אלגברה

הכנה לבחינה הפסיכומטרית

מדריכים: אלעד שווייצר, ליאור כהן

המשרד לשוויון חברתי
מטה ישראל דיגיטלית

קמפוס
המיזם הלאומי ללמידה דיגיטלית

הקורס פותח בליווי ובייעוץ מקצועי של המרכז הארצי לבחינות ולהערכה (מאל"ו)

מהדורה: 919880

השימוש בכל מידע ו/או תוכן המופיע באתר הקורס ו/או בעזרי הלימוד הנלווים הוא על אחריות המשתמש בלבד. מדינת ישראל - המשרד לשוויון חברתי ו/או כל משרד ממשלתי אחר אינה מתחייבת כי האתר ו/או עזרי הלימוד הנלווים ו/או תכניהם יענו לכל דרישות המשתמש, ו/או שהשירות לא יופרע ו/או יתקיים בזמן, בביטחה וללא טעויות. מדינת ישראל אינה מתחייבת לגבי התוצאות אשר תושגנה כתוצאה משימוש באתר ו/או בעזרי הלימוד הנלווים או לגבי הדיוק והאמינות של המידע אשר יושג באמצעות מי מהם.
מדינת ישראל אינה מתחייבת ולא תהיה אחראית לגבי תוצאות השימוש באתר הקורס ו/או בעזרי הלימוד הנלווים ולגבי מידת התאמתם לרמתו המקצועית ו/או הלימודית של הלומד. בפרט מודגש, כי אין בקבלת ציון ו/או בקבלת משוב כזה או אחר, ברמה רגילה או ברמה גבוהה, במסגרת התרגילים והבחנים שבקורס, כדי להוות אינדיקציה כלשהי או מדד כלשהו ליכולתו של הלומד להצליח בבחינה הפסיכומטרית, כולה או חלקה.
למען הסר כל ספק, זכויות היוצרים בבחינה הפסיכומטרית וכן בשאלות לדוגמא מתוך בחינות פסיכומטריות המובאות בקורס הינן של המרכז הארצי להערכה (ע"ר) בלבד, ואין לעשות בשאלות אלו כל שימוש למעט לצורך לימוד ותרגול בקורס. הקורס אינו פותח או מפורסם על-ידי המרכז הארצי לבחינות והערכה ואינו באחריותו.

תוכן עניינים

יסודות אלגבריים

הגדרות

- **מספר שלם -** מספר שניתן לחלק אותו ליחידות של 1, ללא שארית.
מספר שלם יכול להיות גם מספר חיובי וגם מספר שלילי.
אפס הוא מספר שלם.
לדוגמה: 8 , 25 , 9-

- **שבר -** מספר שאינו שלם. שבר יכול להיות גם גדול מ-1.
לדוגמה: $\frac{1}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{7}{2}$

- **מספר חיובי -** מספר גדול מאפס.
לדוגמה: 5 , 38 , $\frac{2}{3}$

- **מספר שלילי -** מספר קטן מאפס.
לדוגמה: 4- , 13- , $-5\frac{1}{2}$

- **מספר טבעי -** מספר שלם וחיובי.
לדוגמה: 9 , 14 , 205

- **מספרים נגדיים -** זוג מספרים שסכומם שווה לאפס.
לדוגמה: $(-2 ; 2)$, $(-7 ; 7)$, $(-15 ; 15)$

- **מספרים הופכיים -** זוג מספרים שמכפלתם שווה ל-1.
לדוגמה: $(\frac{2}{3} ; \frac{3}{2})$, $(5 ; \frac{1}{5})$, $(-2 ; -\frac{1}{2})$

- **מספרים עוקבים -** מספרים שלמים שההפרש ביניהם הוא 1.
לדוגמה: 4 , 3 , 2 , 1 , 0 , 1- , 2-

- **שארית -** מה שנשאר כאשר מחלקים מספר כלשהו במספר אחר.
לדוגמה: השארית מחלוקת 10 ב-3 היא 1, השארית מחלוקת 12 ב-5 היא 2.

- **מספר זוגי -** מספר שלם שמתחלק ב-2 **ללא** שארית.
אפס הוא מספר זוגי.
מספר זוגי יכול להיות שלילי.
לדוגמה: 8 , 26 , 6-

- **מספר אי-זוגי -** מספר שלם שמתחלק ב-2 **עם** שארית 1.
מספר אי-זוגי יכול להיות שלילי.
לדוגמה: 7 , 1 , 13-

- **אפס -** אפס הוא מספר **שלם זוגי**, אך הוא **אינו** חיובי **ואינו** שלילי.

- **מספר ראשוני -** מספר טבעי (שלם וחיובי) הגדול מ-1, שיש לו שני מחלקים שונים בלבד - הוא עצמו ו-1.
מספר ראשוני הוא בעצם מספר שאי-אפשר "לפרק" אותו (למשל, 10 מתפרק ל- $5 \cdot 2$ ולכן אינו ראשוני).
לדוגמה: 5 , 11 , 17
חשוב לזכור: 0 ו-1 **אינם** מספרים ראשוניים; 2 הוא ראשוני (מתחלק ב-1 ובעצמו).
כל המספרים הראשוניים הם אי-זוגיים, למעט 2.

תרגול - הגדרות

1. מהי מכפלת כל המספרים הראשוניים החד ספרתיים?

(1) 105 (2) 210 (3) 30 (4) 70

---

2. מה מהבאים **אינו** נכון לגבי המספר 0?

(1) הוא מספר זוגי
(2) הוא מספר טבעי
(3) הוא מספר שלם
(4) הוא אינו מספר ראשוני

---

3. a ו-b הם מספרים נגדיים.

$a + b = ?$

(1) 1 (2) 2 (3) 0 (4) -1

---

4. מהי השארית מחלוקת המספר הראשוני הדו ספרתי הגדול ביותר ב-2?

(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 0

---

5. a ו-b הם מספרים הופכיים.

$a \cdot b = ?$

(1) 1 (2) 2 (3) -1 (4) 0

תשובות

שאלה	1	2	3	4	5
תשובה	2	2	3	1	1

1. תשובה (2) נכונה

המספרים הראשוניים החד ספרתיים הם : 7 , 5 , 3 , 2 .
נחשב את מכפלתם :

$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = (2 \cdot 5) \cdot (3 \cdot 7) = 10 \cdot 21 = 210$

---

2. תשובה (2) נכונה

נבדוק את התשובות ונקבע איזו טענה אינה נכונה לגבי המספר 0 :

נבדוק את תשובה (1) : 0 הוא מספר זוגי, מפני שהוא מתחלק ב-2 ללא שארית ($0 : 2 = 0$). הטענה נכונה, התשובה נפסלת.

נבדוק את תשובה (2) : מספר טבעי הוא מספר שלם וחיובי. לפיכך, 0 אינו טבעי. הטענה אינה נכונה, **התשובה נכונה.**

טיפ: מכיוון שהצבנו את התשובות, ברגע שמצאנו תשובה נכונה אין צורך להמשיך לבדוק את שאר התשובות, אך למען שלמות ההסבר נפסול אותן :

נבדוק את תשובה (3) : 0 הוא מספר שלם. הטענה נכונה, התשובה נפסלת.

נבדוק את תשובה (4) : 0 אינו מספר ראשוני, מפני שמספר ראשוני הוא מספר המתחלק ללא שארית רק בעצמו וב-1. לא ניתן לחלק את 0 בעצמו. כמו כן, 0 מתחלק בכל המספרים למעט עצמו ללא שארית (0 לחלק לכל מספר השונה מ-0 שווה ל-0). הטענה נכונה, התשובה נפסלת.

---

3. תשובה (3) נכונה

מספרים נגדיים הם מספרים שהערך המוחלט שלהם זהה, אולם סימניהם שונים (למשל : 1 ו-1-, 2 ו-2- וכדומה). לפיכך, סכומם תמיד 0. ניתן לתאר זאת גם באופן אלגברי :

$a = -b$

$a + b \Rightarrow -b + b = 0$

---

4. תשובה (1) נכונה

עלינו לקבוע מה השארית מחלוקת המספר הראשוני הדו-ספרתי הגדול ביותר ב-2. כל המספרים הראשוניים, למעט 2, הם אי-זוגיים. לפיכך, חלוקתם ב-2 תותיר שארית 1. כלומר, השארית מחלוקת המספר המדובר ב-2 היא 1.

---

5. תשובה (1) נכונה

מכפלתם של מספרים הופכיים היא 1 (למשל: $\frac{5}{3}\cdot\frac{3}{5}$, $\frac{7}{4}\cdot\frac{4}{7}$). ניתן לבטא זאת גם באופן אלגברי:

$$a=\frac{1}{b}$$

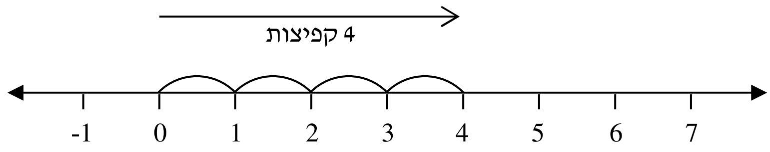
$$a\cdot b \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{b}\cdot b=1$$

חיבור וחיסור

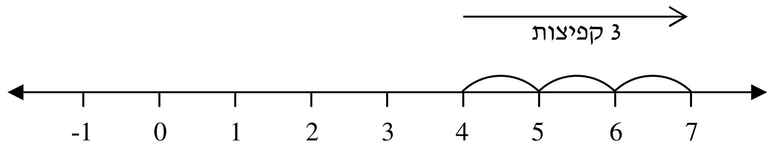
חיבור

ציר המספרים - את המספרים ניתן להציג על ציר, כאשר המספר אפס נמצא במרכז הציר, מימין לו המספרים החיוביים, ומשמאל לו המספרים השליליים.

בעזרת פעולת החיבור ניתן לחשב את סכומם של שני מספרים או יותר.
לדוגמה, $4+3=?$
נראה זאת על ציר המספרים:



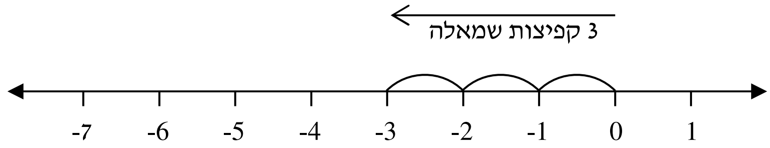
המספר 4 נמצא בנקודה 4 על ציר המספרים. כלומר, במרחק של 4 קפיצות מנקודות ההתחלה (נקודת האפס). בעקבות פעולת החיבור (3+), אנחנו "נעלה" ב-3 קפיצות על הציר:



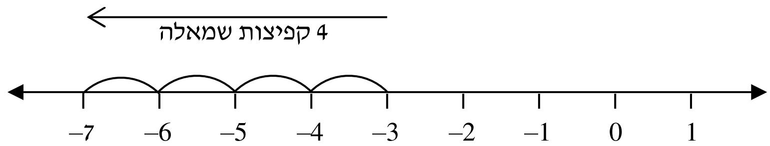
ולכן, כפי שניתן לראות $4 + 3 = 7$.

כאשר מחברים שני מספרים חיוביים, התוצאה <u>תמיד</u> תהיה חיובית.

מה קורה כאשר שני המספרים הם מספרים שליליים? לדוגמה, $(-4) + (-3)$. שוב נצייר את ציר המספרים:



המספר (-3) ממוקם על ציר המספרים 3 קפיצות "מתחת" (משמאל) לנקודת ההתחלה (נקודת האפס). בפעולת חיבור בין שני מספרים שליליים, המספר כביכול "גדל", אך מכיוון שהוא <u>שלילי</u>, הקפיצות ייעשו לצד שמאל ומבחינת הערך <u>האמיתי</u> שלו, המספר קטן:

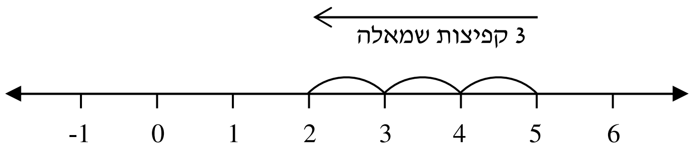


לכן, התוצאה תהיה (-7).

כאשר מחברים שני מספרים שליליים, התוצאה <u>תמיד</u> תהיה שלילית.

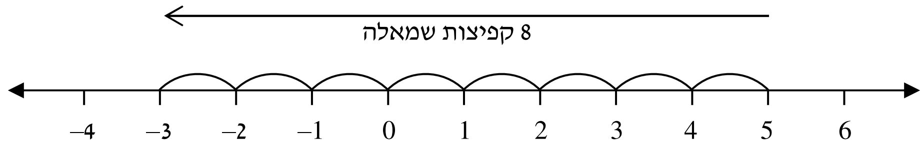
חיסור

בעזרת פעולת החיסור ניתן למצוא את ההפרש בין שני מספרים.
לדוגמה, $5 - 3 = ?$. נראה זאת על ציר המספרים:



נתמקם על ציר המספרים בנקודה 5, ובעקבות פעולת החיסור ״נקפוץ״ 3 קפיצות שמאלה. למעשה, פעולת החיסור במתמטיקה היא פעולת חיבור של מספר שלילי: $5 + (-3) = ?$. הסימן השלילי שמופיע לפני הספרה 3 ״עולה״ על סימן החיבור ונוצרת פעולת חיסור.

כאשר מחסרים מספר שלילי ממספר חיובי, סימן התוצאה נקבע על-פי ערכו של המספר ״הגדול״ יותר (בערכו המוחלט).
לדוגמה, $5 - 8 = ?$. המספר 8 גדול מהמספר 5 ולכן התוצאה תהיה שלילית.



קפצנו 8 קפיצות שמאלה והתוצאה היא שלילית.

<u>שינויים בסימן הפעולה</u>

מכיוון שאנו לא מתכוונים לשרטט את ציר המספרים בכל פעם שעלינו לבצע פעולת חיבור או חיסור, ישנם מספר כללים שכדאי לזכור:

כאשר ישנם שני סימנים רצופים זהים, ניתן להחליף אותם בפעולת חיבור אחת:

$$8 - (-3) \Rightarrow 8 + 3 \Rightarrow 11$$

$$5 + (+2) \Rightarrow 5 + 2 \Rightarrow 7$$

כאשר ישנם שני סימנים רצופים שונים, ניתן להחליף אותם בפעולת חיסור אחת:

$$9 + (-4) \Rightarrow 9 - 4 \Rightarrow 5$$

$$12 - (+5) \Rightarrow 12 - 5 \Rightarrow 7$$

כאשר מספר שלילי מופיע לפני מספר חיובי, ניתן ״לסדר״ את המספרים כך שהשלילי יהיה מימין:

$$-8 + 5 = ?$$

$$+5 - 8$$

ספרות ומספרים

ספרה היא תו שמשמש להצגת מספרים. כל מספר יכול להיות מורכב מכמה ספרות (כמו שמילה מורכבת מכמה אותיות). הספרות נקראות בהתאם למיקומם במספר - הספרה הימנית ביותר היא ספרת האחדות, הספרה משמאלה נקראת ספרת עשרות, לאחר מכן ספרת המאות, וכו'.

למשל, במספר 538, ספרת האחדות היא 8, ספרת העשרות היא 3 (והיא מייצגת 3 עשרות ← 30), וספרת המאות היא 5 (והיא מייצגת 5 מאות ← 500).

בעצם, המספר 538 מתפרק ל- 8 + 30 + 500, שהם בעצם 5 מאות, 3 עשרות ו-8 אחדות.

חיבור וחיסור ארוך

בחיבור וחיסור ארוך חשוב לשים לב שספרת האחדות של שני המספרים נמצאת אחת מתחת לשניה.

חיבור ארוך

נתחיל את התרגיל מחיבור ספרת האחדות.
אם סכום ספרות האחדות הוא דו-ספרתי, נכתוב את ספרת האחדות בתוצאה, ואת ספרת העשרות נכתוב מעל לספרת העשרות של המספר ($5+7=12$):

$$\begin{array}{ccccc} & & & 1 & \\ & 5 & 4 & 6 & 7 \\ + & 3 & 8 & 2 & 5 \\ \hline & & & & 2 \end{array}$$

כעת נחבר את ספרת העשרות, ונוסיף את ה-1 שהעברנו ($1+6+2=9$):

$$\begin{array}{ccccc} & & & 1 & \\ & 5 & 4 & 6 & 7 \\ + & 3 & 8 & 2 & 5 \\ \hline & & & 9 & 2 \end{array}$$

כעת נחבר את ספרת המאות ($4+8=12$). גם כאן יוצא מספר דו-ספרתי ולכן נעביר את ספרת המאות:

$$\begin{array}{ccccc} & 1 & & 1 & \\ & 5 & 4 & 6 & 7 \\ + & 3 & 8 & 2 & 5 \\ \hline & & 2 & 9 & 2 \end{array}$$

כל שנותר הוא לחבר את ספרת האלפים, ושוב, לא לשכוח את ה-1 שהוספנו ($5+3+1=9$):

$$\begin{array}{ccccc} & 1 & & 1 & \\ & 5 & 4 & 6 & 7 \\ + & 3 & 8 & 2 & 5 \\ \hline & 9 & 2 & 9 & 2 \end{array}$$

התוצאה הסופית היא: 9,292.

חיסור ארוך

גם בתרגיל חיסור, כמו בחיבור, נכתוב את המספרים כאשר ספרת האחדות של מספר אחד נמצאת מתחת לספר האחדות של המספר השני.
כמו בתרגיל החיבור, נתחיל בספרת האחדות. בכל שלב נחסר את הספרה של המספר התחתון מהספרה המתאימה של המספר העליון.

לעיתים, ניתקל במצב בו הספרה של המספר העליון תהיה קטנה יותר מהספרה במספר התחתון, ולכן לא ניתן לבצע את פעולת החיסור (מכיוון שנקבל תוצאה שלילית).
במצב זה, עלינו לקחת "הלוואה" מהספרה שמשמאל, ולהמשיך לחסר.

דוגמה:

$3049 - 2356 = ?$

פתרון:
תחילה, נכתוב את התרגיל באופן מאונך, כך שספרות האחדות של שני המספרים נמצאות באותו טור:

$$\begin{array}{r} 3049 \\ -\underline{2356} \end{array}$$

נתחיל לפתור את התרגיל מחיסור ספרת האחדות $9 - 6 = 3$:

$$\begin{array}{r} 3049 \\ -\underline{2356} \\ 3 \end{array}$$

כעת נעבור לטור העשרות. מכיוון שלא ניתן לחסר 5 מ-4, יש לנו צורך ב"הלוואה", אך יש לנו בעיה מכיוון שבטור המאות יש לנו את הספרה 0. כלומר, אין לנו מה "ללוות" ממנה, ולכן, נפנה לספרת האלפים, ממנה "נלווה" 10 לטור המאות ואז נוכל "ללוות" 10 לטור העשרות. נשאר לנו 2 בטור האלפים, 9 בטור המאות ו-14 בטור העשרות.
כעת נחסר - $14 - 5 = 9$:

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 2\,9} \\ \cancel{3}\cancel{0}49 \\ -\underline{2356} \\ 93 \end{array}$$

נעבור לספרת המאות, שכעת יש בה 9 ונחסר - $9 - 3 = 6$:

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 2\,9} \\ \cancel{3}\cancel{0}49 \\ -\underline{2356} \\ 693 \end{array}$$

בספרת האלפים נותרה הספרה 2 בשני המספרים, ולכן כאשר נחסר נקבל אפס (אין צורך לכתוב זאת).
התוצאה הסופית היא: 693

גישות פסיכומטריות

חיבור

ישנן שתי גישות פסיכומטריות לפתרון תרגיל חיבור:

א. שיטת אחדות/עשרות:
בשיטה זו, אנו מפרקים את המספרים לעשרות ולאחדות, ומחברים אותן בנפרד.
לדוגמה, אם נרצה לחבר את 37 ו-25: נחבר בנפרד את 30 ו-20, ואת 7 ו-5, ונחבר את הסכומים.

$$37 + 25 = (30 + 20) + (7 + 5) = 50 + 12 = 62$$

ב. שיטת השלמה ל-10:
בשיטה זו, אנו מעבירים אחדות מאחד המספרים כך שהמספר השני הופך לעגול, ואז מחברים את מה שנשאר.
לדוגמה, אם נרצה לחבר את 37 ו-25: ניקח 3 אחדות מ-25 ונוסיף ל-37, וכעת נשאר לנו לחבר את המספרים 40 ו-22.

$$37 + 25 = 40 + 22 = 62$$

חיסור

א. שיטת אחדות/עשרות:
בדומה לשיטה בחיבור, גם כאן נפרק את המספר לעשרות ואחדות ונחסר ביניהן, ואז נחבר את ההפרשים. נשים לב כאשר ההפרשים הם שליליים ונחשב בהתאם.
לדוגמה, אם נרצה לחסר את 58 מ-86, נחסר קודם כל את 50 מ-80, ואת 8 מ-6 (נשים לב שקיבלנו תוצאה שלילית) ונחבר את ההפרשים.

$$86 - 58 = (80 - 50) + (6 - 8) = 30 + (-2) = 28$$

ב. שיטת השלמה ל-10:
בשיטה זו, "נזיז" את שני המספרים (כלומר, נוסיף או נוריד משני המספרים את אותו סכום) כך שהמספר שמחסרים יהיה עגול.
לדוגמה, אם נרצה לחסר את 58 מ-86, נוכל "להזיז" את שני המספרים 2 צעדים קדימה (כלומר להוסיף לשניהם 2) ולקבל תרגיל פשוט יותר.

$$86 - 58 = 88 - 60 = 28$$

תרגול - חיבור וחיסור

.1 $96 - 68 = ?$

(1) 28 (2) 22 (3) 32 (4) 38

.2 $79 + (-37) = ?$

(1) 126 (2) 116 (3) 32 (4) 42

.3 $71 - 34 = ?$

(1) 27 (2) 23 (3) 33 (4) 37

.4 $3,742 + 94 = ?$

(1) 3,816 (2) 3,826 (3) 3,836 (4) 3,846

.5 $654 - 456 = ?$

(1) 182 (2) 188 (3) 192 (4) 198

תשובות

שאלה	1	2	3	4	5
תשובה	1	4	4	3	4

1. תשובה (1) נכונה

דרך א' – שיטת אחדות/עשרות
בדומה לשיטה בחיבור, גם כאן נפרק את המספר לעשרות ואחדות ונחסר ביניהן, ואז נחבר את ההפרשים. נשים לב כאשר ההפרשים הם שליליים ונחשב בהתאם.

לדוגמה, אם נרצה לחסר את 68 מ-96, נחסר קודם כל את 60 מ-90, ואת 8 מ-6 (נשים לב שקיבלנו תוצאה שלילית) ונחבר את ההפרשים.

$$96 - 68 = (90 - 60) + (6 - 8) = 30 + (-2) = 28$$

דרך ב' – שיטת השלמה ל-10
בשיטה זו, "נזיז" את שני המספרים (כלומר, נוסיף או נוריד משני המספרים את אותו סכום) כך שהמספר שמחסרים יהיה עגול.

לדוגמה, אם נרצה לחסר את 68 מ-96, נוכל "להזיז" את שני המספרים 2 צעדים קדימה (כלומר להוסיף לשניהם 2) ולקבל תרגיל פשוט יותר.

$$96 - 68 = 98 - 70 = 28$$

---

2. תשובה (4) נכונה

דרך א' – שיטת אחדות/עשרות

$$79 + (-37) = 79 - 37 = (70 - 30) + (9 - 7) = 40 + 2 = 42$$

דרך ב' – שיטת השלמה ל-10

$$79 + (-37) = 79 - 37 = 82 - 40 = 42$$

---

3. תשובה (4) נכונה

דרך א' – שיטת אחדות/עשרות

$$71 - 34 = (70 - 30) + (1 - 4) = 40 + (-3) = 40 - 3 = 37$$

דרך ב' – שיטת השלמה ל-10

$$71 - 34 = 77 - 40 = 37$$

---

4. תשובה (3) נכונה

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1} \\ +3{,}742 \\ \underline{\phantom{0{,}0}94} \\ 3{,}836 \end{array}$$

---

5. תשובה (4) נכונה

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 5\,4} \\ -\ 654 \\ \underline{456} \\ 198 \end{array}$$

כפל וחילוק

נתחיל בהסבר מימי בית-הספר היסודי:

- פעולת הכפל היא פעולת "פעמים".

