסתברות להוציא כדור כחול בכל אחת משלוש ההוצאות, ולכפול בין ההסתברויות.

ישנם 12 כדורים סה"כ בשק, ומתוכם 3 כחולים, ועל כן ההסתברות להוציא כדור כחול היא $\frac{3}{12}$, כלומר $\frac{1}{4}$ $\left(\frac{\text{רצוי}}{\text{מצוי}}\right)$.
נתון שעופר החזיר את הכדור לשק לאחר הוצאתו, ולכן ההסתברות להוצאת כדור כחול בהוצאות הבאות תישאר זהה (שהרי לאחר החזרת הכדור, השק יכיל בדיוק את אותם כדורים שהכיל לפני ההוצאה הקודמת). להוציא מכאן שגם בשתי ההוצאות הבאות ההסתברות כדור כחול היא $\frac{1}{4}$.

על כן, ההסתברות להוציא 3 כדורים כחולים היא: $\frac{1}{4^3} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}$.

---

10. תשובה (3) נכונה. שאלה 15 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – חישוב מלא
תחילה, נבין מהם המקרים הרצויים לנו:
א. יעל בוחרת בשק א' **וגם** מוציאה כדור אדום
או
ב. יעל בוחרת בשק ב' **וגם** מוציאה כדור אדום

מכיוון ששני המקרים טובים לנו ("או"), נחשב את ההסתברות להתרחשות כל אחד מהם ונחבר בין ההסתברויות.

מקרה א': יעל בוחרת באקראי אחד מהשקים, ולכן ההסתברות שתבחר בשק א' היא $\frac{1}{2}$ (שק אחד רצוי מתוך שניים מצויים). בשק א' יש 10 כדורים ומתוכם 5 אדומים. אם כן, ההסתברות לשלוף משק זה כדור אדום היא $\frac{1}{2}\left(\frac{5}{10}\right)$.
מכיוון שאנו רוצים במקרה זה שיעל תבחר בשק א' **וגם** תוציא כדור אדום, נכפול בין ההסתברויות:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

מקרה ב': יעל בוחרת באקראי אחד מהשקים, ולכן ההסתברות שתבחר בשק ב' היא $\frac{1}{2}$ (שק אחד רצוי מתוך שניים מצויים). בשק ב' יש 8 כדורים ומתוכם 2 אדומים. אם כן, ההסתברות לשלוף משק זה כדור אדום היא $\frac{1}{4}\left(\frac{2}{8}\right)$.
מכיוון שאנו רוצים במקרה זה שיעל תבחר בשק ב' **וגם** תוציא כדור אדום, נכפול בין ההסתברויות:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$$

עתה, כאמור, נחבר בין ההסתברויות של מקרים א' ו-ב':

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{2}{8}+\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$$

דרך ב' – ממוצע
ניתן להבין שמשום שיעל בוחרת באקראי מאיזה שק תוציא את הכדור, ההסתברות להוצאת כדור אדום היא הממוצע בין ההסתברויות להוצאת כדור אדום מכל אחד מהשקים.
נחשב מה ההסתברות להוצאת כדור אדום מכל שק:
בשק א' 10 כדורים ומתוכם 5 אדומים. לכן, ההסתברות להוציא ממנו כדור אדום היא $\frac{1}{2}\left(\frac{5}{10}\right)$.
בשק ב' יש 8 כדורים ומתוכם 2 אדומים. לכן, ההסתברות להוציא ממנו כדור אדום היא $\frac{1}{4}\left(\frac{2}{8}\right)$.

כעת, נחשב את הממוצע של שתי הסתברויות אלו:

דרך א' – נקודת איזון
אם נעשה מכנה משותף, נגלה שההסתברות להוצאת כדור אדום משק א' היא $\frac{4}{8}$, וההסתברות להוצאת כדור אדום משק ב' היא $\frac{2}{8}$. נקודת האיזון, ה"אמצע" ביניהן, היא $\frac{3}{8}$.

דרך ב' – נוסחה

$$\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}{2}=\frac{\frac{4}{8}+\frac{2}{8}}{2}=\frac{\frac{6}{8}}{2}=\frac{3}{8}$$

11. תשובה (2) נכונה. שאלה 16 מתוך 20 בפרק.