<u>דוגמאות:</u>

$? = 5 \cdot 2$ ← 2 פעמים המספר 5 ← $5 + 5 = 10$

$? = 4 \cdot 3$ ← 3 פעמים המספר 4 ← $4 + 4 + 4 = 12$

$? = 25 \cdot 4$ ← 4 פעמים המספר 25 ← $25 + 25 + 25 + 25 = 100$

- פעולת החילוק היא פעולה השואלת: "כמה פעמים נכנס מספר אחד במספר שני?".

<u>דוגמה:</u>

$10 : 2 = 5$ ← כמה פעמים נכנס המספר 2 בתוך המספר 10 ← $2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 10$

מה שחשוב מבחינתנו בהיבט הפסיכומטרי הם הסימנים בפעולות הללו (חיובי/שלילי), ולכך יש כמה חוקים ברורים:

- כאשר כופלים או מחלקים שני מספרים חיוביים, התוצאה <u>תמיד</u> חיובית:

פלוס כפול פלוס = פלוס ← $(+2)\cdot(+5) = (+10)$.

פלוס חלקי פלוס = פלוס ← $(+8):(+4) = (+2)$. ניתן לכתוב גם כך: $\frac{+8}{+4} = +2$.

- כאשר כופלים או מחלקים שני מספרים שליליים, התוצאה <u>תמיד</u> חיובית:

מינוס כפול מינוס = פלוס ← $(-2)\cdot(-5) = (+10)$.

מינוס חלקי מינוס = פלוס ← $(-8):(-4) = (+2)$. ניתן לכתוב גם כך: $\frac{-8}{-4} = +2$.

- כאשר כופלים או מחלקים שני מספרים בעלי סימנים שונים, התוצאה <u>תמיד</u> שלילית:

פלוס כפול מינוס = מינוס ← $(+2)\cdot(-5) = (-10)$.

מינוס כפול פלוס = מינוס ← $(-3)\cdot(+7) = (-21)$.

מינוס חלקי פלוס = מינוס ← $(-8):(+4) = (-2)$. ניתן לכתוב גם כך: $\frac{-8}{+4} = -2$.

פלוס חלקי מינוס = מינוס ← $(+9):(-3) = (-3)$. ניתן לכתוב גם כך: $\frac{+9}{-3} = -3$.

חוקים חשובים נוספים:

- כאשר כופלים מספר כלשהו באפס, התוצאה <u>תמיד</u> תהיה אפס.

$$8 \cdot 0 = 0$$
$$147 \cdot 0 = 0$$

- כאשר מחלקים את אפס במספר כלשהו, התוצאה <u>תמיד</u> תהיה אפס.

$$\frac{0}{8} = \frac{0}{147} = 0$$

- כאשר מחלקים מספר כלשהו באפס, הביטוי יהיה חסר משמעות ("E" במחשבון בבגרות, זוכרים?).

אין משמעות = $\frac{8}{0}$, $\frac{147}{0}$

לוח הכפל:

	2	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
2	**4**	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
3	6	**9**	12	15	18	21	24	27	30	33	36
4	8	12	**16**	20	24	28	32	36	40	44	48
5	10	15	20	**25**	30	35	40	45	50	55	60
6	12	18	24	30	**36**	42	48	54	0	66	72
7	14	21	28	35	42	**49**	56	63	70	77	84
8	16	24	32	40	48	56	**64**	72	80	88	96
9	18	27	36	45	54	63	72	**81**	90	99	108
10	20	30	40	50	60	70	80	90	**100**	110	120
11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	**121**	132
12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	**144**

כפל ארוך

לדוגמה: $49 \cdot 25 = ?$

נכפול תחילה את ספרת האחדות התחתונה (5) בספרת האחדות העליונה (9): $5 \cdot 9 = 45$. נכתוב למטה רק את ספרת האחדות (5) ואת ספרת העשרות נכתוב מעל טור העשרות:

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 4\;} \\ \times\ 49 \\ \underline{25} \\ 5 \end{array}$$

כעת נכפול את ספרת האחדות התחתונה (5) בספרת העשרות העליונה (4): $4 \cdot 5 = 20$. לתוצאה שקיבלנו נוסיף את הספרה 4 שכתבנו מעל טור העשרות ($20 + 4 = 24$) ונכתוב משמאל ל-5:

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 4\;} \\ \times\ 49 \\ \underline{25} \\ 245 \end{array}$$

כעת עלינו לכפול את ספרת העשרות התחתונה (2) בספרת האחדות העליונה (9): $2 \cdot 9 = 18$. את הרישום נבצע שורה מתחת לרישום הקודם ונתחיל בטור העשרות. את ספרת האחדות שקיבלנו (8) נכתוב בטור העשרות ואת ספרת העשרות שקיבלנו (1) נכתוב למעלה בטור המאות:

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\ 4\;} \\ \times\ 49 \\ \underline{25} \\ 245 \\ 8 \end{array}$$

כעת נכפול את ספרת העשרות התחתונה (2) בספרת העשרות העליונה (4): $2 \cdot 4 = 8$. נוסיף את ה-1 שרשמנו בטור המאות ($8 + 1 = 9$) ונכתוב את התוצאה בטור המאות משמאל ל-8:

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\ 4\;} \\ \times\ 49 \\ \underline{25} \\ 245 \\ 98 \end{array}$$

כעת, כל שנותר לעשות הוא לחבר את שני המספרים שקיבלנו:

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\ 4\;} \\ \times\ 49 \\ \underline{25} \\ 245 \\ +\ \underline{98} \\ 1225 \end{array}$$

התוצאה הסופית היא: 1,225.

חילוק ארוך

לדוגמה: $686 : 7 = ?$

נסתכל על הספרה השמאלית ביותר ונבדוק האם 7 נכנס בה. התשובה היא לא. 7 לא נכנס ב-6 ולכן נכתוב 0 בטור המאות:

$$\begin{array}{l} \underline{0} \\ 686 \rfloor 7 \end{array}$$

נוסיף את הספרה הסמוכה (8) ונבדוק כמה פעמים 7 נכנס ב-68. התשובה היא 9, ולכן נכתוב 9 בטור העשרות.
$7 \cdot 9 = 63$, לכן נכתוב 63 מתחת ל-68 ונחסר. התוצאה היא 5:

$$\begin{array}{l} \underline{09} \\ -686 \rfloor 7 \\ \underline{63} \\ 5 \end{array}$$

כעת נכתוב את הספרה הבאה (6) בצמוד ל-5 שנותר. קיבלנו את המספר 56 ו-7 נכנס 8 פעמים ב-56:

$$\begin{array}{l} \underline{098} \\ -686 \rfloor 7 \\ \underline{63} \\ -56 \\ \underline{56} \\ 0 \end{array}$$

התשובה הסופית היא: 98.

חילוק במספר דו ספרתי

לדוגמה: $3939 : 39 = ?$

א. ניתן לראות ש-39 לא נכנס בספרה השמאלית ביותר (3) ולכן נכתוב 0 בטור האלפים.

ב. נוסיף את הספרה הסמוכה (9) ונבדוק שוב האם 39 נכנס ב-39. התשובה היא כן, פעם אחת ולכן נכתוב בטור המאות את הספרה 1.

ג. כעת נעבור לטור העשרות ושוב ניתן לראות שלא ניתן להכניס 39 ב-3 ולכן נכתוב 0 בטור העשרות.

ד. נוסיף את הספרה הסמוכה (9) ושוב, 39 נכנס בדיוק פעם אחת ב-39. נכתוב 1 בטור האחדות.

א

$$\begin{array}{l} \underline{0} \\ 3939 \rfloor 39 \end{array}$$

$\Rightarrow$

ב

$$\begin{array}{l} \underline{01} \\ -3939 \rfloor 39 \\ \underline{39} \\ 0 \end{array}$$

$\Rightarrow$

ג

$$\begin{array}{l} \underline{010} \\ -3939 \rfloor 39 \\ \underline{39} \\ 0 \end{array}$$

$\Rightarrow$

ד

$$\begin{array}{l} \underline{0101} \\ -3939 \rfloor 39 \\ \underline{39} \\ -039 \\ \underline{39} \\ 0 \end{array}$$

התשובה הסופית היא: 101.

חילוק עם שארית

לדוגמה: $5371 : 3 = ?$

נתחיל בחישוב רגיל, כפי שעשינו בתרגילים הקודמים -

א. נסתכל על הספרה השמאלית ביותר (5) ונבדוק כמה פעמים 3 נכנס בה. התשובה היא פעם אחת. נכתוב 1 מעל טור האלפים.

ב. חיסרנו 3 מ-5 וקיבלנו 2. נוסיף את הספרה הסמוכה (3) ונבדוק כמה פעמים נכנסת הספרה 3 ב-23. התשובה היא 7 פעמים ($3\cdot 7 = 21$). נכתוב את הספרה 7 בטור המאות.

ג. חיסרנו 21 מ-23 וקיבלנו 2. נוסיף את הספרה הסמוכה (7) ונבדוק כמה פעמים נכנסת הספרה 3 ב-27. התשובה היא 9 פעמים ($3\cdot 9 = 27$). נכתוב את הספרה 9 בטור העשרות.

ד. 3 נכנס ב-27 בדיוק 9 פעמים ולכן נעבור לספרה הנותרת (1). נבדוק כמה פעמים 3 נכנס ב-1. התשובה היא 0 פעמים ולכן נכתוב 0 בטור האחדות. אך, בל נשכח את הספרה שנותרה (1), שהיא בעצם השארית. נכתוב אותה מעל המספר 3 ונוסיף קו שבר.

א
```
1
5371|3
3
2
```
⇒

ב
```
17
5371|3
3
23
21
 2
```
⇒

ג
```
179
5371|3
3
23
21
 27
 27
  0
```
⇒

ד
```
1790 1
5371|3
3
23
21
 27
 27
  01
```

התשובה הסופית היא: $1790\frac{1}{3}$.

דוגמה נוספת: $632 : 6 = ?$

א. נבדוק האם 6 נכנס בספרה השמאלית (6). התשובה היא כן, פעם אחת ולכן נכתוב 1 מעל טור המאות.

ב. נוסיף את הספרה הבאה (3) ונבדוק האם 6 נכנס ב-3. התשובה היא לא, ולכן נכתוב 0 בטור העשרות.

ג. נוסיף את הספרה הבאה (2) ל-3 ונבדוק האם 6 נכנס ב-32. התשובה היא כן, 5 פעמים עם שארית 2.

א
```
1
632|6
6
0
```
⇒

ב
```
10
632|6
6
03
```
⇒

ג
```
105 2
632|6
6
032
 30
  2
```

התשובה הסופית היא: $105\frac{2}{6}$.

חשוב לשים לב: כאשר המספר לא נכנס בספרה שאנחנו בודקים, יש להקפיד לכתוב 0 בטור המתאים. למשל, בדוגמה הנ"ל, התשובה היא 105 ולא 15 או 150. מיקומו של ה-0 חשוב מאד!!

דוגמה נוספת: $4554 : 44 = ?$

א. ניתן לראות שהמספר 44 לא נכנס בספרה השמאלית (4) ולכן נכתוב 0 בטור האלפים:

ב. כעת נוסיף את הספרה הסמוכה (5) ונבדוק שוב האם 44 נכנס ב-45. התשובה היא כן, פעם אחת. נכתוב 1 בטור המאות. נחסר 44 מ-45 ונקבל 1:

ג. נוסיף את הספרה הבאה (5) ונבדוק האם 44 נכנס ב-15. התשובה היא לא, לכן נכתוב 0 בטור העשרות, ונוסיף את הספרה הבאה (4). נבדוק כמה פעמים נכנס 44 ב-154. התשובה היא 3 פעמים. נכתוב 3 בטור האחדות ולא נשכח לכתוב את השארית 22:

<u>א</u>

$$\begin{array}{l|l} \underline{0} & \\ 4554 & 44 \end{array}$$

$\Rightarrow$

<u>ב</u>

$$\begin{array}{l|l} \underline{01} & \\ 4554 & 44 \\ \underline{44} & \\ \ 1 & \end{array}$$

$\Rightarrow$

<u>ג</u>

$$\begin{array}{l|l} \underline{0103} & \underline{22} \\ 4554 & 44 \\ \underline{44} & \\ \ 154 & \\ \ \underline{132} & \\ \ \ 22 & \end{array}$$

התשובה הסופית היא: $103\frac{22}{44} = 103\frac{1}{2}$.

גישות פסיכומטריות לכפל וחילוק

כפל באמצעות פירוק מספר

בנוסף לשיטות הקונבנציונאליות שנלמד בהמשך, ישנה שיטה פסיכומטרית לחישוב תרגילי כפל באמצעות פירוק מספרים.
לדוגמה, אם נרצה לכפול את 34 ב-3, נפרק את המספר לעשרות ולאחדות ונכפול כל אחד בנפרד - 30 כפול 3 ו-4 כפול 3, ונחבר את המכפלות.

$$34 \cdot 3 = (30 \cdot 3) + (4 \cdot 3) = 90 + 12 = 102$$

נוכל לעשות זאת גם במספרים גדולים יותר, לדוגמה 45 כפול 12:

$$45 \cdot 12 = (45 \cdot 10) + (45 \cdot 2) = 450 + 90 = 540$$

חילוק באמצעות פירוק מספר

חילוק ארוך היא טכניקה יעילה כאשר מדובר בחילוק מספרים גדולים, אולם, במבחן הפסיכומטרי כמעט שלא נזדקק לה, שכן רוב החישובים במבחן יהיו פשוטים. כאשר מדובר בתרגילי חילוק, נוכל לעשות זאת על-ידי פירוק המספר למספרים מוכרים לנו, ללא צורך בטכניקה של חילוק ארוך.

לדוגמה: $280 : 5 = ?$

על-מנת לחלק את 280 ל-5, אפשר לפרק את 280 ל-250 ול-30:

$$\begin{array}{ccc} 250 & & 30 \\ \nwarrow & & \nearrow \\ & \frac{280}{5} & \end{array}$$

250 לחלק ל-5 הם 50, 30 לחלק ל-5 הם 6, ולכן, התוצאה הסופית תהיה 56.

טכניקה זו של פירוק מספר היא **<u>היעילה ביותר</u>** לחישובים שנידרש להם בשאלות האלגברה במבחן הפסיכומטרי.

דוגמה נוספת: $656 : 8 = ?$

נפרק את 656 ל-640 ול-16:

$$\begin{array}{ccc} 640 & & 16 \\ \nwarrow & & \nearrow \\ & \frac{656}{8} & \end{array}$$

640 לחלק ל-8 הם 80, 16 לחלק ל-8 הם 2 - סה"כ 82.

תרגול - כפל וחילוק

1. $(-56) : 8 = ?$

(1) 7 (2) -7 (3) 8 (4) -8

---

2. $13 \cdot 7 = ?$

(1) 91 (2) 98 (3) 103 (4) 123

---

3. $72 : 6 = ?$

(1) 11 (2) 12 (3) 13 (4) 14

---

4. $60 : 5 = ?$

(1) 11 (2) 12 (3) 13 (4) 14

---

5. $4{,}477 : 11 = ?$

(1) 407 (2) 417 (3) 427 (4) 397

תשובות

שאלה	1	2	3	4	5
תשובה	2	1	2	2	1

.1 תשובה (2) נכונה

המנה של מספרים שוני סימן היא שלילית (מספר שלילי חלקי מספר חיובי). נחשב את המנה ונוסיף את הסימן המתאים לאחר שנמצא את התוצאה:

$56 : 8 = 7$

$(-56) : 8 = -7$

.2 תשובה (1) נכונה

דרך א' – שיטת אחדות/עשרות

$$13 \cdot 7 = (10 \cdot 7) + (3 \cdot 7) = 70 + 21 = 91$$

דרך ב' – כפל ארוך

$$\begin{array}{r} {}^{2} \\ \times\, 13 \\ 7 \\ \hline 91 \end{array}$$

.3 תשובה (2) נכונה

דרך א' – פירוק מספר

$$72 : 6 = (60 : 6) + (12 : 6) = 10 + 2 = 12$$

דרך ב' – חילוק ארוך

$$\begin{array}{r|l} \underline{12} & \\ -72 & 6 \\ \underline{6} & \\ -12 & \\ \underline{12} & \\ 0 & \end{array}$$

---

4. תשובה (2) נכונה

דרך א' – פירוק מספר

$$60 : 5 = (50 : 5) + (10 : 5) = 10 + 2 = 12$$

<u>דרך נוחה לחלוקה ב-5:</u> להתעלם מה-0 בספרת האחדות ולכפול ב-2.

$$60 : 5 = 6 \cdot 2 = 12$$

דרך ב' – חילוק ארוך

$$\begin{array}{l} \underline{12} \\ 60 \overline{)\,5} \\ \underline{5} \\ 10 \\ \underline{10} \\ \;\;0 \end{array}$$

---

5. תשובה (1) נכונה

דרך א' – פירוק מספר

$$4477 : 11 = (4400 : 11) + (77 : 11) = 400 + 7 = 407$$

דרך ב' – חילוק ארוך

$$\begin{array}{l} \;\;\underline{407} \\ -4{,}477 \,|\, 11 \\ \;\;\underline{44} \\ \;\;\;\;-77 \\ \;\;\;\;\;\;\underline{77} \\ \;\;\;\;\;\;\;\;0 \end{array}$$

סדר פעולות חשבון

הסדר בו מבוצעות פעולות החשבון השונות בתרגיל האלגברי משפיע על תוצאת התרגיל. לדוגמה, בתרגיל $3\cdot2+5$, אם תבוצע פעולת הכפל לפני פעולת החיבור, תהיה תוצאת התרגיל $3\cdot2+5=6+5=11$. זוהי הדרך הנכונה. אם נבצע באותו תרגיל את פעולת החיבור לפני פעולת הכפל, תוצאת התרגיל תהיה $3\cdot2+5=3\cdot7=21$. זוהי הדרך השגויה.

סדר הפעולות בפתרון תרגילים אלגבריים הוא:

סוגרים $\Leftarrow$ חזקות ושורשים $\Leftarrow$ כפל וחילוק $\Leftarrow$ חיבור וחיסור

דוגמה:

$4\cdot3^2-(6+8\div2)=?$

תחילה נבצע את פעולת החזקה ואת פעולת החילוק בתוך הסוגריים:

$$\begin{array}{l}4\cdot\mathbf{3^2}-(6+\mathbf{8\div2})=\\ \quad\Downarrow\qquad\qquad\quad\Downarrow\\ 4\cdot\mathbf{9}-(6+\ \mathbf{4}\ )=\\ \Downarrow\qquad\quad\ \Downarrow\\ 36\ -\ \ 10\quad=26\end{array}$$

תרגול - סדר פעולות חשבון

.1 $3 + 5 \cdot 4 = ?$

(1) 12 (2) 17 (3) 23 (4) 40

.2 $5 \cdot (3 - 5) : (-2) = ?$

(1) 1 (2) -1 (3) 5 (4) -5

.3 $4 - (8 - 4 : 4) = ?$

(1) -4 (2) -3 (3) 3 (4) 4

.4 $[10 + (-5)] \cdot [(-4) - (-4)] - (-1) = ?$

(1) 1 (2) -39 (3) 39 (4) 41

.5 $20 : [2 \cdot (5 - 3) : 2] = ?$

(1) 10 (2) 20 (3) 5 (4) 4

תשובות

שאלה	1	2	3	4	5
תשובה	3	3	2	1	1

1. תשובה (3) נכונה

$3 + 5 \cdot 4 = 3 + (5 \cdot 4) = 3 + 20 = 23$

---

2. תשובה (3) נכונה

$5 \cdot (3 - 5) \div (-2) = 5 \cdot (-2) \div (-2) = (-10) \div (-2) = 5$

---

3. תשובה (2) נכונה

$4 - (8 - 4 \div 4) = 4 - \big(8 - (4 \div 4)\big) = 4 - (8 - 1) = 4 - 7 = -3$

---

4. תשובה (1) נכונה

$[10 + (-5)] \cdot [(-4) - (-4)] - (-1) = 5 \cdot 0 - (-1) = 0 + 1 = 1$

---

5. תשובה (1) נכונה

$20 \div [2 \cdot (5 - 3) \div 2] = 20 \div (2 \cdot 2 \div 2) = 20 \div (4 \div 2) = 20 \div 2 = 10$

תרגול מסכם יסודות

.1 $22 + 37 = ?$

(1) 59 (2) 61 (3) 69 (4) 71

.2 $66 - (-55) = ?$

(1) 11 (2) 9 (3) 111 (4) 121

.3 $57 - 23 = ?$

(1) 14 (2) 24 (3) 34 (4) 44

.4 $87 + (-28) = ?$

(1) 51 (2) 59 (3) 61 (4) 69

.5 $-51 - 37 = ?$

(1) -88 (2) -12 (3) -86 (4) -14

.6 $23 - 45 = ?$

(1) -28 (2) -22 (3) -26 (4) -24

.7 $354 + 73 = ?$

(1) 417 (2) 427 (3) 437 (4) 407

.8 $777 + 333 = ?$

(1) 1,111 (2) 1,110 (3) 1,100 (4) 1,101

.9 $9{,}002 - 993 = ?$

(1) 8,011 (2) 7,999 (3) 8,009 (4) 8,001

.10 $4{,}004 - 505 = ?$

(1) 3,501 (2) 3,499 (3) 3,491 (4) 3,489

.11 $(-45) : (-5) = ?$

(1) 9 (2) 7 (3) -9 (4) -7

.12 $8 \cdot 12 = ?$

(1) 96 (2) 94 (3) 86 (4) 84

.13 $11 \cdot 13 = ?$

(1) 141 (2) 142 (3) 133 (4) 143

.14 $777 \cdot 11 = ?$

(1) 8,577 (2) 8,567 (3) 8,557 (4) 8,547

.15 $220 : 4 = ?$

(1) 55 (2) 54 (3) 45 (4) 44

.16 $171 : 3 = ?$

(1) 69 (2) 59 (3) 67 (4) 57

.17 $2,639 : 13 = ?$

(1) 213 (2) 223 (3) 233 (4) 203

.18 $100 : 6 = ?$

(1) $16\frac{1}{6}$ (2) $16\frac{2}{3}$ (3) $16\frac{1}{3}$ (4) $16\frac{5}{6}$

.19 $12 : (6 - 2) - (-3) \cdot 2 = ?$

(1) 9 (2) 12 (3) -3 (4) 6

.20 $10 : (-5) - (-5) \cdot (-3) = ?$

(1) 17 (2) -13 (3) 13 (4) -17

תשובות

שאלה	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
תשובה	1	4	3	2	1	2	2	2	3	2

שאלה	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
תשובה	1	1	4	4	1	4	4	2	1	4

1. תשובה (1) נכונה

דרך א' – שיטת אחדות/עשרות

$22+37 = (20+30)+(2+7) = 50+9 = 59$

דרך ב' – שיטת השלמה ל-10

$22+37 = 20+39 = 59$

---

2. תשובה (4) נכונה

דרך א' – שיטת אחדות/עשרות

$66-(-55) = 66+55 = (60+50)+(6+5) = 110+11 = 121$

דרך ב' – שיטת השלמה ל-10

$66-(-55) = 66+55 = 70+51 = 121$

---

3. תשובה (3) נכונה

דרך א' – שיטת אחדות/עשרות

$57-23 = (50-20)+(7-3) = 30+4 = 34$

דרך ב' – שיטת השלמה ל-10

$57-23 = 64-30 = 34$

---

4. תשובה (2) נכונה

דרך א' – שיטת אחדות/עשרות

$87+(-28) = 87-28 = (80-20)+(7-8) = 60+(-1) = 59$

דרך ב' – שיטת השלמה ל-10

$87+(-28) = 87-28 = 89-30 = 59$

---

5. תשובה (1) נכונה

כאשר אנו מחסרים מספר ממספר שלילי, הערך המספרי של התוצאה יהיה כמו בפעולת חיבור, אך הסימן שלה יהיה שלילי.

$$-51-37=-(51+37)=-88$$

---

6. תשובה (2) נכונה

כאשר מחסרים מספר גדול ממספר קטן, הערך המספרי של התוצאה הוא ההפרש בין המספרים (כמו שהיינו מחסרים את הקטן מהגדול), וסימן התוצאה שלילי.

$$23-45=-(45-23)=-22$$

---

7. תשובה (2) נכונה

$$\begin{array}{r} \scriptstyle 1 \\ +354 \\ \underline{73} \\ 427 \end{array}$$

---

8. תשובה (2) נכונה

$$\begin{array}{r} \scriptstyle 1\,1 \\ +777 \\ \underline{333} \\ 1{,}110 \end{array}$$

---

9. תשובה (3) נכונה

$$\begin{array}{r} \scriptstyle 8\;\;9\;9 \\ -\,9{,}002 \\ \underline{993} \\ 8{,}009 \end{array}$$

---

10. תשובה (2) נכונה

$$\begin{array}{r} \scriptstyle 3\;\;9\;9 \\ -\,4{,}004 \\ \underline{505} \\ 3{,}499 \end{array}$$

---

11. תשובה (1) נכונה

כאשר מחלקים מספר שלילי במספר שלילי, התוצאה חיובית. לפיכך:

$$(-45)\div(-5)=45\div 5=9$$

.12 תשובה (1) נכונה

דרך א' – שיטת אחדות/עשרות

$$12 \cdot 8 = (10 \cdot 8) + (2 \cdot 8) = 80 + 16 = 96$$

דרך ב' – כפל ארוך

$$\begin{array}{r} {}^{1} \\ {}_{x}12 \\ \underline{8} \\ 96 \end{array}$$

.13 תשובה (4) נכונה

דרך א' – שיטת אחדות/עשרות

$$13 \cdot 11 = (10 \cdot 13) + (1 \cdot 13) = 130 + 13 = 143$$

דרך ב' – כפל ארוך

$$\begin{array}{lr} & {}_{x}13 \\ & \underline{11} \\ + & 13 \\ & \underline{13} \\ & 143 \end{array}$$

.14 תשובה (4) נכונה

דרך א' – שיטת אחדות/עשרות

$$777 \cdot 11 = (10 \cdot 777) + (1 \cdot 777) = 7{,}770 + 777 = 8{,}547$$

דרך ב' – כפל ארוך

$$\begin{array}{lr} & {}_{x}777 \\ & \underline{11} \\ + & 777 \\ & \underline{777} \\ & 8{,}547 \end{array}$$

.15 תשובה (1) נכונה

דרך א' – שיטת אחדות/עשרות

$$220 : 4 = (200 : 4) + (20 : 4) = 50 + 5 = 55$$

דרך ב' – חילוק ארוך

$$\begin{array}{r|l} \underline{55} & \\ -220 & 4 \\ \underline{20} & \\ -20 & \\ \underline{20} & \\ 0 & \end{array}$$

---

16. תשובה (4) נכונה

דרך א׳ – שיטת אחדות/עשרות

$$171 : 3 = (150 : 3) + (21 : 3) = 50 + 7 = 57$$

דרך ב׳ – חילוק ארוך

$$\begin{array}{r|l} \overline{\;57} & \\ -171 & 3 \\ \underline{15\;} & \\ -21 & \\ \underline{21} & \\ 0 & \end{array}$$

---

17. תשובה (4) נכונה

דרך א׳ – פירוק מספר

$$2639 : 13 = (2600 : 13) + (39 : 13) = 200 + 3 = 203$$

דרך ב׳ – חילוק ארוך

$$\begin{array}{r|l} \overline{\;203} & \\ -2{,}639 & 13 \\ \underline{2\,6\;\;\;} & \\ -39 & \\ \underline{39} & \\ 0 & \end{array}$$

---

18. תשובה (2) נכונה

דרך א׳ – פירוק מספר

$$100 : 6 = (60 : 6) + (36 : 6) + (4 : 6) = 10 + 6 + \frac{4}{6} = 16\frac{2}{3}$$

דרך ב׳ – חילוק ארוך

$$\begin{array}{r|l} \overline{\;16} & \\ -100 & 6 \\ \underline{6\;} & \\ -40 & \\ \underline{36} & \\ 4 & \end{array} \quad \rightarrow \quad 16\frac{4}{6} = 16\frac{2}{3}$$

---

19. תשובה (1) נכונה

$$12 \div (6-2) - (-3)\cdot 2 = \big(12 \div (6-2)\big) - \big((-3)\cdot 2\big) = (12 \div 4) - (-6) = 3 - (-6) = 9$$

---

20. תשובה (4) נכונה

$$10 \div (-5) - (-5)\cdot(-3) = \big(10 \div (-5)\big) - \big((-5)\cdot(-3)\big) = (-2) - (15) = -17$$

שברים - יסודות

מבוא לשברים

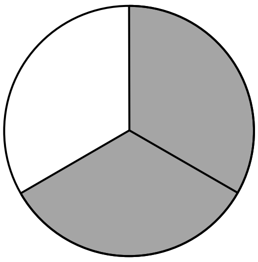
שבר הוא מספר לא שלם המורכב ממונה וממכנה. המונה הוא המספר שנמצא מעל קו השבר, והמכנה הוא המספר שנמצא מתחת לקו השבר. ישנם מספר סוגים של שברים:

שבר פשוט - שבר קטן מ-1, שבר שבו המונה קטן מהמכנה ← $\frac{3}{5}$

שבר מדומה - שבר גדול מ-1, שבר שבו המונה גדול מהמכנה ← $\frac{7}{2}$

מספר מעורב - מספר המורכב ממספר שלם ושבר ← $4\frac{2}{3}$

שבר הוא מספר המייצג חלק כלשהו **מתוך** מספר שלם. נראה זאת בעזרת סרטוט:

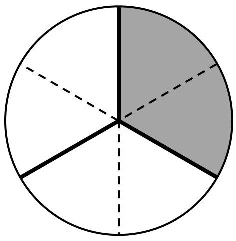


חילקנו את העיגול ל-3 חלקים שווים. ישנם 2 חלקים צבועים ולכן החלקים הצבועים בעיגול הם 2 **מתוך** 3. הדרך לרשום זאת בשבר היא: $\frac{2}{3}$.

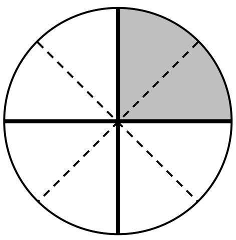
הרחבה וצמצום שברים

הרחבה/צמצום של שבר מתבצעת כאשר כופלים/מחלקים את המונה והמכנה באותו מספר. כאשר מרחיבים/מצמצמים שבר, ערכו לא משתנה:

$$\frac{2}{6}=\frac{2:2}{6:2}=\frac{1}{3}$$



$$\frac{1}{4}=\frac{1\cdot 2}{4\cdot 2}=\frac{2}{8}$$



המרת שבר מדומה למספר מעורב, ולהפך

על מנת להפוך שבר מדומה למספר מעורב, נבדוק כמה פעמים המכנה נכנס במונה (המספר השלם), והשארית תישאר במונה:

$$\frac{20}{3}=6\frac{2}{3}$$

על מנת להפוך מספר מעורב לשבר מדומה, נכפול את המספר השלם במכנה, נוסיף למונה, ונקבל את המונה החדש של השבר המדומה (המכנה נשאר זהה):

$$5\frac{2}{3}=\frac{5\cdot 3+2}{3}=\frac{17}{3}$$

תרגול - מבוא לשברים

1. $\frac{2}{5}=\frac{?}{20}$

(1) 10 (2) 8 (3) 6 (4) 4

---

2. $\frac{72}{360}=?$

(1) $\frac{1}{5}$ (2) $\frac{1}{6}$ (3) $\frac{1}{3}$ (4) $\frac{1}{4}$

---

3. $\frac{8}{20}=\frac{?}{15}$

(1) 5 (2) 6 (3) 3 (4) 4

---

4. $\frac{23}{4}=?$

(1) $4\frac{1}{4}$ (2) $5\frac{1}{4}$ (3) $5\frac{3}{4}$ (4) $4\frac{3}{4}$

---

5. $8\frac{1}{3}=?$

(1) $\frac{25}{3}$ (2) $\frac{26}{3}$ (3) $\frac{27}{3}$ (4) $\frac{28}{3}$

תשובות

שאלה	1	2	3	4	5
תשובה	2	1	2	3	1

1. תשובה (2) נכונה

המכנה הורחב פי 4 ולכן עלינו להרחיב גם את המונה פי 4.

$$\frac{2}{5}=\frac{8}{20}$$

---

2. תשובה (1) נכונה

$$\frac{72}{360}=\frac{36}{180}=\frac{18}{90}=\frac{9}{45}=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$$

דרך נוספת לחישוב:

$$\frac{72}{360}=\frac{2\cdot 36}{360}=\frac{2\cdot 1}{10}=\frac{1}{5}$$

---

3. תשובה (2) נכונה

השבר $\frac{8}{20}$ לא מצומצם, נצמצם אותו (מונה ומכנה) ב-4.

$$\frac{8}{20}=\frac{?}{15}\quad\Rightarrow\quad\frac{2}{5}=\frac{?}{15}$$

המכנה הורחב פי 3 ולכן עלינו להרחיב גם את המונה פי 3.

$$\frac{2}{5}=\frac{6}{15}$$

---

4. תשובה (3) נכונה

$$\frac{23}{4}=\frac{20+3}{4}=5\frac{3}{4}$$

---

5. תשובה (1) נכונה

$$8\frac{1}{3}=\frac{8\cdot 3+1}{3}=\frac{25}{3}$$

כפל וחילוק שברים

כדי לכפול בין שברים, עלינו לכפול מונה במונה ומכנה במכנה. אם ניתן, רצוי לצמצם את השברים לפני פעולת הכפל:

$$\frac{3}{8}\cdot\frac{4}{10}=\frac{3\cdot 4}{8\cdot 10}=\frac{3\cdot 1}{2\cdot 10}=\frac{3}{20}$$

כאשר כופלים שבר במספר שלם או במספר מעורב יש להפוך אותו תחילה לשבר מדומה:

$$\frac{2}{5}\cdot 3=\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{1}=\frac{6}{5}$$

על מנת לחלק שברים עלינו לבצע "כפל בהופכי":

שימו לב שהופכים את השבר השני - זה שאחרי פעולת החילוק.
שיטה לזכור: קוראים לזה "כפל בהופכי" ולא "הופכי בכפל".

$$\frac{4}{7}:\frac{2}{3}=\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{2}=\frac{4\cdot 3}{7\cdot 2}=\frac{12}{14}=\frac{6}{7}$$

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}}=\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{4}=\frac{2\cdot 5}{3\cdot 4}=\frac{10}{12}=\frac{5}{6}$$

כאשר המונה והמכנה מורכבים משברים ניתן להשתמש בשיטת הקשתות (הקשת החיצונית במונה והפנימית במכנה):

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}}=\frac{2\cdot 5}{3\cdot 4}=\frac{10}{12}=\frac{5}{6}$$

תרגול - כפל וחילוק שברים

.1 $\frac{5}{10} \cdot \frac{2}{6} = ?$

(1) $\frac{1}{5}$ (2) $\frac{1}{6}$ (3) $\frac{1}{3}$ (4) $\frac{1}{4}$

.2 $\frac{21}{20} \cdot 5\frac{5}{7} = ?$

(1) 7 (2) 6 (3) 5 (4) 4

.3 $\frac{5}{12} \div \frac{1}{2} = ?$

(1) $\frac{5}{6}$ (2) $\frac{5}{24}$ (3) $\frac{2}{5}$ (4) $\frac{7}{13}$

.4 $\dfrac{\frac{5}{3}}{\frac{4}{3}} = ?$

(1) $1\frac{1}{4}$ (2) $2\frac{1}{4}$ (3) $1\frac{3}{4}$ (4) $2\frac{3}{4}$

.5 $6 \div 5\frac{1}{4} = ?$

(1) $1\frac{1}{7}$ (2) $1\frac{1}{2}$ (3) $1\frac{3}{7}$ (4) $1\frac{3}{4}$

תשובות

שאלה	1	2	3	4	5
תשובה	2	2	1	1	1

.1 תשובה (2) נכונה

$$\frac{5}{10}\cdot\frac{2}{6}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1\cdot 1}{2\cdot 3}=\frac{1}{6}$$

.2 תשובה (2) נכונה

$$\frac{21}{20}\cdot 5\frac{5}{7}=\frac{21}{20}\cdot\frac{40}{7}=\frac{21}{1}\cdot\frac{2}{7}=\frac{3}{1}\cdot\frac{2}{1}=\frac{3\cdot 2}{1\cdot 1}=\frac{6}{1}=6$$

.3 תשובה (1) נכונה

$$\frac{5}{12}\div\frac{1}{2}=\frac{5}{12}\cdot\frac{2}{1}=\frac{5\cdot 2}{12\cdot 1}=\frac{5\cdot 1}{6\cdot 1}=\frac{5}{6}$$

.4 תשובה (1) נכונה

$$\frac{\frac{5}{3}}{\frac{4}{3}}=\frac{5\cdot 3}{3\cdot 4}=\frac{5\cdot 1}{1\cdot 4}=\frac{5}{4}=1\frac{1}{4}$$

.5 תשובה (1) נכונה

$$6\div 5\frac{1}{4}=\frac{6}{1}\div\frac{21}{4}=\frac{6}{1}\cdot\frac{4}{21}=\frac{6\cdot 4}{1\cdot 21}=\frac{2\cdot 4}{1\cdot 7}=\frac{8}{7}=1\frac{1}{7}$$

חיבור וחיסור שברים

על מנת לחבר/לחסר שברים, תחילה עלינו למצוא להם מכנה משותף (מספר ששני המכנים של השברים יכולים "להגיע" אליו). לאחר מכן עלינו להרחיב את השברים עד שיגיעו למכנה זה, ולבסוף לחבר או לחסר את המונים שלהם:

מכנים זהים: $\frac{5}{7}-\frac{2}{7}=\frac{3}{7}$

צריך להרחיב רק מכנה אחד: $\frac{1}{5}+\frac{3}{10}=\frac{2}{10}+\frac{3}{10}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$

צריך להרחיב שני מכנים: $\frac{3}{4}-\frac{1}{6}=\frac{9}{12}-\frac{2}{12}=\frac{7}{12}$

דוגמה:

A, B, C ו- D הם מספרים שלמים.

$$\frac{D}{A}\cdot\frac{B}{D}+\frac{C}{A}=?$$

(1) $\frac{B+C}{A}$ (2) $\frac{B+C}{2A}$ (3) $\frac{D+C}{A}$ (4) $\frac{D+C}{2A}$

פתרון -

נפתור על פי חוקי כפל וחיבור שברים:

$$\frac{D}{A}\cdot\frac{B}{D}+\frac{C}{A}=\frac{1\cdot B}{A\cdot 1}+\frac{C}{A}=\frac{B}{A}+\frac{C}{A}=\frac{B+C}{A}$$

תרגול - חיבור וחיסור שברים

.1 $\frac{2}{7}+\frac{3}{7}=?$

(1) $\frac{5}{14}$ (2) $\frac{6}{7}$ (3) $\frac{5}{7}$ (4) $\frac{1}{14}$

.2 $\frac{1}{2}-\frac{3}{10}=?$

(1) $\frac{1}{5}$ (2) $\frac{1}{6}$ (3) $\frac{1}{3}$ (4) $\frac{1}{4}$

.3 $\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=?$

(1) $\frac{1}{10}$ (2) $\frac{2}{9}$ (3) $\frac{9}{20}$ (4) $\frac{6}{13}$

.4 $3\frac{3}{4}-2\frac{1}{3}=?$

(1) $1\frac{5}{12}$ (2) $1\frac{1}{2}$ (3) $1\frac{3}{12}$ (4) $1\frac{3}{4}$

.5 $\frac{3}{5}-\frac{1}{10}+\frac{1}{2}=?$

(1) 1 (2) $\frac{9}{10}$ (3) $1\frac{1}{10}$ (4) $\frac{4}{5}$

תשובות

שאלה	1	2	3	4	5
תשובה	3	1	3	1	1

1. תשובה (3) נכונה

$$\frac{2}{7}+\frac{3}{7}=\frac{2+3}{7}=\frac{5}{7}$$

---

2. תשובה (1) נכונה

$$\frac{1}{2}-\frac{3}{10}=\frac{5}{10}-\frac{3}{10}=\frac{5-3}{10}=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$$

---

3. תשובה (3) נכונה

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{5}{20}+\frac{4}{20}=\frac{5+4}{20}=\frac{9}{20}$$

---

4. תשובה (1) נכונה

$$3\frac{3}{4}-2\frac{1}{3}=(3-2)+\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{3}\right)=1+\frac{9}{12}-\frac{4}{12}=1+\frac{9-4}{12}=1+\frac{5}{12}=1\frac{5}{12}$$

---

5. תשובה (1) נכונה

$$\frac{3}{5}-\frac{1}{10}+\frac{1}{2}=\frac{6}{10}-\frac{1}{10}+\frac{5}{10}=\frac{6-1+5}{10}=\frac{10}{10}=1$$

שברים עשרוניים

מבוא

מלבד ההצגה הסטנדרטית של שברים באמצעות מונה ומכנה, ניתן להציג שברים גם באמצעות נקודה עשרונית. שברים המוצגים באופן זה נקראים שברים עשרוניים.

אופן ההצגה:

הספרה הראשונה מימין לנקודה העשרונית מתארת **עשיריות** (מכנה 10).

הספרה השנייה מימין לנקודה העשרונית מתארת **מאיות** (מכנה 100).

הספרה השלישית מימין לנקודה העשרונית מתארת **אלפיות** (מכנה 1000). וכך הלאה.

דוגמאות:

$$0.1=\frac{1}{10}$$

$$0.03=\frac{3}{100}$$

$$0.007=\frac{7}{1000}$$

ובאופן סכמתי:

שברים				שלמים		
אלפיות	מאיות	עשיריות	.	אחדות	עשרות	מאות

המרת שבר עשרוני לשבר פשוט

כפי שכבר למדנו, שבר פשוט מורכב ממונה ומכנה. בכדי להמיר שבר עשרוני לשבר פשוט עלינו להבין מהו המונה ומהו המכנה בשבר העשרוני.

המונה – המונה בשבר העשרוני הוא פשוט המספר שמופיע מימין לנקודה העשרונית.

המכנה – המכנה בשבר העשרוני תלוי במספר הספרות מימין לנקודה העשרונית ⟸ ספרה אחת – מכנה 10 (אפס אחד), שתי ספרות – מכנה 100 (שני אפסים) וכך הלאה.

שימו ♥

מספר האפסים במכנה לעולם יהיה זהה למספר הספרות מימין לנקודה העשרונית.

דוגמאות:

1. 0.37 ⟸ המספר שמופיע מימין לנקודה העשרונית הוא 37, ולכן הוא המונה של השבר.
מימין לנקודה העשרונית יש 2 ספרות (37), ולכן המכנה יהיה 100 (2 אפסים).

ולכן ⟸ $0.37=\frac{37}{100}$

2. 0.101 ⟸ המספר שמופיע מימין לנקודה העשרונית הוא 101, ולכן הוא המונה של השבר.
מימין לנקודה העשרונית יש 3 ספרות (101), ולכן המכנה יהיה 1000 (3 אפסים).

ולכן ⟸ $0.101=\frac{101}{1000}$

המרת שבר פשוט לשבר עשרוני

במידה ומכנה השבר הפשוט הוא חזקה של 10 (10, 100, 1,000 וכו') ההמרה קלה יחסית:

מ**המכנה** אנו למדים כמה ספרות מימין לנקודה יהיו בשבר העשרוני:
מכנה 10 ספרה **אחת** מימין לנקודה;
מכנה 100 **שתי** ספרות מימין לנקודה;
מכנה 1,000 **שלוש** ספרות מימין לנקודה, וכך הלאה.

מ**המונה** אנו לומדים על המספר שיופיע בשבר העשרוני: עלינו לשבץ את המספר שמופיע במונה כך שיסתיים בספרה הימנית ביותר בשבר העשרוני ובמידת הצורך להוסיף אפסים משמאל למספר.

דוגמאות:

1. $\frac{57}{100}$ $\Leftarrow$ המכנה הוא 100 (2 אפסים) ולכן בשבר העשרוני יהיו שתי ספרות לאחר הנקודה. כעת נמקם את המונה (57) כך שיסתיים שתי ספרות מימין לנקודה, ונוסיף 0 משמאל $\Leftarrow 0.57$

2. $\frac{8}{1000}$ $\Leftarrow$ המכנה הוא 1,000 (3 אפסים) ולכן בשבר העשרוני יהיו 3 ספרות לאחר הנקודה. כעת נמקם את המונה (8) כך שיסתיים 3 ספרות מימין לנקודה, ונוסיף אפסים $\Leftarrow 0.008$

במידה שהמכנה **אינו עשרוני** (חזקה של 10) עלינו להרחיב או לצמצם את השבר ולהציגו ככזה.

דוגמאות:

3. $\frac{7}{50}$ $\Leftarrow$ המכנה אינו עשרוני ולכן נרחיב את השבר פי 2 ונציגו כעשרוני $\Leftarrow 0.14 = \frac{14}{100} = \frac{7}{50}$

4. $\frac{3}{30}$ $\Leftarrow$ המכנה אינו עשרוני ולכן נצמצם את השבר ב- 3 ונציגו כעשרוני $\Leftarrow 0.1 = \frac{1}{10} = \frac{3}{30}$

הרחבה וצמצום של שברים עשרוניים

הרחבה – הוספת אפסים מימין לספרה האחרונה לאחר הנקודה העשרונית.

לדוגמה:

1. $0.1 \Leftarrow 0.10$

בכדי להוכיח ש $0.1 = 0.10$ נמיר את השברים לשברים פשוטים:

$$0.1=\frac{1}{10}$$

$$0.10=\frac{10}{100}=\frac{1}{10}$$

כעת ניתן לראות בברור כי 0.10 הוא הרחבה של השבר 0.1 פי 10.

צמצום – מחיקת אפסים מימין לספרה האחרונה לאחר הנקודה העשרונית.

לדוגמה:

2. $0.250 \Leftarrow 0.25$

שוב בכדי להוכיח ש $0.250 = 0.25$ נמיר את השברים לשברים פשוטים:

$$0.250=\frac{250}{1000}=\frac{25}{100}$$

$$0.25=\frac{25}{100}$$

כעת ניתן לראות בברור כי 0.25 הוא צמצום של השבר 0.250 פי 10.

שימו ❤

הוספה / הסרה של אפסים מימין לספרה הימנית ביותר לאחר הנקודה אינה משנה את ערך השבר

חיבור וחיסור שברים עשרוניים

חיבור וחיסור שברים עשרוניים מתבצע בדיוק כמו חיבור וחיסור מאונך של מספרים שלמים. כמו בחיבור וחיסור מאונך עלינו להקפיד על התאמה מלאה בין סוגי הספרות, אחדות מעל אחדות, עשיריות מעל עשיריות וכו׳.