עלינו לחשב את ההסתברות **שרק** הקובייה שהטיל יפת תיפול על המספר 6. כלומר, על תוצאת ההטלה של שם ושל חם להיות שונה מ-6.

נחשב את ההסתברות שתוצאת ההטלה תהיה שונה מ-6. יש 5 תוצאות רצויות (1, 2, 3, 4, 5) מתוך 6 מצויות $\Leftarrow$ $\frac{5}{6}$. נחשב את ההסתברות שתוצאת ההטלה תהיה 6. יש תוצאה אחת רצויה מתוך 6 מצויות $\Leftarrow$ $\frac{1}{6}$.

כעת נכפול בין ההסתברויות:

$$\frac{25}{216} = \underbrace{\frac{5}{6}}_{\substack{\text{חם} \\ \text{שונה מ-6}}} \cdot \underbrace{\frac{5}{6}}_{\substack{\text{שם} \\ \text{שונה מ-6}}} \cdot \underbrace{\frac{1}{6}}_{\substack{\text{יפת} \\ \text{שווה ל-6}}}$$

---

12. תשובה (3) נכונה. שאלה 16 מתוך 20 בפרק.

עלינו לחשב את ההסתברות שצבע הגרביים של נטלי יהיה זהה לצבע הנעליים שלה.

דרך א'
אם נטלי תבחר קודם את הנעליים, זה לא משנה אם היא תבחר בזוג השחור או הלבן. כלומר, יש 2 זוגות רצויים מתוך 2 מצויים.
כעת, על נטלי לבחור את הגרביים הזהים בצבעם לצבע הנעליים. כלומר, יש זוג אחד רצוי מתוך 3 מצויים.
נחשב את ההסתברות:

$$\frac{2}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

דרך ב'
גם אם נשנה את סדר הבחירה נגיע לאותה התוצאה. נטלי יכולה לבחור קודם את הגרביים; עליה לבחור בגרביים השחורים או הלבנים, כיוון שאין לה נעליים אדומות שיתאימו לגרביים האדומים. כלומר, יש 2 זוגות רצויים מתוך 3 מצויים.
בבחירת הנעליים נטלי צריכה לבחור בזוג שצבעו זהה לצבע הגרביים ולכן יש זוג אחד רצוי מתוך 2 מצויים.
נחשב את ההסתברות:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

---

13. תשובה (3) נכונה. שאלה 16 מתוך 20 בפרק.

ארנון מפסיק להטיל את הקובייה כאשר תוצאת ההטלה היא 6. לכן, כדי להטיל את הקובייה **בדיוק** 4 פעמים, התוצאה צריכה להיות שונה מ-6 בשלוש ההטלות הראשונות וברביעית התוצאה צריכה להיות בדיוק 6, כך שבשלב זה ארנון יפסיק להטיל את הקובייה.

כדי שייצא מספר השונה מ-6 יש 5 אפשרויות רצויות מתוך 6 מצויות. כלומר ההסתברות היא $\frac{5}{6}$.
כדי שתוצאת ההטלה תהיה 6 יש אפשרות רצויה אחת מתוך 6 מצויות. כלומר ההסתברות היא $\frac{1}{6}$.

מכיוון שאנחנו מעוניינים שכל המאורעות יתרחשו, עלינו להכפיל את ההסתברויות:

$$\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5^3}{6^4}$$

---

14. תשובה (4) נכונה. שאלה 18 מתוך 20 בפרק.

תחילה, נמצא את המצבים שבהם צביקה יזכה ב- 4 נקודות:
אם יוגרל המספר 3 (מספר הקטן מ-5) יוסיפו לו עוד 1, וכך יקבל 4 נקודות.
אם יוגרל המספר 5 (השווה ל-5) יחסירו ממנו 1, וגם כך יקבל 4 נקודות.
אלו האפשרויות היחידות שיביאו לכך שצביקה יזכה ב-4 נקודות. לכן, מתוך 10 מספרים אפשריים שיגריל צביקה (המספרים בין 0 ל-9), ישנם 2 מספרים רצויים. מכאן שהסיכוי שבפעם הראשונה זכה צביקה ב-4 נקודות הוא:

$$\frac{\text{רצוי}}{\text{מצוי}} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

הסיכוי שצביקה יזכה בפעם השנייה במספר השונה מ-4 הוא המאורע משלים למאורע שצביקה כן יזכה ב-4, ולכן משלים אותו ל-1:

$$1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

זאת משום שאם יצא כל מספר למעט המספרים 3 או 5, אשר מזכים את צביקה ב-4 נקודות, יזכה צביקה במספר נקודות השונה מ-4.