שימו ❤
תמיד נמקם נקודה עשרונית מעל נקודה עשרונית

דוגמאות:

1. $0.28 + 1.95 = ?$

נציג את התרגיל באופן מאונך ונקפיד להציב נקודה עשרונית מעל נקודה עשרונית:

שלב א׳ – נחבר את המאיות ($8 + 5 = 13$) נכתוב את ה-3 מתחת למאיות ואת ה-1 מעל העשיריות:

$$\begin{array}{r} \scriptstyle 1 \\ 0.28 \\ +\ \underline{1.95} \\ 3 \end{array}$$

שלב ב׳ – נחבר את העשיריות כולל ה-1 שהעברנו ($2 + 9 + 1 = 12$), נכתוב את ה-2 מתחת לעשיריות ואת ה-1 מעל האחדות:

$$\begin{array}{r} \scriptstyle 1\ \ 1 \\ 0.28 \\ +\ \underline{1.95} \\ .23 \end{array}$$

שלב ג׳ – נחבר את האחדות כולל ה-1 שהעברנו ($0 + 1 + 1 = 2$), נכתוב את ה-2 מתחת לאחדות וסיימנו:

$$\begin{array}{r} \scriptstyle 1\ \ 1 \\ 0.28 \\ +\ \underline{1.95} \\ 2.23 \end{array}$$

2. $3.17 - 1.8 = ?$

נציג את התרגיל באופן מאונך ונקפיד להציב נקודה עשרונית מעל נקודה עשרונית:

שלב א׳ – נחסר את המאיות ($7 - 0 = 7$) ונכתוב את התוצאה מתחת למאיות

$$\begin{array}{r} 3.17 \\ -\ \underline{1.8} \\ 7 \end{array}$$

שלב ב׳ – נחסר את העשיריות, מכיוון שלא ניתן לחסר 8 מ-1 נלווה 10 מהאחדות ונחסר ($11 - 8 = 3$). כעת, נכתוב את התוצאה מתחת לעשיריות.

$$\begin{array}{r} \scriptstyle 2\ 10 \\ \cancel{3}.17 \\ -\ \underline{1.85} \\ 1.37 \end{array}$$

שלב ג׳ – נחסר את האחדות ($2 - 1 = 1$), נכתוב את ה-1 מתחת לאחדות וסיימנו:

כפל שברים עשרוניים

שלבי עבודה:

1. כופלים את האברים תוך התעלמות מהנקודה העשרונית (כפל ארוך סטנדרטי).

2. ממקמים את הנקודה העשרונית בתוצאה בהתאם **לסך הספרות לאחר הנקודה בשני האברים**.

דוגמאות:

1. $0.1 \cdot 0.4 = ?$

שלב א' - נציג את התרגיל באופן מאונך תוך התעלמות מהנקודות העשרוניות ונפתור (עד שלב מיקום הנקודה העשרונית):

$$\begin{array}{r} \times\ 01 \\ \underline{04} \\ 04 \\ +\ \underline{00\ } \\ 004 \end{array}$$

שלב ב' – נמקם את הנקודה העשרונית:

באיבר הראשון (0.1) קיימת ספרה אחת לאחר הנקודה העשרונית.

באיבר השני (0.4) קיימת ספרה אחת לאחר הנקודה העשרונית.

לכן, נסמן את הנקודה כך שמימין לה יהיו **שתי** ספרות (סך הספרות בשני האברים)$\Longleftarrow$ 0.04

2. $0.25 \cdot 0.5 = ?$

שלב א' - נציג את התרגיל באופן מאונך תוך התעלמות מהנקודות העשרוניות ונפתור (עד שלב מיקום הנקודה העשרונית):

$$\begin{array}{r} {}^{1\ 2} \\ \times\ 025 \\ \underline{05} \\ 125 \\ +\ \underline{000\ } \\ 0125 \end{array}$$

שלב ב' – נמקם את הנקודה העשרונית:

באיבר הראשון (0.25) קיימות שתי ספרות לאחר הנקודה העשרונית.

באיבר השני (0.5) קיימת ספרה אחת לאחר הנקודה העשרונית.

לכן, נסמן את הנקודה כך שמימין לה יהיו בדיוק **שלוש** ספרות $\Longleftarrow$ 0.125

כפל וחילוק ב-10

כפל – כאשר כופלים מספר ב-10 הנקודה העשרונית זזה מקום אחד **ימינה** (התוצאה גדלה).

לדוגמה:

$7.35 \cdot 10 \Rightarrow 73.5$

$0.205 \cdot 10 \Rightarrow 2.05$

חילוק – כאשר מחלקים מספר ב-10 הנקודה העשרונית זזה מקום אחד **שמאלה** (התוצאה קטנה).

לדוגמה:

$85.2 : 10 \Rightarrow 8.52$

$1.25 : 10 \Rightarrow 0.125$

חלוקה בשבר עשרוני

בכדי לחלק מספר בשבר עשרוני נרחיב את השבר כך שנקבל מספר שלם במכנה. ההרחבה הסטנדרטית היא פי 10 אולם, יש מקרים שניתן לזהות הרחבה פשוטה וקצרה יותר.

דוגמאות:

1. $\frac{2.8}{0.4}=?$ ⟸ המכנה עשרוני ולכן נרחיב את השבר פי 10 ⟸ $\frac{2.8}{0.4}=\frac{28}{4}=7$

2. $\frac{7}{0.5}=?$ ⟸ אופציה א' - המכנה עשרוני ולכן נרחיב את השבר פי 10 ⟸ $\frac{7}{0.5}=\frac{70}{5}=14$

אופציה ב' – נזהה שקל יותר להגיע למכנה שלם אם נרחיב את השבר פי 2 ⟸ $\frac{7}{0.5}=\frac{14}{1}=14$

תרגול - שברים עשרוניים

.1 $0.55 = ?$

(1) $\frac{1}{11}$ (2) $\frac{11}{20}$ (3) $\frac{1}{55}$ (4) $\frac{1}{5}$

.2 $\frac{22}{25} = ?$

(1) 0.25 (2) 0.22 (3) 0.88 (4) 0.47

.3 $10.4 - 5.25 = ?$

(1) 5.15 (2) 5.25 (3) 5.35 (4) 5.05

.4 $\frac{14}{0.7} = ?$

(1) 2 (2) 20 (3) 5 (4) 4

.5 $(0.7)^2 = ?$

(1) 4.9 (2) 0.49 (3) 0.049 (4) 49

תשובות

שאלה	1	2	3	4	5
תשובה	2	3	1	2	2

.1 תשובה (2) נכונה

בשבר 0.55 יש 2 ספרות מימין לנקודה העשרונית, ולכן המכנה של השבר הפשוט יהיה 100.

$$0.55 = \frac{55}{100} = \frac{11}{20}$$

.2 תשובה (3) נכונה

נרחיב את השבר פי 4 כדי להגיע למכנה שהוא חזקה של 10, ונמקם את הספרות בהתאם למספר האפסים במכנה.

$$\frac{22}{25} = \frac{88}{100} = 0.88$$

.3 תשובה (1) נכונה

$$\begin{array}{r} - \ 10.4\overset{10}{0} \\ \underline{5.25} \\ 5.15 \end{array}$$

.4 תשובה (2) נכונה

נרחיב את השבר פי 10 כדי להגיע למספרים שלמים, ונחלק כרגיל.

$$\frac{14}{0.7} = \frac{140}{7} = 20$$

.5 תשובה (2) נכונה

בכפל של שברים עשרוניים, נכפול את הספרות ללא הנקודה העשרונית ונמקם את הנקודה בהתאם לסך הספרות מימין לנקודה בשני האיברים, במקרה זה התוצאה צריכה להסתיים שתי ספרות לאחר הנקודה העשרונית.

$$(0.7)^2 \ \Rightarrow \ 7^2 = 49 \ \Rightarrow \ 0.49$$

דרך חישוב נוספת:

$$(0.7)^2 = \left(\frac{7}{10}\right)^2 = \frac{7^2}{10^2} = \frac{49}{100} = 0.49$$

תרגול מסכם יסודות

.1 $\frac{7}{8} = \frac{42}{?}$

(1) 63 (2) 56 (3) 48 (4) 64

.2 $\frac{5}{10} = \frac{?}{22}$

(1) 11 (2) 12 (3) 13 (4) 10

.3 $\frac{32}{48} = ?$

(1) $\frac{4}{5}$ (2) $\frac{5}{6}$ (3) $\frac{2}{3}$ (4) $\frac{3}{4}$

.4 $\frac{44}{10} = ?$

(1) $4\frac{1}{4}$ (2) $4\frac{2}{5}$ (3) $4\frac{3}{5}$ (4) $4\frac{3}{4}$

.5 $6\frac{1}{8} = ?$

(1) $\frac{51}{8}$ (2) $\frac{49}{8}$ (3) $\frac{33}{8}$ (4) $\frac{41}{8}$

.6 $\frac{4}{14} \cdot \frac{7}{12} = ?$

(1) $\frac{1}{5}$ (2) $\frac{1}{6}$ (3) $\frac{1}{3}$ (4) $\frac{1}{4}$

---

7. $3\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{21}=?$

(1) $\frac{4}{5}$ (2) $\frac{5}{6}$ (3) $\frac{2}{3}$ (4) $\frac{3}{4}$

---

8. $\frac{4}{21}\div\frac{8}{3}=?$

(1) $\frac{1}{14}$ (2) $\frac{1}{21}$ (3) $\frac{1}{7}$ (4) $\frac{1}{42}$

---

9. $\frac{\frac{3}{7}}{\frac{6}{5}}=?$

(1) $\frac{5}{42}$ (2) $\frac{7}{15}$ (3) $\frac{18}{35}$ (4) $\frac{5}{14}$

---

10. $\frac{5}{\frac{1}{10}}=?$

(1) 100 (2) 25 (3) 50 (4) 10

---

11. $\frac{1}{3}+\frac{4}{9}=?$

(1) $\frac{7}{9}$ (2) $\frac{4}{27}$ (3) $\frac{2}{3}$ (4) $\frac{17}{18}$

---

12. $\frac{3}{8}-\frac{1}{4}=?$

(1) $\frac{1}{16}$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) $\frac{1}{8}$ (4) $\frac{1}{4}$

---

13. $\frac{7}{16}+\frac{5}{12}=?$

(1) $\frac{29}{32}$ (2) $\frac{6}{7}$ (3) $\frac{3}{7}$ (4) $\frac{41}{48}$

.14 $2\frac{1}{3}-\frac{6}{7}=?$

(1) $1\frac{10}{21}$ (2) $1\frac{1}{2}$ (3) $1\frac{7}{12}$ (4) $1\frac{11}{21}$

.15 $\frac{4}{15}+\frac{7}{12}-\frac{3}{5}=?$

(1) $\frac{1}{5}$ (2) $\frac{1}{6}$ (3) $\frac{1}{3}$ (4) $\frac{1}{4}$

.16 $0.750=?$

(1) $\frac{2}{15}$ (2) $\frac{1}{75}$ (3) $\frac{1}{750}$ (4) $\frac{3}{4}$

.17 $\frac{9}{150}=?$

(1) 0.06 (2) 0.09 (3) 0.03 (4) 0.15

.18 $20.15-9.95=?$

(1) 10.1 (2) 10.2 (3) 11.1 (4) 11.2

.19 $\frac{8}{1.6}=?$

(1) 6 (2) 5 (3) 3 (4) 4

.20 $0.2\cdot 0.8=?$

(1) 0.16 (2) 1.6 (3) 0.016 (4) 1.06

תשובות

שאלה	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
תשובה	3	1	3	2	2	2	2	1	4	3

שאלה	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
תשובה	1	3	4	1	4	4	1	2	2	1

1. תשובה (3) נכונה

המונה הורחב פי 6 ולכן עלינו להרחיב גם את המכנה פי 6.

$$\frac{7}{8}=\frac{42}{48}$$

---

2. תשובה (1) נכונה

$$\frac{5}{10}=\frac{?}{22} \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{2}=\frac{?}{22} \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{2}=\frac{11}{22}$$

---

3. תשובה (3) נכונה

$$\frac{32}{48}=\frac{16}{24}=\frac{8}{12}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

---

4. תשובה (2) נכונה

$$\frac{44}{10}=\frac{40+4}{10}=4\frac{4}{10}=4\frac{2}{5}$$

---

5. תשובה (2) נכונה

$$6\frac{1}{8}=\frac{6\cdot 8+1}{8}=\frac{49}{8}$$

---

6. תשובה (2) נכונה

$$\frac{4}{14}\cdot\frac{7}{12}=\frac{1}{14}\cdot\frac{7}{3}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1\cdot 1}{2\cdot 3}=\frac{1}{6}$$

---

7. תשובה (2) נכונה

$$3\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{21}=\frac{7}{2}\cdot\frac{5}{21}=\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{3}=\frac{1\cdot5}{2\cdot3}=\frac{5}{6}$$

---

8. תשובה (1) נכונה

$$\frac{4}{21}\div\frac{8}{3}=\frac{4}{21}\cdot\frac{3}{8}=\frac{4\cdot3}{21\cdot8}=\frac{4\cdot1}{7\cdot8}=\frac{1\cdot1}{7\cdot2}=\frac{1}{14}$$

---

9. תשובה (4) נכונה

$$\frac{\frac{3}{7}}{\frac{6}{5}}=\frac{3\cdot5}{7\cdot6}=\frac{1\cdot5}{7\cdot2}=\frac{5}{14}$$

---

10. תשובה (3) נכונה

$$\frac{5}{\frac{1}{10}}=\frac{\frac{5}{1}}{\frac{1}{10}}=\frac{5\cdot10}{1\cdot1}=5\cdot10=50$$

---

11. תשובה (1) נכונה

$$\frac{1}{3}+\frac{4}{9}=\frac{3}{9}+\frac{4}{9}=\frac{3+4}{9}=\frac{7}{9}$$

---

12. תשובה (3) נכונה

$$\frac{3}{8}-\frac{1}{4}=\frac{3}{8}-\frac{2}{8}=\frac{3-2}{8}=\frac{1}{8}$$

---

13. תשובה (4) נכונה

$$\frac{7}{16}+\frac{5}{12}=\frac{21}{48}+\frac{20}{48}=\frac{21+20}{48}=\frac{41}{48}$$

---

14. תשובה (1) נכונה

$$2\frac{1}{3}-\frac{6}{7}=\frac{7}{3}-\frac{6}{7}=\frac{49}{21}-\frac{18}{21}=\frac{49-18}{21}=\frac{31}{21}=1\frac{10}{21}$$

.15 תשובה (4) נכונה

$$\frac{4}{15}+\frac{7}{12}-\frac{3}{5}=\frac{16}{60}+\frac{35}{60}-\frac{36}{60}=\frac{16+35-36}{60}=\frac{15}{60}=\frac{1}{4}$$

.16 תשובה (4) נכונה

בשבר "0.750" יש 3 ספרות מימין לנקודה העשרונית, ולכן המכנה של השבר הפשוט יהיה 1000.

$$0.750=\frac{750}{1000}=\frac{3}{4}$$

.17 תשובה (1) נכונה

נצמצם את השבר פי 3 ואז נרחיב אותו פי 2 כדי להגיע למכנה שהוא חזקה של 10, ונמקם את הספרות בהתאם למספר האפסים במכנה.

$$\frac{9}{150}=\frac{3}{50}=\frac{6}{100}=0.06$$

.18 תשובה (2) נכונה

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\,9} \\ -\ 20.15 \\ \underline{\ \ 9.95} \\ 10.20 \end{array}$$

.19 תשובה (2) נכונה

נרחיב את השבר פי 10 כדי להגיע למספרים שלמים, נצמצם ונחלק כרגיל.

$$\frac{8}{1.6}=\frac{80}{16}=\frac{10}{2}=5$$

.20 תשובה (1) נכונה

בכפל של שברים עשרוניים, נכפול את הספרות ללא הנקודה העשרונית ונמקם את הנקודה בהתאם לסך הספרות מימין לנקודה בשני האיברים, במקרה זה התוצאה צריכה להסתיים שתי ספרות לאחר הנקודה העשרונית.

$$0.2\cdot 0.8\ \Rightarrow 2\cdot 8=16\ \Rightarrow 0.16$$

דרך חישוב נוספת:

$$0.2\cdot 0.8\ =\frac{2}{10}\cdot\frac{8}{10}=\frac{16}{100}=0.16$$

שברים

הבנת מונה ומכנה

חלק מהשאלות בבחינה מתבססות על שינויים במונים ומכנים של השבר ועל ההבנה מה קורה לשבר כתוצאה משינויים אלה.

דוגמה:

נתון: $0 < x < 1 < y$

איזה מהביטויים הבאים הוא **הגדול** ביותר?

(1) $\frac{y-x}{y+x}$ (2) $\frac{y+x}{x+y}$ (3) $\frac{x}{y-x}$ (4) $\frac{y}{y-x}$

פתרון -

לביטויים בתשובה (1) ובתשובה (2) יש מכנה זהה, אך המונה של הביטוי בתשובה (2) גדול יותר ולכן השבר גדול יותר.
לביטויים בתשובה (3) ובתשובה (4) יש מכנה זהה, אך המונה של הביטוי בתשובה (4) גדול יותר ולכן השבר גדול יותר.
נשווה כעת בין תשובה (2) לתשובה (4):
בביטוי בתשובה (2) המונה שווה למכנה ולכן הביטוי שווה ל-1, ובתשובה (4) המונה גדול מהמכנה ולכן הביטוי גדול מ-1, וזו התשובה הנכונה.

השוואת שברים

שאלות השוואת שברים הן שאלות פשוטות יחסית, וישנן מספר טכניקות לפתרון מהיר של שאלות אלו.

הערכת סדר גודל

ניתן למצוא שבר מוכר שהשבר המבוקש קרוב אליו בערכו.

דוגמה:

קצת יותר מ- $\frac{1}{2}$ קצת פחות מ- $\frac{1}{2}$

$$\frac{9}{17} \quad > \quad \frac{5}{11}$$

השוואת מונים / מכנים

כאשר המכנים זהים, השבר בעל המונה **הגדול** הוא השבר הגדול יותר.

דוגמה:

$$\frac{4}{9} > \frac{3}{9}$$

כאשר המונים זהים, השבר בעל המכנה **הקטן** הוא השבר הגדול יותר.

דוגמה:

$$\frac{7}{12} < \frac{7}{11}$$

דוגמה:

$$\frac{15}{34} < \frac{5}{11} \qquad \rightarrow \qquad \frac{15}{33}$$

הרחבנו את השבר על מנת להשוות מונים. השבר בעל המכנה הקטן יותר הוא השבר הגדול יותר.

כפל באלכסון

כאשר לשברים אין מונים או מכנים שווים, ניתן להשוות ביניהם על ידי כפל באלכסון בין המונים למכנים. השבר בעל המכפלה הגדולה יותר הוא השבר הגדול יותר. (ניתן להשתמש בשיטה זו גם כאשר המונים/המכנים זהים)

דוגמה:

$$\begin{array}{ccc} 104 & < & 105 \\ & & \\ \frac{8}{21} & & \frac{5}{13} \end{array}$$

שימו לב! את המכפלה אנו רושמים מעל המונה, ולא מתחת למכנה, אחרת נקבל תוצאה הפוכה בדיוק!

המרה לשבר עשרוני

ניתן להמיר את השבר המופיע בתשובות לשבר עשרוני, ועל ידי כך לחסוך זמן וחישובים (בהסברים של בעיות אחוזים קיימת טבלת המרה בין שברים פשוטים לשברים עשרוניים נפוצים שמומלץ ללמוד בעל-פה).

דוגמה:

$$0.375 \qquad \leftarrow \qquad \frac{3}{8} < \frac{2}{5} \qquad \rightarrow \qquad 0.4$$

השלמה ל-1

השבר הגדול ביותר יהיה השבר שחסר לו הכי מעט להגיע ל-1, זאת אומרת, השבר שההשלמה שלו ל-1 היא הקטנה ביותר.

דוגמה:

השלמה ל-1   השלמה ל-1

$$\frac{1}{13} \qquad \leftarrow \qquad \frac{12}{13} < \frac{16}{17} \qquad \rightarrow \qquad \frac{1}{17}$$

העלאה בריבוע

ניתן להשוות בין שברים על ידי העלה בריבוע. השבר שיהיה גדול יותר אחרי ההעלאה בריבוע היה גדול יותר גם קודם לכן.

דוגמה:

נעלה בריבוע   נעלה בריבוע

$$\frac{9}{10} \leftarrow \frac{3}{\sqrt{10}} > \frac{2}{\sqrt{5}} \rightarrow \frac{4}{5}$$

שימו לב! כאשר מעלים בריבוע את השברים ערכם משתנה, אך השבר שהיה גדול יותר נשאר גדול יותר גם לאחר ההעלאה בריבוע.
מכיוון שערך השברים משתנה, אם החלטנו להעלות בריבוע עלינו להעלות בריבוע את כל השברים ולא רק את אלו עם השורש.

הצבת מספרים

כאשר בשברים מופיעים נעלמים, אפשר להציב במקומם מספרים על פי נתוני השאלה.

דוגמה:

נתון : $1 < y$, $0 < x < 1$

נציב : $y = 2$, $x = \frac{1}{2}$

$$\frac{2}{1.5} \leftarrow \frac{y}{y-x} > \frac{y-x}{x+y} \rightarrow \frac{1.5}{2.5}$$

הערה: בתרגיל זה ניתן היה לראות גם ללא הצבה, כי בשבר השמאלי המונה קטן מהמכנה ולכן הוא קטן מ-1, ובשבר הימני המונה גדול מהמכנה ולכן הוא גדול מ-1.

כפל באלכסון היא השיטה החשובה ביותר ועובדת תמיד!

תרגול שאלות מבחינות אמת

.1 $\dfrac{\frac{1}{3}+\frac{1}{7}}{\frac{35}{21}}=?$

(1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{2}{7}$ (3) $\frac{3}{5}$ (4) $\frac{4}{5}$

.2 $\dfrac{\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{a}}{\frac{b}{d}\cdot\frac{a}{b}}=?$ $a, b, c, d \neq 0$

(1) $\frac{cb}{ad}$ (2) $\frac{cd}{ab}$ (3) $\frac{c^2}{b^2}$ (4) $\frac{ab}{cd}$

.3 $\frac{1}{5}+\frac{1}{4}-\frac{1}{3}=?$

(1) $\frac{1}{6}$

(2) $\frac{2}{15}$

(3) $\frac{1}{30}$

(4) $\frac{7}{60}$

.4 איזה מן המספרים הבאים הוא הגדול ביותר?

(1) $\frac{5}{6}$ (2) $\frac{6}{7}$ (3) $\frac{7}{8}$ (4) $\frac{8}{9}$

פתרתי ____________ שאלות ב ____________ דקות, ____________ תשובות נכונות

5. נתון: $L = \frac{2}{5} - M$

עבור איזה ערך של M, מתוך הערכים הבאים, יהיה הערך של L **הקטן** ביותר?

(1) $\frac{3}{10}$ (2) $\frac{5}{15}$ (3) $\frac{8}{25}$ (4) $\frac{11}{30}$

---

6. ערכו של איזה מהביטויים הבאים **אינו** שווה ל-$\frac{2}{3}$?

(1) $-1 + \frac{5}{3}$

(2) $2 - \frac{4}{3}$

(3) $\frac{18}{27}$

(4) $\frac{4}{9}$

---

7. a ו-b הם מספרים חיוביים **שונים**. $\frac{a}{b}$ הוא מספר שלם.

איזה מהאי-שוויונים הבאים נכון בהכרח?

(1) $1 < a - b$

(2) $0 < a - b < 1$

(3) $1 < \frac{b}{a}$

(4) $0 < \frac{b}{a} < 1$

---

8. נתון: $1 < a$

$x \neq a$

בעבור איזה מהערכים הבאים של x יהיה ערך הביטוי $\frac{a+x}{a-x}$ **הקטן ביותר**?

(1) 1 (2) $\frac{1}{2}$ (3) $-\frac{1}{2}$ (4) -1

פתרתי ______________ שאלות ב ______________ דקות, ______________ תשובות נכונות

9. איזה מהמספרים הבאים הוא **הקטן** ביותר?

(1) $\frac{6}{5}$ (2) $\frac{7}{5}$ (3) $\frac{17}{13}$ (4) $\frac{17}{14}$

---

10. נתונים שלושת השברים הבאים: $\frac{3}{25}$, $\frac{4}{30}$, $\frac{5}{40}$

איזה מהאי-שוויונות הבאים נכון?