כעת, עלינו לחשב מה ההסתברות שבפעם הראשונה קיבל צביקה 4 נקודות **וגם** (=כפל!) בפעם השנייה לא קיבל 4 נקודות:

$$\frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{25}$$

---

15. תשובה (4) נכונה. שאלה 18 מתוך 20 בפרק.

לרחל יש שלוש טבעות (כחולה, אדומה וצהובה), והיא אינה עונדת את אותה טבעת יומיים ברצף. נתון כי ביום א' היא ענדה את הטבעת הכחולה. עלינו לחשב את ההסתברות שהיא תענוד את הטבעת הצהובה ביום ג'.

מכיוון שביום א' היא ענדה את הטבעת הכחולה, ביום ב', למחרת, היא לא תוכל לענודה שוב. לכן ביום ב' היא תוכל לענוד את הטבעת הצהובה או האדומה; אך כדי שהיא תוכל לענוד את הטבעת הצהובה ביום ג' אסור לה לענוד אותה ביום ב'. לפיכך, רחל חייבת לענוד את הטבעת האדומה ביום ב' כדי שתוכל לענוד את הצהובה ביום ג'.
עתה נחשב את ההסתברות שביום ב' היא תבחר את הטבעת האדומה (מתוך שתי האפשרויות העומדות בפניה: צהובה ואדומה) <u>וגם</u> שביום ג' היא תבחר את הטבעת הצהובה (מתוך שתי האפשרויות העומדות בפניה: כחולה וצהובה).

ההסתברות שביום ב' היא תענוד את הטבעת האדומה היא $\frac{1}{2}$, וההסתברות שביום ג' היא תבחר את הצהובה היא גם כן $\frac{1}{2}$. לכן ההסתברות שביום ב' היא תבחר את האדומה וגם ביום ג' היא תבחר את הצהובה היא $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} \longrightarrow \frac{1}{4}$

יום א'		**יום ב'**		**יום ג'**
טבעת כחולה	⇐	תבחר טבעת אדומה	⇐	טבעת צהובה
(נתון)		(מבין אדום או צהוב)		(מבין כחול או צהוב)
		ההסתברות היא: $\frac{1}{2}$		ההסתברות היא: $\frac{1}{2}$

---

16. תשובה (1) נכונה. שאלה 18 מתוך 20 בפרק.

בשאלה זו אנו מתבקשים לקבוע מה הסיכוי שסכום המספרים שיתקבלו משתי הטלות המטבע יהיה גדול מהמספר שיתקבל מהטלת הקובייה.
עלינו להבין כי ישנו רק תרחיש אחד אשר יביא לכך: התוצאות בשתי הטלות המטבע תהיינה המקסימום האפשרי, כלומר 1 ו-1 (סכום 2), ואילו התוצאה בהטלת הקובייה תהיה המינימום האפשרי – 1. כל תרחיש אחר לא יביא לכך שהסכום מהטלות המטבע יהיה גדול מהתוצאה של הטלת הקובייה.

הסיכוי שהמספר 1 יתקבל בהטלת הקובייה הוא $\frac{1}{6}$ (מצב אחד רצוי מתוך 6 מצויים).
הסיכוי שהמספר 1 יתקבל בהטלת המטבע הראשונה הוא $\frac{1}{2}$ (מצב אחד רצוי מתוך שניים מצויים).
הסיכוי שהמספר 1 יתקבל בהטלת המטבע השנייה הוא $\frac{1}{2}$ (מצב אחד רצוי מתוך שניים מצויים).

הסיכוי שכל התרחישים שלעיל אכן יקרו שווה למכפלת ההסתברויות (גם מספר 1 בהטלת הקובייה, גם מספר 1 בהטלת המטבע הראשונה וגם מספר 1 בהטלת המטבע השנייה):

$$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{24}$$

---

17. תשובה (4) נכונה. שאלה 19 מתוך 20 בפרק.

למיכל יש מחברת, אלבום ו-2 ספרים, אותם היא חילקה בין ארבע חברותיה כך שכל אחת קיבלה פריט אחד. עלינו לחשב את ההסתברות שאיריס ואורית קיבלו ספר.
ההסתברות שאיריס תקבל ספר היא $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ מאחר שיש 2 ספרים מתוך 4 פריטים.

כעת נותרו 3 פריטים ומתוכם ספר אחד ועל כן ההסתברות שאורית תקבל ספר היא $\frac{1}{3}$.
מאחר שאנו מחפשים את ההסתברות ששני המאורעות יתרחשו (גם וגם), נכפול בין ההסתברויות:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

שימו לב, אין צורך לבדוק את המקרה ההפוך (בו אורית תקבל ספר ולאחר מכן איריס תקבל ספר), מאחר שזה לא רלוונטי מי מהשתיים תקבל את הספר קודם.
לסיכום, ההסתברות שאיריס ואורית יקבלו ספר היא $\frac{1}{6}$.

---

18. תשובה (3) נכונה. שאלה 20 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – יחסים

רוני מטיל מטבע לא הוגן. ההסתברות שהמטבע ייפול על "עץ" היא $\frac{3}{4}$ מההסתברות שהמטבע ייפול על "פלי". עלינו לקבוע מה ההסתברות שהמטבע ייפול על "עץ".

כאשר הפרופורציה מבוטאת באמצעות שבר באמצע המשפט, ניתן להגדיר את הקבוצה הראשונה (במקרה זה "עץ") בתור המונה והקבוצה השנייה ("פלי") בתור המכנה. כך אנו שומרים על הפרופורציה ומוצאים הצבה פשוטה בקלות.

ההסתברות שהמטבע ייפול על "עץ" היא $\frac{3}{4}$ מההסתברות שהמטבע ייפול על "פלי".

לכן, ההסתברות שהמטבע ייפול על "עץ" היא 3x וההסתברות שהמטבע ייפול על "פאי" היא 4x.

מכיוון ש"עץ" ו"פלי" הם האפשרויות היחידות, סך כול האופציות הוא 7x.

על כן, ההסתברות שהמטבע ייפול על "עץ" היא $\frac{3x}{7x} \Leftarrow \frac{3}{7}$.

דרך ב' – פתרון מתמטי

אנו מתבקשים למצוא את ההסתברות שהמטבע ייפול על "עץ". הסתברות זו שווה ל- $\frac{3}{4}$ מההסתברות שהמטבע ייפול על "פלי". נציב x בתור ההסתברות שהמטבע ייפול על "פלי". לפיכך, ההסתברות שהמטבע ייפול על "עץ" היא $\frac{3}{4}x$.

המאורעות האפשריים בהטלת מטבע הם קבלת "עץ" וקבלת "פלי". סכום ההסתברויות לכלל המאורעות הוא תמיד 1. ניעזר בנתון זה כדי לבנות משוואה ולחלץ ממנה את x:

$$\frac{3}{4}x + x = 1$$

ניצור מכנה משותף 4:

$$3x + 4x = 4$$

$$7x = 4$$

נחלק ב-7:

$$x = \frac{4}{7}$$

כלומר, ההסתברות שהמטבע ייפול על "פלי" היא $\frac{4}{7}$. לכן, ההסתברות שהמטבע ייפול על "עץ" היא $\frac{3}{7}$ $\left(1 - \frac{4}{7}\right)$.

דרך ג – הצבת תשובות

ידוע שההסתברות שהמטבע ייפול על "עץ" היא $\frac{3}{4}$ מההסתברות שהמטבע ייפול על "פלי". מכיוון שהמאורעות האפשריים בהטלת מטבע הם "עץ" ו"פלי" בלבד, סכום ההסתברויות של מאורעות אלו צריך להיות שווה ל-1.
נעבוד עם התשובות ונמצא את ההסתברות לקבלת "פלי" (ע"י השלמה ל-1) ונבדוק האם ההסתברות לקבלת "עץ" מהווה $\frac{3}{4}$ מהסתברות זו.