(1) $\frac{5}{40} < \frac{4}{30} < \frac{3}{25}$

(2) $\frac{3}{25} < \frac{4}{30} < \frac{5}{40}$

(3) $\frac{3}{25} < \frac{5}{40} < \frac{4}{30}$

(4) $\frac{5}{40} < \frac{3}{25} < \frac{4}{30}$

פתרתי ____________ שאלות ב ____________ דקות, ____________ תשובות נכונות

תשובות

שאלה	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
תשובה	2	2	4	4	4	4	4	4	1	3

פתרתי 10 שאלות - ______________ נכונות, ______________ אחוזי הצלחה

1. תשובה (2) נכונה. שאלה 3 מתוך 20 בפרק.

$$\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{7}}{\frac{35}{21}}=?$$

נחבר את השברים שבמונה באמצעות מכנה משותף 21 :

$$\frac{\frac{7}{21}+\frac{3}{21}}{\frac{35}{21}}=\frac{\frac{10}{21}}{\frac{35}{21}}$$

ניעזר בקשתות :

$$\frac{\frac{10}{21}}{\frac{35}{21}}=\frac{10\cdot 21}{35\cdot 21}=\frac{2}{7}$$

---

2. תשובה (2) נכונה. שאלה 5 מתוך 20 בפרק.

נפשט את הביטוי בשאלה כדי להגיע לתשובה המתאימה. נתחיל מלסדר את המונה והמכנה של הביטוי על ידי צמצום של איברים זהים.

$$\frac{\frac{\cancel{a}}{b}\cdot\frac{c}{\cancel{a}}}{\frac{\cancel{b}}{d}\cdot\frac{a}{\cancel{b}}}=\frac{\frac{c}{b}}{\frac{a}{d}}=\frac{cd}{ab}$$

---

3. תשובה (4) נכונה. שאלה 6 מתוך 20 בפרק.

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{4}-\frac{1}{3}$$

ניצור מכנה משותף 60 :

$$\frac{12}{60}+\frac{15}{60}-\frac{20}{60}=\frac{7}{60}$$

.4 תשובה (4) נכונה. שאלה 8 מתוך 20 בפרק.

כל השברים הנתונים קרובים ל-1 ולכן נבדוק את מרחקם מ-1. השבר בעל המרחק <u>הקטן</u> ביותר מהשלם הוא השבר <u>הגדול</u> ביותר (הכי קרוב לשלם).

תשובה (1): $\frac{5}{6}$ נמצא במרחק $\frac{1}{6}$ מ-1.

תשובה (2): $\frac{6}{7}$ נמצא במרחק $\frac{1}{7}$ מ-1.

תשובה (3): $\frac{7}{8}$ נמצא במרחק $\frac{1}{8}$ מ-1.

תשובה (4): $\frac{8}{9}$ נמצא במרחק $\frac{1}{9}$ מ-1.

$\frac{1}{9}$ הוא המרחק הקטן ביותר מ-1, ולכן $\frac{8}{9}$ הוא השבר הגדול ביותר.

.5 תשובה (4) נכונה. שאלה 9 מתוך 20 בפרק.

עלינו למצוא את הערך של M שעבורו L יהיה קטן ככל הניתן. נתבונן במשוואה הנתונה:

$$L = \frac{2}{5} - M$$

L שווה ל-$\frac{2}{5}$ פחות M. כדי ש-L יהיה כמה שיותר קטן, אנחנו צריכים להפחית מספר גבוה ככל הניתן, ועל כן אנו מחפשים את השבר הגדול ביותר בתשובות.

דרך א' – השוואה לשבר מוכר

נשווה בין התשובות באמצעות הערכת סדר גודל, במטרה למצוא את השבר הגדול ביותר. נשים לב כי כל השברים הנתונים הם באזור ה-$\frac{1}{3}$:

(1) $\frac{3}{10}$ $\Rightarrow$ $\frac{3}{9}$ זה $\frac{1}{3}$, ולכן $\frac{3}{10}$ קטן יותר מ-$\frac{1}{3}$.

(2) $\frac{5}{15}$ $\Rightarrow$ $\frac{5}{15}$ שווה בערכו ל-$\frac{1}{3}$.

(3) $\frac{8}{25}$ $\Rightarrow$ $\frac{8}{24}$ זה $\frac{1}{3}$, ולכן $\frac{8}{25}$ קטן יותר מ-$\frac{1}{3}$.

(4) $\frac{11}{30}$ $\Rightarrow$ $\frac{10}{30}$ זה $\frac{1}{3}$, ולכן $\frac{11}{30}$ **גדול יותר מ-$\frac{1}{3}$**.

מצאנו כי $\frac{11}{30}$ הוא השבר הגדול ביותר, ועל כן כאשר נציב אותו במשוואה הנתונה ערכו של L יהיה הקטן ביותר.

דרך ב' – מכנה משותף

עלינו למצוא את הערך של M שעבורו L יהיה קטן ככל הניתן. נתבונן במשוואה הנתונה:

$$L = \frac{2}{5} - M$$

L שווה ל- $\frac{2}{5}$ פחות M. כדי ש-L יהיה כמה שיותר קטן, אנחנו צריכים להפחית מספר גבוה ככל הניתן, ועל כן אנו מחפשים את השבר הגדול ביותר בתשובות. נחפש שברים שקל להשוות ביניהם:

ראשית, נשווה בין תשובות (1), (2) ו-(4) באמצעות מכנה משותף 30:

(1) $\frac{3}{10} = \frac{9}{30}$ (2) $\frac{5}{15} = \frac{10}{30}$ (4) $\frac{11}{30}$

ניתן לראות כי תשובה (4) היא הגדולה ביותר, ועל כן תשובות (1) ו-(2) נפסלות.

כעת נשווה בין תשובה (3) לתשובה (4). ניתן לעשות זאת באמצעות יצירת מכנה משותף.

מכנה משותף:

ניצור מכנה משותף 150. את השבר שבתשובה (4) נכפול פי 5 ואת השבר שבתשובה (3) נכפול פי 6:

(3) $\frac{8}{25} = \frac{48}{150}$ (4) $\frac{11}{30} = \frac{55}{150}$

כעת ניתן לראות שתשובה (4) היא הגדולה ביותר.

דרך ג' – חישוב מלא

נציב בכל פעם את ערכו של M המוצע בתשובות, ונבדוק באיזו תשובה מתקבל ערכו הקטן ביותר של L.

(1) $\frac{3}{10} \quad \Rightarrow \quad L = \frac{2}{5} - \frac{3}{10} = \frac{4}{10} - \frac{3}{10} = \mathbf{\frac{1}{10}}$

(2) $\frac{5}{15} \quad \Rightarrow \quad L = \frac{2}{5} - \frac{5}{15} = \frac{6}{15} - \frac{5}{15} = \mathbf{\frac{1}{15}}$

(3) $\frac{8}{25} \quad \Rightarrow \quad L = \frac{2}{5} - \frac{8}{25} = \frac{10}{25} - \frac{8}{25} = \mathbf{\frac{2}{25}}$

(4) $\frac{11}{30} \quad \Rightarrow \quad L = \frac{2}{5} - \frac{11}{30} = \frac{12}{30} - \frac{11}{30} = \mathbf{\frac{1}{30}}$

ניתן לראות כי בתשובה (4) התקבל הערך הקטן ביותר, ועל כן זו התשובה הנכונה.

6. תשובה (4) נכונה. שאלה 9 מתוך 20 בפרק.

נפשט את התשובות על מנת לקבוע ערכו של איזה ביטוי לא שווה ל- $\frac{2}{3}$.

<u>נבדוק את תשובה (1):</u>

$$-1+\frac{5}{3}=-\frac{3}{3}+\frac{5}{3}=\frac{2}{3}$$

התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (2):</u>

$$2-\frac{4}{3}=\frac{6}{3}-\frac{4}{3}=\frac{2}{3}$$

התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (3):</u>

$$\frac{18}{27}=\frac{2\cdot 9}{3\cdot 9}=\frac{2}{3}$$

התשובה נפסלת.

טיפ: כיוון שפסלנו 3 תשובות, ניתן לסמן את תשובה (4) מבלי לבדוק אותה. למען שלמות ההסבר, נבדוק את נכונותה:

<u>נבדוק את תשובה (4):</u>

לא ניתן לצמצם את השבר $\frac{4}{9}$ שכן ל-4 ול-9 אין מחלק משותף. **תשובה נכונה.**

7. תשובה (4) נכונה. שאלה 10 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הצבת מספרים

a ו-b הם מספרים חיוביים שונים. ידוע כי $\frac{a}{b}$ הוא מספר שלם. נציב ערכים מתאימים עבור a ו-b ונבדוק את התשובות. נציב: $a = 2$, $b = 1$. נשים לב שמכיוון שהשתמשנו בהצבת מספרים, עלינו לפסול 3 תשובות בטרם נוכל לסמן תשובה נכונה.

(1) $1 < a - b \Rightarrow 2 - 1 = 1 \Rightarrow$ לא מתאים, התשובה נפסלת

(2) $0 < a - b < 1 \Rightarrow 2 - 1 = 1 \Rightarrow$ לא מתאים, התשובה נפסלת

(3) $1 < \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{1}{2} \Rightarrow$ לא מתאים, התשובה נפסלת

טיפ: כיוון שפסלנו 3 תשובות, ניתן לסמן את תשובה (4) מבלי לבדוק אותה. למען שלמות ההסבר, נבדוק את נכונותה:

(4) $0 < \frac{b}{a} < 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \Rightarrow$ **מתאים**

דרך ב' – הבנה

נבדוק את התשובות ונחפש טענה נכונה.

<u>נבדוק את תשובה (1):</u> $1 < a - b$

ידוע כי a ו-b הם מספרים חיוביים שונים, כך ש-$\frac{a}{b}$ הוא מספר שלם. כלומר, a מהווה כפולה כלשהי של b. ייתכנו שני מספרים העומדים בתנאים אלה שההפרש ביניהם אינו גדול מ-1, אלא שווה ל-1.
למשל, $a = 2$ ו-$b = 1$. התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (2):</u> $0 < a - b < 1$

כאמור לעיל, ייתכן מצב בו ההפרש בין a ל-b יהיה שווה ל-1, ולכן הטענה אינה נכונה. כמו כן, כאשר ההפרש בין שני מספרים חיוביים קטן מ-1 וגדול מ-0, אחד מהם חייב להיות שבר. אולם, כאמור, שני המספרים שלמים. התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (3):</u> $1 < \frac{b}{a}$

$\frac{b}{a}$ הוא המספר ההופכי ל-$\frac{a}{b}$. כאמור, $\frac{a}{b}$ הוא מספר שלם. לפיכך, המספר ההופכי שלו יהיה שבר פשוט הקטן מ-1.
התשובה נפסלת.

טיפ: כיוון שפסלנו 3 תשובות, ניתן לסמן את תשובה (4) מבלי לבדוק אותה. למען שלמות ההסבר, נבדוק את נכונותה:

<u>נבדוק את תשובה (4):</u> $0 < \frac{b}{a} < 1$

כאמור, $\frac{b}{a}$ הוא מספר הופכי של מספר שלם ולכן הוא שבר פשוט אשר גדול מ-0 וקטן מ-1. **תשובה נכונה.**

8. תשובה (4) נכונה. שאלה 11 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הבנת מונה ומכנה

עלינו למצוא עבור איזה ערך של x הביטוי שלפנינו יהיה הקטן ביותר. הביטוי בהכרח חיובי, שכן a הוא חיובי ($1 < a$) ועל סמך התשובות, x קטן ממנו ($x \leq 1$). לכן, כאשר נוסיף ל-a את x (כפי שנעשה במונה) או נחסר ממנו x (כפי שנעשה במכנה), התוצאה תהיה חיובית. כלומר, זהו שבר חיובי. כדי ששבר חיובי יהיה קטן כמה שיותר, על המונה להיות קטן ככל הניתן ועל המכנה להיות גדול ככל הניתן.

תחילה, נתמקד במונה. כדי שהמונה יהיה כמה שיותר קטן, עלינו להוסיף ל-a מספר כמה שיותר קטן. במקרה זה, התשובה המתאימה היא (4), שכן $a - 1$ הוא הערך הקטן ביותר האפשרי למונה.

כעת נתמקד במכנה. כדי שהמכנה יהיה כמה שיותר גדול, נפחית מ-a מספר כמה שיותר קטן. גם במקרה זה התשובה המתאימה היא (4), שכן המכנה שנוצר הוא $a + 1$ ($a - (-1)$).

על כן, תשובה (4) נכונה.

דרך ב' – הצבת מספרים

עלינו למצוא עבור איזה ערך של x הביטוי שלפנינו יהיה הקטן ביותר. נתון כי $1 < a$. נציב ערך עבור a, כדי שנוכל להציב את ערכי x המופיעים בתשובות ולחפש את התשובה המביאה לכך שערך הביטוי הוא הנמוך ביותר. נציב $a = 2$ ונבדוק את התשובות.

(1) $$\frac{2+1}{2-1} = \frac{3}{1} = 3$$

(2) $$\frac{2+\frac{1}{2}}{2-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{5 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$$

(3) $$\frac{2+\left(-\frac{1}{2}\right)}{2-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{2-\frac{1}{2}}{2+\frac{1}{2}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{5}{2}} = \frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{3}{5}$$

(4) $$\frac{2+(-1)}{2-(-1)} = \frac{1}{3}$$

הביטוי הקטן ביותר נוצר כתוצאה מהצבת תשובה (4), ולכן זו התשובה הנכונה.

9. תשובה (1) נכונה. שאלה 19 מתוך 20 בפרק.

עלינו לקבוע איזה מהשברים שבתשובות הוא הקטן ביותר. נעשה זאת באמצעות שיטת "חצי גמר/גמר", נשווה בין השברים אשר מכניהם או מוניהם זהים.

נשווה בין תשובות (1) ו-(2). קל לקבוע ש- $\frac{6}{5}$ הוא שבר קטן יותר מ- $\frac{7}{5}$, מפני שכאשר המכנים זהים, השבר הקטן יותר הוא השבר בעל המונה הקטן יותר. לפיכך, תשובה (2) נפסלת.

נשווה בין תשובות (3) ו-(4). שני השברים בעלי מונה זהה – 17. במצב זה, השבר הקטן יותר הוא השבר בעל המכנה הגדול יותר. על כן, $\frac{17}{14} < \frac{17}{13}$. תשובה (3) נפסלת.

כעת נשווה בין שתי התשובות הנותרות – תשובות (1) ו-(4).

דרך א' – כפל בהצלבה
כדי להשוות בין השברים שנותרו, נבצע כפל בהצלבה.

$\frac{6}{5}$		$\frac{17}{14}$
$6 \cdot 14 = 60 + 24 = 84$	<	$17 \cdot 5 = 50 + 35 = 85$

מצאנו כי השבר הקטן יותר הוא $\frac{6}{5}$. כלומר, תשובה (1) נכונה.

דרך ב' – מונה משותף
עלינו להשוות בין השברים $\frac{6}{5}$ ו- $\frac{17}{14}$, ולקבוע איזה שבר קטן יותר. נתאר את השברים הללו כשברים מעורבים:

$$\frac{6}{5} = 1\frac{1}{5} \quad , \quad \frac{17}{14} = 1\frac{3}{14}$$

כעת, כדי לקבוע איזה שבר קטן יותר, ניתן להשוות בין השברים $\frac{1}{5}$ ו- $\frac{3}{14}$. זאת מפני שהשברים הללו מהווים

"תוספת" מעבר ל-1 לכל אחד מהשברים שבתשובות. השבר בעל ה"תוספת" הקטנה יותר, הוא השבר הקטן יותר.

נרחיב את $\frac{1}{5}$ פי 3 $\Leftarrow$ $\frac{3}{15}$.
כאשר המונים זהים, השבר הקטן יותר הוא השבר בעל המכנה הגדול יותר. כלומר, $\frac{3}{15}$ קטן מ- $\frac{3}{14}$. משמע, $\frac{1}{5}$ קטן מ- $\frac{3}{14}$.

לפיכך, השבר הקטן ביותר הוא $\frac{6}{5}$. תשובה (1) נכונה.

10. תשובה (3) נכונה. שאלה 19 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – מונה משותף

נצמצם את השברים כך שלכולם יהיה 1 במונה (אף על פי שבחלקם המכנה יהיה מספר לא שלם), כדי שנוכל להשוות ביניהם:

$$\frac{5}{40}=\frac{1}{8}$$

$$\frac{4}{30}=\frac{2}{15}=\frac{1}{7.5}$$

כדי לחשב כמה זה $25:3$, נפצל אותו ל-24 ול-1.

3 נכנס ב-24 בדיוק 8 פעמים. 3 נכנס ב-1 $\frac{1}{3}$ פעמים. כלומר, 3 נכנס ב-25 $8\frac{1}{3}$ פעמים.

$$\frac{3}{25}=\frac{1}{8\frac{1}{3}}$$

כעת ניתן להשוות בין השברים. כאשר המונים זהים, ככל שהמכנה גדול יותר - כך השבר קטן יותר.

$$\frac{1}{8\frac{1}{3}}<\frac{1}{8}<\frac{1}{7.5} \quad\Rightarrow\quad \frac{3}{25}<\frac{5}{40}<\frac{4}{30}$$

דרך ב' – כפל בהצלבה

בכל פעם נשווה בין שני שברים באמצעות כפל בהצלבה ונפסול את התשובות שאינן מתאימות למה שמצאנו.

נתחיל בהשוואה בין השברים $\frac{3}{25}$ ו- $\frac{5}{40}$ כיוון שכל אחד מהם מצוין כשבר הקטן ביותר בשתי תשובות.

$\frac{5}{40}$ הוא השבר הקטן ביותר בתשובות (1) ו-(4) ואילו $\frac{3}{25}$ הוא הקטן ביותר בתשובות (2) ו- (3).

כשנבין איזה שבר מבין השניים קטן יותר, נוכל בהכרח לפסול שתי תשובות.

$$\begin{array}{ccc} \frac{3}{25} & & \frac{5}{40} \\ 3\cdot 40=120 & < & 5\cdot 25=125 \end{array}$$

ניתן לפסול את תשובות (1) ו-(4).

ההבדל בין תשובות (2) ו-(3) הוא המיקום של השברים $\frac{5}{40}$ ו- $\frac{4}{30}$ ולכן נשווה ביניהם כדי לפסול תשובה נוספת:

$$\begin{array}{ccc} \frac{5}{40} & & \frac{4}{30} \\ 5\cdot 30=150 & < & 40\cdot 4=160 \end{array}$$

ניתן לפסול את תשובה (2). פסלנו 3 תשובות, ולכן תשובה (3) נכונה.

ביטויים - יסודות

ביטוי הוא רצף של איברים אלגבריים (מספרים ונעלמים בעלי ערך כלשהו).

שימו לב! ביטוי הוא לא משוואה - אין לו אגפים ואין סימן שוויון, ולכן לא ניתן לבצע עליו את כל הפעולות המותרות במשוואות, כגון העלאה בריבוע.

רוב השאלות בנושא ביטויים בבחינה נפתרות באמצעות חוקי האלגברה הבסיסיים: סדר פעולות חשבון, צמצום שברים וכדומה.

כינוס איברים

איבר אלגברי מורכב ממקדם וגודל ראשי. למשל, באיבר $4y^2$, 4 הוא המקדם ו-y^2 הוא הגודל הראשי.
איברים אלגבריים בעלי <u>גודל ראשי</u> זהה נקראים איברים דומים, וניתן לבצע עליהם פעולות חיבור וחיסור.

דוגמה:

$$3x + 4y - 2x^2 - 2x + 4x^2 - y =$$

$$(-2x^2 + 4x^2) + (3x - 2x) + (4y - y) = 2x^2 + x + 3y$$

כפל איברים

בכפל איברים נכפול את המקדמים ואת הגדלים הראשיים בנפרד.

דוגמה:

$$4a \cdot 3b \cdot 2a = (4 \cdot 3 \cdot 2) \cdot (a \cdot b \cdot a) = 24a^2b$$

ניתן לשנות את סדר המשתנים בתוך האיבר:

$$24a^2b = 24ba^2$$

פתיחת סוגריים

פתיחת סוגריים מתבצעת על ידי כפל של האיבר שמחוץ לסוגריים בכל אחד מהאיברים שבתוך הסוגריים. אם לפני הסוגריים מופיעים הסימנים $+$ או $-$ נתייחס אליהם כאל $(+1)$ או (-1).

דוגמאות:

$$3(2x - 5) = 3 \cdot 2x + 3 \cdot (-5) = 6x - 15$$

$$-(3y - 2) = (-1) \cdot 3y + (-1) \cdot (-2) = -3y + 2$$

$$(x + 4)(3x - 7) = x \cdot 3x + x \cdot (-7) + 4 \cdot 3x + 4 \cdot (-7) =$$

$$3x^2 - 7x + 12x - 28 = 3x^2 + 5x - 28$$

הוצאת גורם משותף

גורם משותף הוא גורם אשר קיים במספר איברים. ניתן להוציא אותו אל מחוץ לסוגריים (פעולה הפוכה מפתיחת סוגריים), ובתוך הסוגריים נשארים הגורמים האחרים של כל אחד מהאיברים.
גורם משותף יכול להיות מספר, נעלם, או אפילו ביטוי מורכב יותר.
דוגמה:

$$2a^2 - 6a + 8 \quad = \quad \boxed{2} \cdot a^2 - \boxed{2} \cdot 3a + \boxed{2} \cdot 4 \quad = \quad \boxed{2} \cdot (a^2 - 3a + 4)$$

לאחר שהוצאנו את הגורם המשותף אל מחוץ לסוגריים, נרשום בתוך הסוגריים את מה שחסר לנו על מנת לחזור למספר המקורי על ידי פעולת הכפל. במקרה שלעיל - הוצאנו את 2 כגורם משותף, ועל מנת לחזור ל- $2a^2$ בעזרת פעולת הכפל חסר לנו a^2, ולכן נרשום אותו בתוך הסוגריים. באותו אופן על מנת להגיע חזרה ל- $6a$ בעזרת פעולת הכפל חסר לנו $3a$, ולחזור ל-8 חסר לנו 4. שימו לב שכאשר נפתח את הסוגריים לפי הכללים שלמדנו קודם לכן, נקבל חזרה את הביטוי המקורי.

$$2(a^2 - 3a + 4) = 2a^2 - 6a + 8$$

כפל מקוצר

שאלות כפל מקוצר בפסיכומטרי נפתרות על ידי פיתוח הנוסחאות הרגילות, הצבה בנוסחה או הצבת מספרים. השליטה בנוסחאות כפל מקוצר מאוד חשובה בבחינה.

נוסחאות הכפל המקוצר:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

תרגול - ביטויים יסודות

.1 $6a + 3b - 3a - b = ?$

(1) $3a + b$ (2) $2(a + b)$ (3) $3a + 2b$ (4) $2a + 3b$

.2 $-\sqrt{2} - 5\sqrt{3} + \sqrt{3} + 2\sqrt{2} = ?$

(1) $\sqrt{2} - \sqrt{3}$ (2) $\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$ (3) $\sqrt{2} - 3\sqrt{3}$ (4) $\sqrt{2} - 4\sqrt{3}$

.3 $(-6x) \cdot 5z \cdot 3y = ?$

(1) $-xyz$ (2) $-60xyz$ (3) $-30xyz$ (4) $-90xyz$

.4 $7 \cdot (-a) \cdot a^2 \cdot (-3a) = ?$

(1) $21a^3$ (2) $-21a^3$ (3) $21a^4$ (4) $-21a^4$

.5 $2x \cdot 3x^2y \cdot (-5xy^2) = ?$

(1) $-10x^3y^3$ (2) $-30x^4y^3$ (3) $-30x^3y^3$ (4) $-30x^3y^4$

.6 $-5(2x - 3) = ?$

(1) $-10x + 15$ (2) $10x - 15$ (3) $-10x - 15$ (4) $10x + 15$

.7 $(x + 1)(x^3 - x^2 + x - 1) = ?$

(1) 1 (2) $x^4 - 1$ (3) x^4 (4) $x^4 + 1$

---

8. $(a-b)-(b-a)=?$

(1) $2a$ (2) $-2b$ (3) $2a-2b$ (4) 0

---

9. $(2x-y)-(-y+2x)=?$

(1) 0 (2) $-2y$ (3) $4x-2y$ (4) $4x$

---

10. $(-b+a)-(-a-b)=?$

(1) $2a$ (2) $-2b$ (3) $2a-2b$ (4) 0

---

11. $(x-y)-(-y-(-x))=?$

(1) $2x$ (2) $-2y$ (3) $2x-2y$ (4) 0

---

12. $(2x+5)^2=?$

(1) $4x^2+25$
(2) $4x^2+25+10x$
(3) $4x^2+25+20x$
(4) $4x^2+25+50x$

---

13. $2(x+2)^2=?$

(1) $2x^2+8$
(2) $4x^2+16$
(3) $2x^2+8+8x$
(4) $4x^2+16+16x$

---

14. $x^2+18x+81=?$

(1) $(x+3)^2$
(2) $(x+6)^2$
(3) $3(x+3)^2$
(4) $(x+9)^2$

.15 $(3x-2)^2= ?$

(1) $9x^2-4$
(2) $9x^2+4$
(3) $9x^2-4-12x$
(4) $9x^2+4-12x$

.16 $(x-y)^2-(x+y)^2 = ?$

(1) $2x^2-2y^2$
(2) 0
(3) $4xy$
(4) $-4xy$

.17 $9x^2+25-30x = ?$

(1) $3(x-5)^2$
(2) $(-3x-5)^2$
(3) $(3x-5)^2$
(4) $3(-x-5)^2$

.18 $(x-6)(x+6) = ?$

(1) x^2-36
(2) x^2+36
(3) $x^2-36-12x$
(4) $x^2-36-36x$

.19 $5(x-2)(x+2) = ?$

(1) $5x^2-20$
(2) $5x^2+20$
(3) $5x^2-20-20x$
(4) $5x^2-20-4x$

---

20. $9 - 4x^2 = ?$

(1) $(3 + 2x)^2$

(2) $\left(3 - \sqrt{2}x\right)\left(3 + \sqrt{2}x\right)$

(3) $(3 - 2x)^2$

(4) $(3 - 2x)(3 + 2x)$

תשובות

שאלה	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
תשובה	3	4	4	3	2	1	2	3	1	1

שאלה	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
תשובה	4	3	3	4	4	4	3	1	1	4

1. תשובה (3) נכונה

$6a + 3b - 3a - b = (6a - 3a) + (3b - b) = 3a + 2b$

---

2. תשובה (4) נכונה

$-\sqrt{2} - 5\sqrt{3} + \sqrt{3} + 2\sqrt{2} = \left(2\sqrt{2} - \sqrt{2}\right) + \left(\sqrt{3} - 5\sqrt{3}\right) = \sqrt{2} - 4\sqrt{3}$

---

3. תשובה (4) נכונה

$(-6x) \cdot 5z \cdot 3y = ((-6) \cdot 5 \cdot 3 \cdot x \cdot y \cdot z) = -90xyz$

---

4. תשובה (3) נכונה

$7 \cdot (-a) \cdot a^2 \cdot (-3a) = 7 \cdot (-3) \cdot (-a) \cdot a^2 \cdot a = 21a^4$

---

5. תשובה (2) נכונה

$2x \cdot 3x^2y \cdot (-5xy^2) = 2 \cdot 3 \cdot (-5) \cdot x \cdot x^2y \cdot xy^2 = -30x^4y^3$

---

6. תשובה (1) נכונה

$-5(2x - 3) = -10x + 15$

---

7. תשובה (2) נכונה

$(x + 1)(x^3 - x^2 + x - 1) = x^4 - x^3 + x^2 - x + x^3 - x^2 + x - 1 = x^4 - 1$

---

8. תשובה (3) נכונה

$(a-b)-(b-a)= a-b-b+a=2a-2b$

---

9. תשובה (1) נכונה

$(2x-y)-(-y+2x)= 2x-y+y-2x=0$

---

10. תשובה (1) נכונה

$(-b+a)-(-a-b)= -b+a+a+b=2a$

---

11. תשובה (4) נכונה

$(x-y)-\big(-y-(-x)\big)=(x-y)-(-y+x)= x-y+y-x=0$

---

12. תשובה (3) נכונה

$(2x+5)^2= 4x^2+25+20x$

---

13. תשובה (3) נכונה

$2(x+2)^2= 2(x^2+4+4x)=2x^2+8+8x$

---

14. תשובה (4) נכונה

$x^2+18x+81= (x+9)^2$

---

15. תשובה (4) נכונה

$(3x-2)^2= 9x^2+4-12x$

---

16. תשובה (4) נכונה

$(x-y)^2-(x+y)^2= (x^2+y^2-2xy)-(x^2+y^2+2xy)=$
$x^2+y^2-2xy-x^2-y^2-2xy=-4xy$

---

17. תשובה (3) נכונה

$9x^2+25-30x= (3x-5)^2$

---

18. תשובה (1) נכונה

$(x-6)(x+6) = x^2 - 36$

---

19. תשובה (1) נכונה

$5(x-2)(x+2) = 5(x^2-4) = 5x^2 - 20$

---

20. תשובה (4) נכונה

$9 - 4x^2 = (3-2x)(3+2x)$

ביטויים

הוצאת גורם משותף מורכב

דוגמה:

$(a + b)(x - 1) + (a + b)(x + 1) = ?$

(1) $2x(a + b)$
(2) $2(a + b + x)$
(3) 0
(4) $(a + b + x)$

פתרון -

נוציא גורם משותף $(a + b)$:

$$(a + b)(x - 1) + (a + b)(x + 1) = (a + b)[(x - 1) + (x + 1)] = (a + b)(x - 1 + x + 1) = (a + b) \cdot 2x$$

סדר פעולות חשבון

דוגמה:

$$\frac{4}{\frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}} = ?$$

(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4

פתרון -

עלינו להקפיד לעבוד לפי סדר פעולות חשבון ולהתחיל מהמכנה התחתון (במקרה זה). סימן השוויון מרמז לנו מהו קו השבר הראשי:

$$\frac{4}{\frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}} = \frac{4}{\frac{1}{\frac{3}{4}}} = \frac{4}{\frac{4}{3}} = 4 \cdot \frac{3}{4} = 3$$

מספרים נגדיים

בחלק מהשאלות נדרשת יכולת זיהוי של מספרים נגדיים בתוך ביטוי כלשהו. זיהוי המספרים הנגדיים עשוי לחסוך זמן בפתרון השאלה.

מספרים נגדיים - זוג מספרים שסכומם שווה לאפס. לדוגמה:

$(-2\ ;\ 2)$, $(-7\ ;\ 7)$, $(-15\ ;\ 15)$.

מומלץ להכיר את התבנית הבאה של מספרים נגדיים:

הביטוי $a - b$ הוא נגדי לביטוי $b - a$.

בפועל, זהו ההפרש בין a ל-b, פעם אחת חיובי ופעם אחת שלילי. אנו לא יודעים איזה מהם חיובי ואיזה שלילי אך זה לא משנה. מה שחשוב להבין הוא שמדובר במספרים נגדיים.

דוגמה:

$$2 - \frac{a-b}{b-a} = ?$$

(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) -1

פתרון -

שימו לב כי המונה והמכנה של השבר שבביטוי הם מספרים נגדיים, ולכן השבר שווה ל- (-1):

$$2 - \frac{a-b}{b-a} = 2 - (-1) = 3$$

$$\mathbf{\frac{a-b}{b-a} = -1}$$

מכנה משותף בביטוי

טעות נפוצה של תלמידים היא לבטל את המכנה כאשר מבצעים מכנה משותף בין שני שברים בביטוי.
שימו לב! ביטול המכנה מתבצע **רק במשוואה**, בה אנו כופלים את שני אגפי המשוואה במכנה ולכן הוא מתבטל. בביטוי אין אגפים ולכן לא ניתן לבטל את המכנה.

דוגמה:

המכנה לא מתבטל!

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = ? \qquad \Rightarrow \qquad \frac{a^2+b^2}{ba}$$

כפל מקוצר

דוגמה:

מה ערכו של הביטוי $(x+y)^2 - (x-y)^2 = ?$

(1) $x \cdot y$ (2) $x^2 - y^2$ (3) 0 (4) 4xy

פתרון -

נפתח את הסוגריים לפי נוסחאות 1 ו-2 ונפשט את הביטוי:

$$(x+y)^2 - (x-y)^2 = [x^2 + 2xy + y^2] - [x^2 - 2xy + y^2] = x^2 + 2xy + y^2 - x^2 + 2xy - y^2 = 4xy$$

דוגמה:

$$(a-1)(a+1) - (b-1)(b+1) = ?$$

(1) 1 (2) $a + b$ (3) $a^2 - b^2$ (4) 0

פתרון -

נפשט את הביטוי על פי נוסחאות כפל מקוצר:

$(a-1)(a+1) - (b-1)(b+1) =$

$(a^2 - 1) - (b^2 - 1) =$

$a^2 - 1 - b^2 + 1 =$

$a^2 - b^2$

הצבת מספרים

במצבים בהם החישוב הוא ארוך ומסובך, או שאנחנו סתם ב"בלאק אאוט", ניתן לפתור את התרגיל בעזרת הצבת מספרים במקום הנעלמים. ישנם שני כללים המרמזים לנו מתי ניתן לעשות זאת:

1. בשאלה נתון ביטוי שצריך לחשב את ערכו, ולא משוואה.
2. הביטויים בתשובות מופיעים עם הנעלמים מהשאלה.

דוגמה:

מהו ערך הביטוי: $(x+y+z+w)^2-(x+y-z-w)^2=?$

(1) x^2+y^2 (2) $4(x+y)(z+w)$

(3) $2(xy-zw)$ (4) z^2+w^2

פתרון -

במקום לנסות ולפתח את הביטוי המסובך הזה בעזרת נוסחאות הכפל המקוצר, הדרך המהירה ביותר היא פשוט להציב מספרים.

נציב: $w=3$; $z=2$; $y=1$; $x=0$

$$(0+1+2+3)^2-(0+1-2-3)^2=6^2-(-4)^2=20$$

כעת נציב את המספרים גם בתשובות, ונבדוק באיזו מהתשובות התוצאה גם כן תהיה 20:

$$x^2+y^2 \Rightarrow 0^2+1^2=0+1=1$$
$$\mathbf{4(x+y)(z+w) \Rightarrow 4(0+1)(2+3)=4\cdot 1\cdot 5=20}$$
$$2(xy-zw) \Rightarrow 2(0\cdot 1-2\cdot 3)=2\cdot(-6)=-12$$
$$z^2+w^2 \Rightarrow 2^2+3^2=4+9=13$$

אם אין הגבלה בנתוני השאלה, מותר להציב במקום כל הנעלמים את אותו מספר

למשל, בשאלה זו ניתן להציב במקום כל הנעלמים את המספר 1:

נציב: $w=1$; $z=1$; $y=1$; $x=1$

$$(1+1+1+1)^2-(1+1-1-1)^2=4^2-0^2=16$$

כעת נציב את המספרים גם בתשובות, ונבדוק באיזו מהתשובות התוצאה גם כן תהיה 16:

$$x^2+y^2 \Rightarrow 1^2+1^2=1+1=2$$
$$\mathbf{4(x+y)(z+w) \Rightarrow 4(1+1)(1+1)=4\cdot 2\cdot 2=16}$$
$$2(xy-zw) \Rightarrow 2(1\cdot 1-1\cdot 1)=2\cdot 0=0$$
$$z^2+w^2 \Rightarrow 1^2+1^2=1+1=2$$

תרגול שאלות מבחינות אמת

1. בעבור כל x,

$2[(x+5)-2]-2x+4=?$

(1) 10
(2) $12+3x$
(3) 13
(4) $14-x$

---

2. $\frac{x^2}{2x^3z}=?$ $\quad x,z\neq 0$

(1) $\frac{x}{2xz}$
(2) $\frac{1}{2z}$
(3) $\frac{1}{2xz}$
(4) $\frac{1}{2x^2z}$

---

3. נתון: $0<a$

$(-a)\cdot(|-5|\cdot a\cdot|-a|\cdot(-3))=?$

(1) $-15a^2$
(2) $5a^2$
(3) $15a^3$
(4) $-5a^3$

---

4. $105\cdot 95=?$

(1) 9,595
(2) 9,975
(3) 10,025
(4) 10,555

פתרתי ______________ שאלות ב ______________ דקות, ______________ תשובות נכונות

.5 $x(x-1)-(x-1)(x-2)=?$

(1) $x-2$
(2) 2
(3) $2x-2$
(4) $4x-4$

.6 ערכו של איזה מהביטויים הבאים שווה בהכרח לערך הביטוי $12a^2-14ab-10b^2$?

(1) $(4a-5b)(3a+b)$
(2) $(2a+5b)(6a-2b)$
(3) $(3a-5b)(4a+2b)$
(4) $(3a+10b)(4a-b)$

.7 נתון: $a\neq 0$, $a\neq b$

$$\frac{a^2-b^2}{a-b}-\frac{a^2+ab}{a}=?$$

(1) 1 (2) 0 (3) a (4) b

.8 $(x+1)+(x+1)^2=?$

(1) $(x+1)(x+2)$
(2) $(x+2)^2$
(3) $(x+1)^3$
(4) $(x+1)(x^2+1)$

.9 נתון: $a,b>0$

$$\frac{a^2b+ab^2}{2a^2+2ab}=?$$

(1) $\frac{b}{2}$ (2) $\frac{a+b}{2}$ (3) $\frac{ab}{a+b}$ (4) $\frac{a+b}{2ab}$

פתרתי ____________ שאלות ב ____________ דקות, ____________ תשובות נכונות

.10 נתון: $x \neq 0$

איזה מהביטויים הבאים שווה לביטוי $\left(\frac{x^2}{\pi x} + 2x\right) \cdot 2 \cdot (x^{-1})$?

(1) $\frac{1}{2\pi} + 1$

(2) $\frac{2}{\pi} + 4$

(3) $3x^2$

(4) $\frac{x}{\pi}$

.11 $\left(\sqrt{\frac{4}{9}} - \frac{4}{9}\right)^2 = ?$

(1) $\frac{2}{27}$

(2) $\frac{4}{81}$

(3) $\frac{2}{3}$

(4) $\frac{4}{9}$

.12 נתון: $x < 0$

$1 - \frac{x}{|x|} = ?$

(1) 0 (2) 2 (3) $\frac{1-x}{|x|}$ (4) $|x|$

.13 נתון: $y^2 = 9$
$x \neq 0$

$$\frac{\frac{x+1}{y} - \frac{x+2}{2y}}{\frac{x \cdot y}{6}} = ?$$

(1) $\frac{2x}{3}$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) $\frac{1}{3}$ (4) $\frac{x}{6}$

פתרתי ____________ שאלות ב ____________ דקות, ____________ תשובות נכונות

.14 $-\left(\frac{1}{a-1}\right) = ?$ $(a \neq \pm 1)$

(1) $\frac{1}{1-a}$ (2) $\frac{1}{1+a}$ (3) $\frac{-1}{1-a}$ (4) $\frac{-1}{1+a}$

.15 נתון: $1 < x$

$$\frac{2}{\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}} = ?$$

(1) 1 (2) x^2-1 (3) $x-\frac{1}{x}$ (4) x

.16 איזה מן הביטויים הבאים הוא מספר קבוע, שאינו תלוי ב-n $(n \neq 0)$?

(1) $(n-1)^2+(n+1)^2$

(2) $\frac{n+n^2}{n}$

(3) $\frac{n(n+4)}{4n}$

(4) $\frac{(n-1)^2-(n+1)^2}{n}$

.17 נתונים שני מספרים a ו-b , $a^2-b^2 \neq 0$

$$\frac{(a^3+a^2b)(a-b)^2}{a^2-b^2} = ?$$

(1) a^3-a^2b

(2) a^3+ab^2

(3) $\frac{a^3-b}{a-b}$

(4) a^3+a^2b

פתרתי ______________ שאלות ב ______________ דקות, ______________ תשובות נכונות

.18 $2\cdot6\cdot19\cdot25-3\cdot4\cdot18\cdot25=?$

(1) 100 (2) 25 (3) 300 (4) 50

.19 $\dfrac{\dfrac{1}{2}}{\dfrac{3}{4}}=?$

(1) $\frac{3}{8}$ (2) $\frac{1}{6}$ (3) $\frac{6}{4}$ (4) $\frac{2}{3}$

.20 $\dfrac{a^2+b^2+(a+b)^2}{2ab}-1=?$, $a, b\neq0$

(1) $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$

(2) $\frac{a}{2b}+\frac{b}{2a}$

(3) $\frac{(a+b)(a-b)}{ab}$

(4) $2(a^2+b^2)$

תשובות

שאלה	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
תשובה	1	3	3	2	3	3	2	1	1	2

שאלה	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
תשובה	2	2	3	1	3	4	1	3	1	1

פתרתי 20 שאלות - ______________ נכונות, ______________ אחוזי הצלחה

.1 תשובה (1) נכונה. שאלה 1 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הצבת מספרים
על מנת להקל על פתרון השאלה, ניתן להציב במקום x מספר נוח, לדוגמה x=0.
הביטוי שיתקבל יהיה:

$$2[(0+5)-2]-2\cdot 0+4=2[5-2]-0+4=2\cdot 3+4=10$$

מצאנו שכאשר x=0 הביטוי שווה ל-10. עתה נציב גם בתשובות x=0 ונחפש מתי ערך הביטוי יהיה שווה ל-10.

1) 10 ⇐ מתאים.
2) $12+3\cdot 0=12$ ⇐ לא מתאים. התשובה נפסלת
3) 13 ⇐ לא מתאים. התשובה נפסלת
4) $14-0$ ⇐ לא מתאים. התשובה נפסלת

פסלנו 3 תשובות, ולכן תשובה (1) נכונה.

דרך ב' – חישוב אלגברי
*חשוב לזכור כי כאשר המינוס מופיע לאחר הסוגריים, אין לו כל השפעה על הכתוב בסוגריים.

$$2[(x+5)-2]-2x+4=2[x+5-2]-2x+4=2[x+3]-2x+4=$$
$$2x+6-2x+4=10$$

.2 תשובה (3) נכונה. שאלה 2 מתוך 20 בפרק.

הביטוי הנתון הוא שבר שבו גם במונה וגם במכנה ישנן <u>פעולות כפל</u> בין האיברים. במצב זה, מותר לנו לצמצם גורמים זהים במונה ובמכנה. לכן, ניתן לצמצם x^2:

$$\frac{x^2}{2x^3z}=\frac{1}{2xz}$$

3. תשובה (3) נכונה. שאלה 3 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הבנה

נשים לב כי לתוצאה יש 3 פרמטרים – a, מספרים וסימן (חיובי או שלילי). מספיק שנבדוק רק שניים מהם, ונישאר עם תשובה אחת אפשרית.

נתחיל מבדיקת המספרים – בביטוי מכפילים את הספרות 5 ב-3 ולכן התוצאה חייבת לכלול את המספר 15. ניתן לפסול את תשובה (2) ו-(4).

נותרנו עם תשובות (1) ו-(3), אשר שונות זו מזו גם בסימן וגם במספר. נבדוק את a – גורם זה מופיע בביטוי 3 פעמים. כלומר, התוצאה חייבת לכלול את a^3. ניתן לפסול את תשובה (1).

פסלנו 3 תשובות, ולכן תשובה (3) נכונה. זו התשובה היחידה שמכילה את הגורמים 15 ו- a^3 ועל כן אין צורך לבדוק את הסימן.

דרך ב' – הצבת מספרים

נציב ערך של a המתאים לטווח הנתון (a חיובי) בביטוי שבשאלה, $a = 1$:

$$(-1)\cdot\big(|-5|\cdot 1\cdot|-1|\cdot(-3)\big) = (-1)\cdot\big(5\cdot 1\cdot 1\cdot(-3)\big) = (-1)\cdot(-15) = 15$$

כעת, נציב גם בתשובות $a = 1$, ונחפש תשובה השווה ל-15. נשים לב שמכיוון שהשתמשנו בהצבת מספרים, עלינו לפסול 3 תשובות בטרם נוכל לסמן תשובה נכונה.

(1)	$-15a^2 = -15\cdot 1^2 = -15$	$\Rightarrow$	לא מתאים. התשובה נפסלת
(2)	$5a^2 = 5\cdot 1^2 = 5$	$\Rightarrow$	לא מתאים. התשובה נפסלת
(3)	$15a^3 = 15\cdot 1^3 = 15$	$\Rightarrow$	**מתאים**
(4)	$-5a^3 = -5\cdot 1^3 = -5$	$\Rightarrow$	לא מתאים. התשובה נפסלת

פסלנו 3 תשובות ועל כן תשובה (3) נכונה.

דרך ג' – פתרון מתמטי

נתון ש-a חיובי, לכן $|-a| = a$

$$(-a)\cdot\big(|-5|\cdot a\cdot|-a|\cdot(-3)\big) = (-a)\cdot\big(5\cdot a\cdot a\cdot(-3)\big)$$
$$(-a)\cdot(-15a^2) = 15a^3$$

.4 תשובה (2) נכונה. שאלה 4 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – כפל מקוצר

עלינו למצוא את המכפלה $95 \cdot 105$. מאחר שמדובר במספרים שאינם נוחים לחישוב, ננסה לחשוב על דרך פתרון שונה. נשים לב כי את הביטוי ניתן לכתוב גם באופן הבא:

$$(100+5)\cdot(100-5)$$

מדובר בביטוי הזהה לנוסחת כפל מקוצר. נפשט אותו בהתאם:

$$(100+5)\cdot(100-5)=100^2-5^2=10{,}000-25=9{,}975$$

דרך ב' – חישוב מלא

ניתן לחשב את המכפלה באופן מלא, באמצעות פירוק שלה. נפרק את 105 ל- $100 + 5$ ונכפיל כל אחד מהגורמים הללו ב-95:

$$105\cdot 95=(100+5)\cdot 95=100\cdot 95+5\cdot 95=9{,}500+95\cdot 5$$

כעת נפרק את 95 ל- $90 + 5$:

$$9{,}500+5\cdot 95=9{,}500+5\cdot(90+5)=9{,}500+450+25=9{,}975$$

.5 תשובה (3) נכונה. שאלה 5 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הוצאת גורם משותף מורכב

עלינו לפשט את הביטוי הנתון. ניתן להוציא גורם משותף $(x-1)$:

$$x(x-1)-(x-1)(x-2)=x\cdot(\mathbf{x-1})-(x-2)\cdot(\mathbf{x-1})=$$

$$\big(x-(x-2)\big)\cdot(x-1)=(x-x+2)\cdot(x-1)=2\cdot(x-1)=2x-2$$

דרך ב' – הצבת מספרים

עלינו לפשט את הביטוי הנתון. כדי לא לקבל תוצאה שתחייב אותנו להציב פעמיים. נציב $x = 3$ (אילו נציב 0, 1 או 2 בתשובות, יהיו מספר תשובות זהות).

$$x(x-1)-(x-1)(x-2)\ \Rightarrow\ 3(3-1)-(3-1)(3-2)$$

$$3(3-1)-(3-1)(3-2)=3\cdot 2-2\cdot 1=6-2=4$$

כעת, נציב גם בתשובות $x = 3$ ונחפש תשובה השווה ל-4. נשים לב שמכיוון שהשתמשנו בהצבת מספרים, עלינו לפסול 3 תשובות בטרם נוכל לסמן תשובה נכונה.

(1)	$x-2\ \Rightarrow\ 3-2=1$	$\Rightarrow$	לא מתאים, התשובה נפסלת
(2)	2	$\Rightarrow$	לא מתאים, התשובה נפסלת
(3)	$2x-2\ \Rightarrow\ 2\cdot 3-2=4$	$\Rightarrow$	**מתאים**
(4)	$4x-4\ \Rightarrow\ 4\cdot 3-4=8$	$\Rightarrow$	לא מתאים, התשובה נפסלת

פסלנו 3 תשובות ועל כן תשובה (3) נכונה.