<u>נבדוק את תשובה (1):</u> אם ההסתברות לקבלת "עץ" היא $\frac{4}{13}$, אזי ההסתברות לקבלת "פלי" היא $\frac{9}{13}$ $\left(1-\frac{4}{13}\right)$. $\frac{3}{4}$ מתוך $\frac{9}{13}$ שווה ל- $\frac{27}{52}$ $\left(\frac{9}{13}\cdot\frac{3}{4}\right)$ ולא ל-$\frac{4}{13}$. לא מתאים, התשובה נפסלת.
ניתן גם לראות ש-$\frac{4}{13}$ מהווה פחות מחצי מ-$\frac{9}{13}$ ולמעשה אין צורך לחשב במדויק.

<u>נבדוק את תשובה (2):</u> אם ההסתברות לקבלת "עץ" היא $\frac{9}{16}$, אזי ההסתברות לקבלת "פלי" היא $\frac{7}{16}$ $\left(1-\frac{9}{16}\right)$. $\frac{9}{16}$ גדול מ- $\frac{7}{16}$ וקל וחומר לא מהווה $\frac{3}{4}$ מתוכו. לא מתאים, התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (3):</u> אם ההסתברות לקבלת "עץ" היא $\frac{3}{7}$, אזי ההסתברות לקבלת "פלי" היא $\frac{4}{7}$ $\left(1-\frac{3}{7}\right)$. $\frac{3}{4}$ מתוך $\frac{4}{7}$ שווה ל- $\frac{3}{7}$ $\left(\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{4}\right)$. מתאים, **תשובה נכונה.**

טיפ: מכיוון שהצבנו את התשובות, ברגע שמצאנו תשובה נכונה אין צורך להמשיך לבדוק את שאר התשובות, אך למען שלמות ההסבר נפסול את התשובה החסרה:

<u>נבדוק את תשובה (4):</u> אם ההסתברות לקבלת "עץ" היא $\frac{1}{4}$, אזי ההסתברות לקבלת "פלי" היא $\frac{3}{4}$ $\left(1-\frac{1}{4}\right)$. $\frac{3}{4}$ מתוך $\frac{3}{4}$ שווה ל- $\frac{9}{16}$ $\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\right)$ ולא ל-$\frac{1}{4}$. לא מתאים, התשובה נפסלת.
ניתן גם לראות ש-$\frac{1}{4}$ מהווה אפילו פחות מחצי (שליש למען הדיוק) מ-$\frac{3}{4}$ ולמעשה אין צורך לחשב במדויק.

19. תשובה (2) נכונה. שאלה 20 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – חיבור הסתברויות

עלינו לחשב את ההסתברות שסכום הספרות שיתקבלו משלוש הטלות יהיה זוגי. הדבר יתרחש כאשר הספרה שתתקבל בכל ההטלות תהיה 2 או כאשר הספרה 2 תתקבל פעם אחת וביותר הפעמים תתקבל הספרה 1, כלומר:

2, 2, 2 $\Leftarrow$ נחשב את הסיכוי: $\frac{1}{8} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$

2, 1, 1 $\Leftarrow$ נחשב את הסיכוי: $\frac{1}{8} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$

1, 2, 1 $\Leftarrow$ נחשב את הסיכוי: $\frac{1}{8} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$

1, 1, 2 $\Leftarrow$ נחשב את הסיכוי: $\frac{1}{8} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$

כעת נחבר את ההסתברויות כדי לבדוק מה הסיכוי שכל המאורעות שלעיל יתרחשו:

$$\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

דרך ב' – הבנה

נסתכל על הסיכוי לקבלת סכום זוגי כרצף של 3 מאורעות – ההטלה הראשונה, השנייה והשלישית.
ניתן לקצר את פתרון השאלה אם נבין שהסכום שמתקבל מההטלה הראשונה והשנייה אינו רלוונטי; אם הוא יהיה אי-זוגי, נרצה שתוצאת ההטלה השלישית תהיה 1, מה שיהפוך את הסכום הסופי לזוגי. באותו אופן, אם סכום ההטלה הראשונה והשנייה יהיה זוגי, נרצה שתוצאת ההטלה השלישית תהיה 2, מה שישמור על הסכום הסופי כזוגי. כלומר, תוצאות ההטלה הראשונה והשנייה אינן קובעות דבר.