דרך ג' – פתרון מתמטי מלא

נפשט את הביטוי הנתון. תחילה, נפתח סוגריים:

$$x(x-1)-(x-1)(x-2)=x^2-x-(x^2-2x-x+2)=$$

נכנס איברים דומים ונפתח סוגריים:

$$x^2-x-(x^2-3x+2)=x^2-x-x^2+3x-2=2x-2$$

---

6. תשובה (3) נכונה. שאלה 5 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הצבת מספרים
עלינו לקבוע איזה ביטוי בתשובות בעל ערך השווה לערך הביטוי הנתון. נציב מספרים עבור a ו-b בביטוי הנתון, ונחפש תשובה בעלת ערך זהה. נציב: $a = 1$, $b = 2$.

$$12a^2 - 14ab - 10b^2 \quad \Rightarrow \quad 12 \cdot 1^2 - 14 \cdot 1 \cdot 2 - 10 \cdot 2^2 = 12 - 28 - 40 = -56$$

כעת, נציב גם בתשובות $a = 1$, $b = 2$, ונחפש תשובה השווה ל-56-. נשים לב שמכיוון שהשתמשנו בהצבת מספרים, עלינו לפסול 3 תשובות בטרם נוכל לסמן תשובה נכונה.

(1) $(4a - 5b)(3a + b) \quad \Rightarrow \quad (4 - 10)(3 + 2) = -30$ $\Rightarrow$ לא מתאים, התשובה נפסלת

(2) $(2a + 5b)(6a - 2b) \quad \Rightarrow \quad (2 + 10)(6 - 4)$ ניתן לפסול מפני שהתוצאה חיובית $\Rightarrow$ לא מתאים, התשובה נפסלת

(3) $(3a - 5b)(4a + 2b) \quad \Rightarrow \quad (3 - 10)(4 + 4) = -56$ $\Rightarrow$ **מתאים**

(4) $(3a + 10b)(4a - b) \quad \Rightarrow \quad (3 + 20)(4 - 2)$ ניתן לפסול מפני שהתוצאה חיובית $\Rightarrow$ לא מתאים, התשובה נפסלת

פסלנו 3 תשובות ועל כן תשובה (3) נכונה.

דרך ב' – פתרון מתמטי
נפשט את הביטויים שבתשובות ונחפש ביטוי זהה לביטוי הנתון:

<u>נבדוק את תשובה (1):</u>

$$(4a - 5b)(3a + b) = 12a^2 + 4ab - 15ab - 5b^2$$

אין צורך להשלים את החישוב, מפני שהמקדם של b^2 צריך להיות 10- ולא 5- . התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (2):</u>

$$(2a + 5b)(6a - 2b) = 12a^2 - 4ab + 30ab - 10b^2 = 12a^2 + 26ab - 10b^2$$

התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (3):</u>

$$(3a - 5b)(4a + 2b) = 12a^2 + 6ab - 20ab - 10b^2 = 12a^2 - 14ab - 10b^2$$

מתאים, **תשובה נכונה.**

טיפ: מכיוון שהצבנו את התשובות, ברגע שמצאנו תשובה נכונה אין צורך להמשיך לבדוק את שאר התשובות, אך למען שלמות ההסבר נפסול אותן:

<u>נבדוק את תשובה (4):</u>

$$(3a + 10b)(4a - b) = 12a^2 - 3ab + 40ab - 10b^2 = 12a^2 + 37ab - 10b^2$$

התשובה נפסלת.

7. תשובה (2) נכונה. שאלה 6 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הצבת מספרים

נתון ש-a שונה מ-0 ושונה מ-b. עלינו למצוא את ערכו של הביטוי $\frac{a^2-b^2}{a-b}-\frac{a^2+ab}{a}$

נציב מספרים במקום נעלמים. נציב $a = 1$, $b = 2$:

$$\frac{a^2-b^2}{a-b}-\frac{a^2+ab}{a}=\frac{1^2-2^2}{1-2}-\frac{1^2+1\cdot 2}{1}=\frac{1-4}{-1}-\frac{1+2}{1}$$

$$\frac{-3}{-1}-\frac{3}{1}=3-3=0$$

כעת, נציב גם בתשובות $a = 1$, $b = 2$, ונחפש תשובה השווה ל-0. נשים לב שמכיוון שהשתמשנו בהצבת מספרים במקום הנעלמים, עלינו לפסול 3 תשובות בטרם נוכל לסמן תשובה נכונה.

(1) $1 \Rightarrow$ לא מתאים, התשובה נפסלת.

(2) $0 \Rightarrow$ **מתאים.**

(3) $a = 1 \Rightarrow$ לא מתאים, התשובה נפסלת.

(4) $b = 2 \Rightarrow$ לא מתאים, התשובה נפסלת.

פסלנו 3 תשובות ועל כן תשובה (2) נכונה.

דרך ב' – פתרון מתמטי

נפשט את הביטוי $\frac{a^2+ab}{a}-\frac{a^2-b^2}{a-b}$. למען נוחות ההסבר, נתמקד בכל פעם בשבר אחד בביטוי.
נתחיל בשבר השמאלי :

$$\frac{a^2-b^2}{a-b}$$

את המונה ניתן לפתוח לפי נוסחת כפל מקוצר :

$$\frac{a^2-b^2}{a-b}=\frac{(a-b)(a+b)}{a-b}$$

נצמצם $(a - b)$ במונה ובמכנה :

$$\frac{(a-b)(a+b)}{a-b}=a+b$$

כעת נתמקד בשבר הימני :

$$\frac{a^2+ab}{a}$$

נוציא במונה גורם משותף a :

$$\frac{a^2+ab}{a}=\frac{a\cdot(a+b)}{a}$$

נצמצם a במונה ובמכנה :

$$\frac{a\cdot(a+b)}{a}=a+b$$

לסיכום, נכתוב את הביטוי כך :

$$\frac{a^2-b^2}{a-b}-\frac{a^2+ab}{a}=(a+b)-(a+b)=0$$

8. תשובה (1) נכונה. שאלה 8 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הוצאת גורם משותף מורכב

עלינו לפשט את הביטוי הנתון. ניתן להוציא גורם משותף $(x+1)$:

$$(x+1)+(x+1)^2 = 1\cdot(\mathbf{x}+\mathbf{1})+(x+1)\cdot(\mathbf{x}+\mathbf{1}) =$$

$$(1+x+1)\cdot(x+1) = (x+2)\cdot(x+1)$$

דרך ב' – הצבת מספרים

עלינו לפשט את הביטוי הנתון. מאחר שהוא נראה מסורבל למדי, נציב מספר במקום x. נציב $x=1$:

$$(x+1)+(x+1)^2 \quad\Rightarrow\quad (1+1)+(1+1)^2 = 2+2^2 = 6$$

כעת, נציב גם בתשובות $x=1$ ונחפש תשובה השווה ל-6. נשים לב שמכיוון שהשתמשנו בהצבת מספרים, עלינו לפסול 3 תשובות בטרם נוכל לסמן תשובה נכונה.

(1)	$(x+1)(x+2) \Rightarrow$ $(1+1)(1+2)=6$	$\Rightarrow$	**מתאים**
(2)	$(x+2)^2 \Rightarrow$ $(1+2)^2=9$	$\Rightarrow$	לא מתאים, התשובה נפסלת
(3)	$(x+1)^3 \Rightarrow$ $(1+1)^3=8$	$\Rightarrow$	לא מתאים, התשובה נפסלת
(4)	$(x+1)(x^2+1) \Rightarrow$ $(1+1)(1^2+1)=4$	$\Rightarrow$	לא מתאים, התשובה נפסלת

פסלנו 3 תשובות, על כן תשובה (1) נכונה.

דרך ג' – פתרון מתמטי מלא

נפשט את הביטוי הנתון ונפשט את הביטויים שבתשובות במטרה למצוא ביטויים זהים.

$$(x+1)+(x+1)^2 = x+1+x^2+1+2x = x^2+3x+2$$

כעת נפשט את הביטויים שבתשובות :

(1) $(x+1)(x+2) = x^2+x+2x+2 = x^2+3x+2$

טיפ: מכיוון שהצבנו את התשובות, ברגע שמצאנו תשובה נכונה אין צורך להמשיך לבדוק את שאר התשובות, אך למען שלמות ההסבר נפסול אותן :

(2) $(x+2)^2 = x^2+4+4x$

(3) $(x+1)^3 = (x+1)(x+1)^2 = (x+1)(x^2+1+2x) = x^3+3x^2+3x+1$

(4) $(x+1)(x^2+1) = x^3+x+x^2+1$

שימו לב, את תשובות (3) ו-(4) ניתן לפסול ברגע שמתקבל x^3 בתוצאה, מפני שבביטוי המבוקש המעלה הגבוהה ביותר היא 2.

9. תשובה (1) נכונה. שאלה 9 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – פתרון מתמטי

$$\frac{a^2b+ab^2}{2a^2+2ab}$$

נוציא גורם משותף במונה ובמכנה וננסה לצמצם כמה שיותר גורמים:

$$\frac{ab(a+b)}{2a(a+b)}=\frac{b}{2}$$

דרך ב' – הצבת מספרים

נתון כי a ו-b גדולים מ-0. לכן, ההצבה ה"מתבקשת" בשלב ראשון היא להציב בשני הנעלמים 1. עם זאת, נשים לב כי בהצבה זו התשובות אינן מובדלות זו מזו; בתשובות (1) ו-(3) התשובה יוצאת $\frac{1}{2}$, ובתשובות (2) ו-(4) התשובה יוצאת 1. לכן, ההצבה הזו אינה טובה לנו. נציב $a=1\ ,\ b=2$:

$$\frac{1\cdot2+1\cdot2^2}{2\cdot1+2\cdot1\cdot2}=\frac{6}{6}=1$$

כעת, נציב גם בתשובות $a=1\ ,\ b=2$, ונחפש תשובה השווה ל-1. נשים לב שמכיוון שהשתמשנו בהצבת מספרים במקום הנעלמים, עלינו לפסול 3 תשובות בטרם נוכל לסמן תשובה נכונה.

(1) $\frac{b}{2}=\frac{2}{2}=1$ $\Rightarrow$ **מתאים.**

(2) $\frac{a+b}{2}=\frac{1+2}{2}=\frac{3}{2}$ $\Rightarrow$ לא מתאים, התשובה נפסלת.

(3) $\frac{ab}{a+b}=\frac{1\cdot2}{1+2}=\frac{2}{3}$ $\Rightarrow$ לא מתאים, התשובה נפסלת.

(4) $\frac{a+b}{2ab}=\frac{1+2}{2\cdot1\cdot2}=\frac{3}{4}$ $\Rightarrow$ לא מתאים, התשובה נפסלת.

פסלנו 3 תשובות ועל כן תשובה (1) נכונה.

10. תשובה (2) נכונה. שאלה 10 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הצבת מספרים

עלינו לפשט את הביטוי הנתון. מאחר שהוא אינו נראה נוח לפישוט, נציב מספר נוח עבור x. למשל, $x = 1$

$$\left(\frac{x^2}{\pi x} + 2x\right) \cdot 2 \cdot (x^{-1}) \quad \Rightarrow \left(\frac{1^2}{\pi \cdot 1} + 2 \cdot 1\right) \cdot 2 \cdot (1^{-1}) = \left(\frac{1}{\pi} + 2\right) \cdot 2 = \frac{2}{\pi} + 4$$

ניתן להבחין בכך שהתשובה המתאימה היחידה היא תשובה (2). למען שלמות ההסבר, נבדוק את התשובות.

נציב בתשובות $x = 1$, ונחפש תשובה השווה ל- $\frac{2}{\pi} + 4$. נשים לב שמכיוון שהשתמשנו בהצבת מספרים, עלינו לפסול 3 תשובות בטרם נוכל לסמן תשובה נכונה.

(1) $\frac{1}{2\pi} + 1$ $\Rightarrow$ לא מתאים, התשובה נפסלת

(2) $\frac{2}{\pi} + 4$ $\Rightarrow$ **מתאים**

(3) $3x^2 \Rightarrow 3 \cdot 1^2 = 3$ $\Rightarrow$ לא מתאים, התשובה נפסלת

(4) $\frac{x}{\pi} \Rightarrow \frac{1}{\pi}$ $\Rightarrow$ לא מתאים, התשובה נפסלת

פסלנו 3 תשובות ועל כן תשובה (2) נכונה.

דרך ב' – פתרון מתמטי

נפשט את הביטוי הנתון:

$$\left(\frac{x^2}{\pi x} + 2x\right) \cdot 2 \cdot (x^{-1})$$

נצמצם x בשבר וכן נשתמש בחוקי חזקות כדי לפשט את x^{-1} :

$$\left(\frac{x^2}{\pi x} + 2x\right) \cdot 2 \cdot (x^{-1}) \quad = \quad \left(\frac{x}{\pi} + 2x\right) \cdot 2 \cdot \frac{1}{x}$$

כעת נפתח סוגריים:

$$\left(\frac{x}{\pi} + 2x\right) \cdot 2 \cdot \frac{1}{x} = \left(\frac{x}{\pi} + 2x\right) \cdot \frac{2}{x} \quad = \quad \frac{x \cdot 2}{\pi \cdot x} + \frac{2x \cdot 2}{x} \quad = \quad \frac{2}{\pi} + 4$$

11. תשובה (2) נכונה. שאלה 11 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – חישוב

כדי לחשב את ערך הביטוי, עלינו למצוא את ערכו של $\sqrt{\frac{4}{9}}$. כדי להוציא שורש לשבר עלינו להוציא שורש למונה ושורש למכנה:

$$\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}}=\frac{2}{3}$$

עתה, נוכל להציב במקום השורש את השבר $\frac{2}{3}$ ולחשב את ערך הביטוי:

$$\left(\sqrt{\frac{4}{9}}-\frac{4}{9}\right)^2=\left(\frac{2}{3}-\frac{4}{9}\right)^2=\left(\frac{6}{9}-\frac{4}{9}\right)^2=\left(\frac{2}{9}\right)^2=\frac{2^2}{9^2}=\frac{4}{81}$$

דרך ב' – כפל מקוצר

נפשט את הביטוי שלפנינו באמצעות נוסחת כפל מקוצר:

$$\left(\sqrt{\frac{4}{9}}-\frac{4}{9}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{4}{9}}\right)^2+\left(\frac{4}{9}\right)^2-2\cdot\sqrt{\frac{4}{9}}\cdot\frac{4}{9} = \frac{4}{9}+\frac{16}{81}-\frac{8}{9}\sqrt{\frac{4}{9}}$$

לפי חוקי שורשים שורש של שבר שווה לשורש המונה חלקי שורש המכנה:

$$\frac{4}{9}+\frac{16}{81}-\frac{8}{9}\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{4}{9}+\frac{16}{81}-\frac{8}{9}\cdot\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{4}{9}+\frac{16}{81}-\frac{8\cdot 2}{9\cdot 3} = \frac{4}{9}+\frac{16}{81}-\frac{16}{27}$$

ניצור מכנה משותף 81:

$$\frac{4}{9}+\frac{16}{81}-\frac{16}{27} = \frac{4\cdot 9}{81}+\frac{16}{81}-\frac{16\cdot 3}{81} = \frac{36+16-48}{81} = \frac{4}{81}$$

12. תשובה (2) נכונה. שאלה 13 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – זיהוי מספרים זהים/נגדיים

ידוע ש-x שלילי. נתמקד בביטוי $\frac{x}{|x|}$. המונה והמכנה בביטוי זה בעלי ערך מספרי זהה, אולם ייתכן שסימנם שונה. לכן, ערך הביטוי הוא 1 או 1-. מונה הביטוי הוא שלילי, מפני ש-x שלילי. המכנה חיובי, שכן ערך מוחלט של כל מספר השונה מ-0 הוא תמיד חיובי. לפיכך, השבר שלילי וערכו 1- (מדובר בחלוקה של שני מספרים נגדיים).

נציב ערך זה בביטוי המקורי:

$$1-\frac{x}{|x|}=1-(-1)=2$$

תשובה (2) נכונה.

דרך ב' – הצבת מספרים

עלינו לפשט את הביטוי הנתון כך שהוא יבוטא באמצעות x או מספרים חופשיים. נציב מספר נוח עבור x, אשר יקיים $x < 0$. למשל, $x = -1$.

$$1-\frac{x}{|x|}=1-\frac{-1}{|-1|}=1-\frac{-1}{1}=1-(-1)=2$$

כעת, נציב גם בתשובות $x = -1$, ונחפש תשובה השווה ל-2. נשים לב שמכיוון שהשתמשנו בהצבת מספרים, עלינו לפסול 3 תשובות בטרם נוכל לסמן תשובה נכונה.

(1) 0	$\Rightarrow$	לא מתאים, התשובה נפסלת
(2) 2	$\Rightarrow$	**מתאים**
(3) $\frac{1-x}{|x|} \Rightarrow \frac{1-(-1)}{|-1|}=\frac{2}{1}=2$	$\Rightarrow$	**מתאים**
(4) $|x| \Rightarrow |-1|=1$	$\Rightarrow$	לא מתאים, התשובה נפסלת

נותרו שתי תשובות מתאימות ולכן נערוך הצבה נוספת. נציב $x = -2$.

$$1-\frac{x}{|x|}=1-\frac{-2}{|-2|}=1-\frac{-2}{2}=1-(-1)=2$$

נציב גם בתשובות $x = -2$, ונחפש תשובה השווה ל-2.

(2) 2	$\Rightarrow$	**מתאים**
(3) $\frac{1-x}{|x|} \Rightarrow \frac{1-(-2)}{|-2|}=\frac{3}{2}$	$\Rightarrow$	לא מתאים, התשובה נפסלת

13. תשובה (3) נכונה. שאלה 13 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הצבת מספרים

ידוע ש- $y^2 = 9$ ולכן נציב $y = 3$. כמו כן, נתון ש-x שונה מ-0 אז נציב $x = 1$.

$$\frac{\frac{x+1}{y}-\frac{x+2}{2y}}{\frac{x\cdot y}{6}} = \frac{\frac{1+1}{3}-\frac{1+2}{2\cdot 3}}{\frac{1\cdot 3}{6}} = \frac{\frac{2}{3}-\frac{3}{6}}{\frac{3}{6}}$$

כדי לחסר בין השברים במונה, ניצור מכנה משותף:

$$\frac{\frac{2}{3}-\frac{3}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{\frac{4}{6}-\frac{3}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}}$$

ניעזר בקשתות:

$$\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

משום שהצבנו מספרים במקום הנעלמים, עלינו להציב גם בתשובות $x = 1$ ו-$y = 3$, ולחפש תשובה השווה ל- $\frac{1}{3}$.
נשים לב שמכיוון שהשתמשנו בהצבת מספרים במקום הנעלמים, עלינו לפסול 3 תשובות בטרם נוכל לסמן תשובה נכונה.

(1) $\frac{2x}{3} = \frac{2\cdot 1}{3} = \frac{2}{3}$ $\Rightarrow$ לא מתאים. התשובה נפסלת

(2) $\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ לא מתאים. התשובה נפסלת

(3) $\frac{1}{3}$ $\Rightarrow$ **מתאים**

(4) $\frac{x}{6} = \frac{1}{6}$ $\Rightarrow$ לא מתאים. התשובה נפסלת

פסלנו 3 תשובות ועל כן תשובה (3) נכונה.

דרך ב' – פתרון מתמטי

כדי לחסר בין השברים, ניצור מכנה משותף לשברים שבמונה:

$$\frac{\frac{x+1}{y}-\frac{x+2}{2y}}{\frac{x\cdot y}{6}} = \frac{\frac{2x+2}{2y}-\frac{x+2}{2y}}{\frac{x\cdot y}{6}} = \frac{\frac{2x+2-(x+2)}{2y}}{\frac{x\cdot y}{6}} = \frac{\frac{2x+2-x-2}{2y}}{\frac{x\cdot y}{6}} = \frac{\frac{x}{2y}}{\frac{x\cdot y}{6}}$$

$$\frac{\frac{x}{2y}}{\frac{x\cdot y}{6}} = \frac{6x}{x\cdot 2y^2}$$

נצמצם x מהמונה ומהמכנה:

$$\frac{6x}{x\cdot 2y^2} = \frac{6}{2y^2} = \frac{3}{y^2}$$

ידוע ש- $y^2 = 9$ ולכן:

$$\frac{3}{y^2} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

14. תשובה (1) נכונה. שאלה 14 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הצבת מספרים

על מנת להימנע מעבודה עם נעלמים, ניתן להציב מספר במקום הנעלם a. נציב a=2 בביטוי:

$$-\left(\frac{1}{2-1}\right)=-\left(\frac{1}{1}\right)=-1$$

כעת, נציב את המספר שבחרנו במקום הנעלם בתשובות ונצפה להגיע לתשובה השווה ל-(-1).

1) $\frac{1}{1-2}=\frac{1}{-1}=-1$ ⇐ **מתאים**

2) $\frac{1}{1+2}=\frac{1}{3}$ ⇐ לא מתאים. התשובה נפסלת

3) $\frac{-1}{1-2}=\frac{-1}{-1}=1$ ⇐ לא מתאים. התשובה נפסלת

4) $\frac{-1}{1+2}=\frac{-1}{3}=-\frac{1}{3}$ ⇐ לא מתאים. התשובה נפסלת

פסלנו 3 תשובות, ולכן תשובה (1) נכונה.

דרך ב' – הבנה

עלינו לפשט את הביטוי ו"להיפטר" מהסוגריים. כאשר נפתח סוגריים, המינוס צריך להשפיע או על המונה או על המכנה (אך לא על שניהם). כך, אם לדוגמה נרצה לפשט את הביטוי $-\left(\frac{1}{2}\right)$, נוכל להשוות אותו ל- $\frac{-1}{2}$ (כלומר שהמינוס ישפיע על המונה), או לחילופין להשוותו ל- $\frac{1}{-2}$ (כלומר שהמינוס ישפיע על המכנה).

מכאן, שכאשר נפתח סוגריים בביטוי הנתון, נוכל ראשית "לצרף" את המינוס למונה. הביטוי שנקבל יהיה: $\frac{-1}{a-1}$.
משום שביטוי זה אינו קיים בתשובות, ננסה את האופציה השנייה – "לצרף" את המינוס למכנה. כאשר נעשה זאת נקבל: $\frac{1}{-(a-1)}=\frac{1}{1-a}$. זהו הביטוי המופיע בתשובה (1).

15. תשובה (3) נכונה. שאלה 15 מתוך 20 בפרק.

דרך א – פתרון מתמטי

נחבר את השברים במכנה ונזהה כפל מקוצר:

$$\frac{2}{\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}} \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{\frac{x-1+x+1}{(x+1)(x-1)}}=\frac{2}{\frac{2x}{x^2-1}}$$

נחלק בשבר על ידי לכפל בהופכי ונצמצם את הגורם 2:

$$\frac{2}{\frac{2x}{x^2-1}}=2\cdot\frac{x^2-1}{2x}=\frac{x^2-1}{x}$$

כעת, נצמצם בחיבור (פעולה הפוכה של חיבור/חיסור שברים):

$$\frac{x^2-1}{x}=\frac{x^2}{x}-\frac{1}{x}=x-\frac{1}{x}$$

דרך ב' – הצבת מספרים

עלינו לפשט את הביטוי הנתון. מאחר שהוא לא נראה נוח לפישוט, נציב מספר עבור x.

נתון כי $x > 1$ ולכן נציב $x = 2$.

$$\frac{2}{\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}} \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{\frac{1}{2+1}+\frac{1}{2-1}}=\frac{2}{\frac{1}{3}+1}$$

ניצור מכנה משותף 3 במכנה:

$$\frac{2}{\frac{1}{3}+1}=\frac{2}{\frac{4}{3}}$$

חלוקה בשבר שווה לכפל בהופכי:

$$\frac{2}{\frac{4}{3}}=2\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{2}$$

כעת, נציב גם בתשובות $x = 2$, ונחפש תשובה השווה ל- $\frac{3}{2}$. נשים לב שמכיוון שהשתמשנו בהצבת מספרים, עלינו לפסול 3 תשובות בטרם נוכל לסמן תשובה נכונה.