לפיכך, תוצאת ההטלה האחרונה היא זו שקובעת האם סכום הספרות משלוש ההטלות יהיה זוגי או אי-זוגי.
בהטלה זו יש לנו תוצאה אחת רצויה מתוך שתיים מצויות ומכאן שההסתברות לקבלת התוצאה הרצויה הוא $\frac{1}{2}$.

.20 תשובה (4) נכונה. שאלה 20 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הצבת מספרים

על מנת להימנע מתשובות זהות, נציב לדוגמה שלדני יש 3 שקים $(p = 3)$, ובתוך כל אחד מהם יש 2 קלפים $(n = 2)$ הממוספרים מ-1 עד 2 (כלומר, בכל שק יש קלף שעליו רשום המספר 1, וקלף שעליו רשום המספר 2). נחשב את הסיכוי שעל כל הקלפים שדני הוציא רשום המספר 1:

בכל אחד מהשקים, הסיכוי שדני יוציא את הקלף שעליו רשום המספר 1 הוא $\frac{1}{2}$. זאת משום שיש בכל שק שתי אפשרויות מצויות להוצאת קלפים, ומתוכן רק אחת טובה לנו: $\frac{1}{2} = \frac{\text{רצוי}}{\text{מצוי}}$.

אנו מעוניינים שדני יוציא את המספר 1 **גם** מהשק הראשון, **גם** מהשק השני **וגם** מהשק השלישי, ועל כן נכפול את ההסתברויות:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

כעת, נציב גם בתשובות $p = 3$ ו-$n = 2$, ונחפש תשובה השווה ל-$\frac{1}{8}$. נשים לב שמכיוון שהשתמשנו בהצבת מספרים במקום הנעלמים, עלינו לפסול 3 תשובות בטרם נוכל לסמן תשובה נכונה.

(1) $\frac{1}{p^n} \Rightarrow \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9} \Rightarrow$ לא מתאים, התשובה נפסלת.

(2) $\frac{p}{n} \Rightarrow \frac{3}{2} \Rightarrow$ לא מתאים, התשובה נפסלת.

(3) $\frac{1}{np} \Rightarrow \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{6} \Rightarrow$ לא מתאים, התשובה נפסלת.

טיפ: כיוון שפסלנו 3 תשובות, ניתן לסמן את תשובה (4) מבלי לבדוק אותה. למען שלמות ההסבר נבדוק גם תשובה זו.

(4) $\frac{1}{n^p} \Rightarrow \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} \Rightarrow$ **מתאים.**

דרך ב' – פתרון מתמטי

נחשב תחילה את הסיכוי של דני להוציא משק אחד את המספר 1. יש אפשרות אחת רצויה (קלף אחד כזה בשק) מתוך n קלפים שקיימים בתוך השק. לכן, ההסתברות להוציא את הקלף שעליו המספר 1 היא: $\frac{1}{n} = \frac{\text{רצוי}}{\text{מצוי}}$.

הסתברות זו נכונה לכל אחד מהשקים, אשר זהים זה לזה.

כעת, עלינו להבין שעל מנת לחשב את הסיכוי שעל כל הקלפים היה רשום המספר 1, כלומר **גם** על הקלף מהשק הראשון, **גם** על הקלף מהשק השני, **גם** על הקלף מהשק השלישי וכן הלאה, עלינו לכפול בין ההסתברויות להוצאתו מכל שק.

אם, לדוגמה, היו 2 שקים, הסיכוי היה $\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}$, כלומר $\left(\frac{1}{n}\right)^2$; אם היו 3 שקים, הסיכוי היה $\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}$, כלומר $\left(\frac{1}{n}\right)^3$;

לכן, אם ישנם p שקים, הסיכוי יהיה $\left(\frac{1}{n}\right)^p$. נפשט ביטוי זה:

$$\left(\frac{1}{n}\right)^p = \frac{1}{n^p}$$