(1) $1 \quad \Rightarrow$ לא מתאים, התשובה נפסלת

(2) $x^2-1 \;\Rightarrow\; 2^2-1=3 \quad \Rightarrow$ לא מתאים, התשובה נפסלת

(3) $x-\frac{1}{x} \;\Rightarrow\; 2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2} \quad \Rightarrow$ **מתאים**

(4) $x \;\Rightarrow\; 2 \quad \Rightarrow$ לא מתאים, התשובה נפסלת

פסלנו 3 תשובות ועל כן תשובה (3) נכונה.

16. תשובה (4) נכונה. שאלה 16 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – פתרון מתמטי

עלינו לקבוע איזה ביטוי הוא מספר קבוע שאינו תלוי ב-n. כדי לעשות זאת, נבדוק את התשובות ונחפש ביטוי שלאחר פישוטו n נעלם, כך שערך הביטוי קבוע.

<u>נבדוק את תשובה (1):</u>

$$(n-1)^2+(n+1)^2$$

נפשט לפי נוסחאות כפל מקוצר:

$$(n-1)^2+(n+1)^2=n^2+1-2n+n^2+1+2n=2n^2+2$$

הביטוי תלוי בערכו של n. התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (2):</u>

$$\frac{n+n^2}{n}$$

נפרק את המונה:

$$\frac{n+n^2}{n}=\frac{n}{n}+\frac{n^2}{n}=1+n$$

הביטוי תלוי בערכו של n. התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (3):</u>

$$\frac{n(n+4)}{4n}$$

נצמצם ב-n:

$$\frac{n(n+4)}{4n}=\frac{n+4}{4}$$

נפרק את המונה:

$$\frac{n+4}{4}=\frac{n}{4}+\frac{n}{n}=\frac{n}{4}+1$$

הביטוי תלוי בערכו של n. התשובה נפסלת.

טיפ: כיוון שפסלנו 3 תשובות, ניתן לסמן את תשובה (4) מבלי לבדוק אותה. למען שלמות ההסבר, נבדוק את נכונותה:

<u>נבדוק את תשובה (4):</u>

$$\frac{(n-1)^2-(n+1)^2}{n}$$

נפשט לפי נוסחאות כפל מקוצר:

$$\frac{(n-1)^2-(n+1)^2}{n}=\frac{n^2+1-2n-(n^2+1+2n)}{n}$$

נפתח סוגריים:

$$\frac{n^2+1-2n-(n^2+1+2n)}{n}=\frac{n^2+1-2n-n^2-1-2n}{n}=\frac{-4n}{n}$$

נצמצם ב-n:

$$\frac{-4n}{n}=-4$$

הביטוי בעל ערך קבוע ואינו תלוי בערכו של n. **תשובה נכונה.**

דרך ב' – הצבת מספרים

אנו מתבקשים למצוא ביטוי שערכו הוא מספר קבוע שאינו תלוי ב-n. משמעות הדבר היא שעבור כל n שנציב, התוצאה תהיה זהה, שכן n לא משפיע על ערך הביטוי. אם התוצאה המתקבלת בהצבות אינה זהה, הביטוי אכן תלוי בערך של n (ומשתנה בהתאם לערכו).

שימו לב, אם התוצאה תהיה זהה בשתי הצבות, אין משמעות הדבר שהביטוי בהכרח לא תלוי ב-n. אם למשל נציב $n = 1$ ו- $n = -1$ בביטוי n^2 , התוצאה תהיה זהה. לעומת זאת, אם מצאנו כי עבור שני ערכים שונים של n התוצאה <u>שונה</u>, בהכרח ניתן לפסול את התשובה (שכן במקרה זה הביטוי דווקא כן מושפע מערכו של n ולכן אינו קבוע). לכן, עלינו לפסול 3 תשובות בטרם נוכל לסמן תשובה נכונה.

<u>נבדוק את תשובה (1):</u>

נציב $n = 1$:

$$(1-1)^2+(1+1)^2=0^2+2^2=4$$

נציב $n = 2$:

$$(2-1)^2+(2+1)^2=1^2+3^2=10$$

הערכים שונים ולכן הביטוי תלוי ב-n. התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (2):</u>

נציב $n = 1$:

$$\frac{1+1^2}{1}=\frac{2}{1}=2$$

נציב $n = 2$:

$$\frac{2+2^2}{2}=\frac{6}{2}=3$$

הערכים שונים ולכן הביטוי תלוי ב-n. התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (3):</u>

נציב $n = 1$:

$$\frac{1\cdot(1+4)}{4\cdot 1}=\frac{1\cdot 5}{4}=\frac{5}{4}$$

נציב $n = 2$:

$$\frac{2\cdot(2+4)}{4\cdot 2}=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$$

הערכים שונים ולכן הביטוי תלוי ב-n. התשובה נפסלת.

טיפ: כיוון שפסלנו 3 תשובות, ניתן לסמן את תשובה (4) מבלי לבדוק אותה. למען שלמות ההסבר, נבדוק את נכונותה:

<u>נבדוק את תשובה (4):</u>

נציב $n = 1$:

$$\frac{(1-1)^2-(1+1)^2}{1}=\frac{0^2-2^2}{1}=-4$$

נציב $n = 2$:

$$\frac{(2-1)^2-(2+1)^2}{2}=\frac{1^2-3^2}{2}=\frac{-8}{2}=-4$$

עבור כל ערך של n שנציב, התוצאה תהיה 4-, שכן הביטוי לא תלוי בערכו של n. **תשובה נכונה.**

17. תשובה (1) נכונה. שאלה 16 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הצבת מספרים

נתון כי $a^2 - b^2 \neq 0$. נציב: $a = 2,\ b = 1$ בביטוי ונחשב את ערכו (נעדיף להציב ב-a את המספר הגדול יותר בכדי להימנע מגורמים שליליים בביטוי):

$$\frac{(a^3 + a^2b)(a-b)^2}{a^2 - b^2} = \frac{(2^3 + 2^2 \cdot 1)(2-1)^2}{2^2 - 1^2} = \frac{(8+4)\cdot 1}{4-1} = \frac{12}{3} = 4$$

כעת, נציב גם בתשובות $a = 2,\ b = 1$, ונחפש תשובה השווה ל-4. נשים לב שמכיוון שהשתמשנו בהצבת מספרים במקום הנעלמים, עלינו לפסול 3 תשובות בטרם נוכל לסמן תשובה נכונה.

(1) $a^3 - a^2b = 2^3 - 2^2 \cdot 1 = 8 - 4 = 4 \quad \Rightarrow$ **מתאים.**

(2) $a^3 + ab^2 = 2^3 + 2 \cdot 1^2 = 8 + 2 = 10 \quad \Rightarrow$ התשובה נפסלת.

(3) $\frac{a^3 - b}{a - b} = \frac{2^3 - 1}{2 - 1} = \frac{8-1}{1} = 7 \quad \Rightarrow$ התשובה נפסלת.

(4) $a^3 + a^2b = 2^3 + 2^2 \cdot 1 = 12 \quad \Rightarrow$ התשובה נפסלת.

פסלנו 3 תשובות, ועל כן תשובה (1) נכונה.

דרך ב' – פתרון מתמטי

$$\frac{(a^3 + a^2b)(a-b)^2}{a^2 - b^2}$$

נתחיל בהוצאת גורם משותף a^2 מהסוגריים הראשונים במונה:

$$\frac{\mathbf{a^2(a+b)}(a-b)^2}{a^2 - b^2}$$

נכנס את הביטוי במכנה לפי נוסחת כפל מקוצר שלישית:

$$\frac{a^2(a+b)(a-b)^2}{\mathbf{(a-b)(a+b)}}$$

כעת נשים לב שניתן לצמצם $(a-b)(a+b)$:

$$\frac{a^2\cancel{(a+b)}(a-b)^{\cancel{2}}}{\cancel{(a-b)(a+b)}} = a^2(a-b) = a^3 - a^2b$$

---

18. תשובה (3) נכונה. שאלה 17 מתוך 20 בפרק.

$$\mathbf{2 \cdot 6} \cdot 19 \cdot 25 - \mathbf{3 \cdot 4} \cdot 18 \cdot 25 = 12 \cdot 19 \cdot 25 - 12 \cdot 18 \cdot 25$$

נזהה גורמים משותפים ונוציא אותם מחוץ לסוגריים:

$$12 \cdot 19 \cdot 25 - 12 \cdot 18 \cdot 25 = 12 \cdot 25\,(19 - 18)$$

$$12 \cdot 25\,(19 - 18) = 12 \cdot 25 \cdot 1 = 300$$

---

19. תשובה (1) נכונה. שאלה 18 מתוך 20 בפרק.

עלינו לפשט את השבר הבא:

$$\cfrac{1}{\cfrac{2}{\cfrac{3}{4}}}$$

נבין שכל קו חילוק הוא כמו סוגריים וניתן לתרגם את התרגיל באופן הבא: 1:[2: (3:4)]
לכן נתחיל מחלוקת השברים במכנה (סדר פעולות חשבון):

$$\cfrac{2}{\cfrac{3}{4}}$$

חלוקה בשבר שווה לכפל בהופכי:

$$2:\frac{3}{4}=2\cdot\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$$

מצאנו את ערכו של מכנה השבר. כאמור, חלוקה בשבר שווה לכפל בהופכי ולכן:

$$1:\frac{8}{3}=1\cdot\frac{3}{8}=\frac{3}{8}$$

.20 תשובה (1) נכונה. שאלה 20 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הצבת מספרים

מאחר שהביטוי מורכב למדי, נציב מספרים במקום נעלמים ונבדוק מה ערכו. נציב: $a = 1$, $b = 1$.

$$\frac{a^2+b^2+(a+b)^2}{2ab}-1 \;\Rightarrow\; \frac{1^2+1^2+(1+1)^2}{2\cdot1\cdot1}-1=\frac{1+1+(2)^2}{2}-1=\frac{6}{2}-1=\mathbf{2}$$

כעת, נציב גם בתשובות $a = 1$, $b = 1$, ונחפש תשובה השווה ל-2. נשים לב שמכיוון שהשתמשנו בהצבת מספרים במקום הנעלמים, עלינו לפסול 3 תשובות בטרם נוכל לסמן תשובה נכונה.

(1) $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \Rightarrow \frac{1}{1}+\frac{1}{1} = 2 \quad\Rightarrow$ **מתאים**

(2) $\frac{a}{2b}+\frac{b}{2a} \Rightarrow \frac{1}{2\cdot1}+\frac{1}{2\cdot1} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1 \quad\Rightarrow$ לא מתאים, התשובה נפסלת

(3) $\frac{(a+b)(a-b)}{ab} \Rightarrow \frac{(1+1)(1-1)}{1\cdot1} = \frac{2\cdot0}{1} = 0 \quad\Rightarrow$ לא מתאים, התשובה נפסלת

(4) $2(a^2+b^2) \Rightarrow 2(1^2+1^2) = 2(1+1) = 4 \quad\Rightarrow$ לא מתאים, התשובה נפסלת

פסלנו 3 תשובות ועל כן תשובה (1) נכונה.

דרך ב' – פתרון מתמטי

נפשט את הביטוי במטרה לדמות אותו לביטויים שבתשובות. ראשית, נפתח את הסוגריים לפי נוסחת כפל מקוצר:

$$\frac{a^2+b^2+(\mathbf{a}+\mathbf{b})^2}{2ab}-1=\frac{a^2+b^2+\mathbf{a^2}+\mathbf{2ab}+\mathbf{b^2}}{2ab}-1$$

נכנס איברים דומים:

$$\frac{a^2+b^2+a^2+2ab+b^2}{2ab}-1=\frac{2a^2+2b^2+2ab}{2ab}-1$$

נוציא גורם משותף 2:

$$\frac{2a^2+2b^2+2ab}{2ab}-1=\frac{2(a^2+b^2+ab)}{2ab}-1$$

נצמצם את השבר ב-2:

$$\frac{2(a^2+b^2+ab)}{2ab}-1=\frac{a^2+b^2+ab}{ab}-1$$

מאחר שבתשובות המספר 1 אינו מופיע, ניצור מכנה משותף ab כדי לאחד בינו לבין השבר הקיים:

$$\frac{a^2+b^2+ab}{ab}-1=\frac{a^2+b^2+ab}{ab}-\frac{ab}{ab}=\frac{a^2+b^2}{ab}$$

כאשר יש חיסור של שברים עם אותו מכנה, עלינו לחסר מונים:

$$\frac{a^2+b^2+ab}{ab}-\frac{ab}{ab}=\frac{a^2+b^2+\mathbf{ab}-\mathbf{ab}}{ab}=\frac{a^2+b^2}{ab}$$

הביטוי שאליו הגענו אינו מופיע בתשובות, ועל כן נמשיך לפשט אותו. כעת, נפצל את השבר:

$$\frac{a^2+b^2}{ab}=\frac{a^2}{ab}+\frac{b^2}{ab}$$

נצמצם את השבר השמאלי ב-a ואת השבר הימני ב-b:

$$\frac{a^2}{ab}+\frac{b^2}{ab}=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$$

משוואות - יסודות

משוואה בודדת

משוואה מייצגת זהות בין שני ערכים/ביטויים אלגבריים, המופרדים באמצעות סימן השוויון $(=)$.

בידוד משתנה

כאשר משוואה מכילה נעלמים, על מנת לפתור אותה (למצוא את ערך המשתנה) עלינו לבודד את הנעלם באחד הצדדים של המשוואה. על מנת לעשות זאת אנו יכולים לבצע פעולות חשבון שונות, ובלבד שנבצע אותן על שני האגפים של המשוואה:

$2x - 5 = 3 \qquad /+5$

$2x = 8 \qquad /:2$

$x = 4$

אין סוף פתרונות

כאשר פיתוח המשוואה מביא למצב בו אותו ביטוי בדיוק מופיע בשני האגפים מדובר במשוואה בעלת אינסוף פתרונות:

$$2x^2 + 6 = 2(x^2 + 3) \quad \Rightarrow \quad 2x^2 - 6 = 2x^2 - 6$$

במצב זה, לא משנה מה נציב במקום x, המשוואה תמיד תתקיים, ולכן x יכול להיות כל מספר - זאת אומרת שיש אינסוף פתרונות למשוואה.

אין פתרון

כאשר פיתוח המשוואה מביא לסתירה בין שני אגפי המשוואה, אין לה פתרון:

$$4x - 5 = 2x + 2(x - 3) \quad \Rightarrow \quad 4x - 5 = 2x + 2x - 6 \quad \Rightarrow$$
$$4x - 5 = 4x - 6 \quad \Rightarrow \quad -5 = -6$$

(-5) לעולם לא יהיה שווה ל- (-6), ולכן אין פתרון למשוואה (אין אף ערך של x שמקיים את המשוואה).

משוואה עם שברים

כאשר נתון שוויון בין שני שברים, יש למצוא מכנה משותף לשברים, ואז להיפטר מהמכנה. הדרך הנוחה ביותר לעשות זאת היא פשוט לכפול באלכסון.

דוגמה:

נתון: $\frac{1}{x-1} = \frac{2}{x-2} \quad , \quad (x \neq 1 \quad , \quad x \neq 2)$

$x = ?$

(1) 1   (2) 2   (3) 3   (4) 0

פתרון -

$$\frac{2}{x-2} = \frac{1}{x-1} \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot (x-1) = 1 \cdot (x-2) \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

תרגול - משוואה בודדת

1. $3x + 5 = 2$

$x = ?$

(1) 1 (2) 2 (3) -1 (4) -2

---

2. $3(2 - x) = 2(x - 2)$

$x = ?$

(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 0

---

3. $\frac{3(x - 2)}{5} = 3$

$x = ?$

(1) 5 (2) 2 (3) 3 (4) 7

---

4. $\frac{6x + 9}{3} = \frac{4x + 6}{2}$

$x = ?$

(1) 0 (2) 2 (3) 3 (4) x יכול להיות כל מספר

---

5. $\frac{3(x+2)}{2} = 1\frac{1}{2}x + 2$

$x = ?$

(1) 0 (2) 2 (3) $-\frac{4}{3}$ (4) איו x המקיים משוואה זו

תשובות

שאלה	1	2	3	4	5
תשובה	3	2	4	4	4

.1 תשובה (3) נכונה

$3x + 5 = 2 \qquad / -5$

$3x = -3 \qquad /:3$

$x = -1$

.2 תשובה (2) נכונה

$3(2 - x) = 2(x - 2)$

$6 - 3x = 2x - 4 \qquad / + 3x + 4$

$10 = 5x \qquad /:5$

$2 = x$

.3 תשובה (4) נכונה

$\frac{3(x-2)}{5} = 3 \qquad / \cdot 5$

$3(x-2) = 15 \qquad /:3$

$x - 2 = 5 \qquad /+2$

$x = 7$

.4 תשובה (4) נכונה

$\frac{6x+9}{3} = \frac{4x+6}{2} \qquad / \cdot 6$

$2(6x+9) = 3(4x+6)$

$12x + 18 = 12x + 18$

$0 = 0$

פסוק אמת – x יכול להיות כל מספר (אינסוף פתרונות).

---

5. תשובה (4) נכונה

$$\frac{3(x+2)}{2}=1\frac{1}{2}x+2$$

$$\frac{3(x+2)}{2}=\frac{3}{2}x+2$$

ניצור מכנה משותף 2:

$$3(x+2)=3x+4$$

$$3x+6=3x+4 \qquad /-3x$$

$$6=4$$

פסוק שקר – אין x המקיים משוואה זו.

מערכת משוואות

לעיתים מופיעות בבחינה מספר משוואות עם מספר נעלמים.

בידוד והצבה

דרך אחת היא לבודד את אחד הנעלמים במשוואה אחת ולהציבו בשנייה. מומלץ לבודד את הנעלם שלא נידרש לחשבו בשאלה.

דוגמה:

נתון : $6x + 3y = 27 \quad ; \quad x + y = 5$

$x = ?$

(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4

פתרון -

נבודד את y במשוואה השנייה:

$$x + y = 5 \quad \Rightarrow \quad y = 5 - x$$

כעת נציב את ערכו של y במשוואה הראשונה ונמצא את ערכו של x:

$$6x + 3y = 27 \quad \Rightarrow \quad 6x + 3(5 - x) = 27$$
$$6x + 15 - 3x = 27 \quad \Rightarrow \quad 3x = 12 \quad \Rightarrow \quad x = 4$$

חיבור/חיסור משוואות

לרוב, מהיר יותר לחבר או לחסר את המשוואות ולגרום לאחד הנעלמים להתבטל. לעיתים עלינו להרחיב את אחת המשוואות על מנת להשוות את המקדמים של הנעלם שברצוננו לבטל.

דוגמה:

נתון : $2x + 3y = 33 \quad ; \quad 3x + y = 25$

$x = ?$

פתרון - נרחיב את המשוואה השמאלית פי 3 על מנת להשוות מקדמים ל-y, ונחסר את המשוואות:

$$\begin{array}{l} 9x + 3y = 75 \\ - \ \underline{2x + 3y = 33} \\ 7x \qquad = 42 \quad \Rightarrow \quad x = 6 \end{array}$$

תרגול - מערכת משוואות

.1

$2x + 3y = -1$
$x = -2$

$y = ?$

(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4

.2

$2x + y = 17$
$x + y = 10$

$x = ?$

(1) 5 (2) 6 (3) 7 (4) 4

.3

$3x - 3y = 0$
$x + 3y = 4$

$x = ?$

(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4

.4

$x + y = 22$
$x - y = 8$

$y = ?$

(1) 5 (2) 6 (3) 7 (4) 4

.5

$2(x + 3) - y = 12 + y$
$x + y = -1$

$x = ?$

(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4

תשובות

שאלה	1	2	3	4	5
תשובה	1	3	1	3	1

1. תשובה (1) נכונה

$2x + 3y = -1$

$x = -2$

נציב את x במשוואה הראשונה:

$2 \cdot (-2) + 3y = -1$

$-4 + 3y = -1$

$3y = 3$

$y = 1$

---

2. תשובה (3) נכונה

נחסר את המשוואה השנייה מהמשוואה הראשונה:

$2x + y = 17$
$\underline{x + y = 10}$

$2x - x + y - y = 17 - 10 \quad \Rightarrow \quad x = 7$

---

3. תשובה (1) נכונה

נחבר את שתי המשוואות:

$3x - 3y = 0$
$\underline{x + 3y = 4}$

$3x + x - 3y + 3y = 0 + 4 \quad \Rightarrow \quad 4x = 4 \quad \Rightarrow \quad x = 1$

---

4. תשובה (3) נכונה

נחבר את שתי המשוואות:

$$\begin{array}{l} x + y = 22 \\ \underline{x - y = 8} \end{array}$$

$$x + x + y - y = 22 + 8 \quad \Rightarrow \quad 2x = 30 \quad \Rightarrow \quad x = 15$$

נתבקשנו למצוא את y, נציב את x במשוואה הראשונה:

$$x + y = 22$$

$$15 + y = 22$$

$$y = 7$$

---

5. תשובה (1) נכונה

נפתח את הסוגריים במשוואה הראשונה, ו"נסדר" אותה מעט:

$$2(x + 3) - y = 12 + y$$

$$2x + 6 - y = 12 + y \quad / -y - 6$$

$$2x - 2y = 6 \qquad /:2$$

$$x - y = 3$$

נחבר את שתי המשוואות:

$$\begin{array}{l} x - y = 3 \\ \underline{x + y = -1} \end{array}$$

$$x + x - y + y = 3 + (-1) \quad \Rightarrow \quad 2x = 2 \quad \Rightarrow \quad x = 1$$

תרגול מסכם יסודות

.1 $2x - 7 = x + 2$

$x = ?$

(1) 9 (2) -2.5 (3) -5 (4) 4.5

.2 $2(x - 9) = 10$

$x = ?$

(1) 0.5 (2) 9 (3) 14 (4) -4

.3 $\frac{x + 2}{3} = 6$

$x = ?$

(1) 10 (2) 12 (3) 16 (4) 18

.4 $\frac{2x + 2}{2} = 5$

$x = ?$

(1) 10 (2) 8 (3) 6 (4) 4

.5 $\frac{6x + 3}{5} - \frac{x + 1}{3} = \frac{2x + 16}{10}$

$x = ?$

(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4

.6 $3x + y = 31$
$y = 10$

$x = ?$

(1) 7 (2) 6 (3) 5 (4) 4

.7

$x + 3y = 10$
$3x = 12$

$y = ?$

(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4

.8

$2x + y = 19$
$x - y = 2$

$x = ?$

(1) 7 (2) 6 (3) 5 (4) 4

.9

$x + 3y = 7$
$x + y = 3$

$y = ?$

(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4

.10

$x + y = 14$
$x - y = 8$

$x = ?$

(1) 11 (2) 12 (3) 13 (4) 10

.11

$3x + 2y = 16$
$5x - y = 5$

$x = ?$

(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4

.12
$$3x + 2y = 9$$
$$2x + 4y = 14$$

$x = ?$

(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4

.13
$$5x + 2y = 14$$
$$2x - 3y = 17$$

$x = ?$

(1) 5 (2) 6 (3) 3 (4) 4

.14 נתון: $\dfrac{\frac{1}{x}}{2} = 7$

$x = ?$

(1) $\frac{1}{14}$ (2) $\frac{1}{9}$ (3) $\frac{2}{7}$ (4) $\frac{7}{9}$

.15 נתון: $0 < x , y$

$x \cdot y = 16$

$\frac{x}{y} = 4$

$x + y = ?$

(1) 10 (2) 12 (3) 14 (4) 16

.16 נתון: $\frac{1}{x+2} = \frac{2}{x+1}$ $(x \neq -1 \quad , \quad x \neq -2)$

$x = ?$

(1) 1

(2) $\frac{1}{2}$

(3) -3

(4) 0

---

17. נתון: $x^2 = 3y$

y גדול פי 2 מ-x

$x \neq 0$

$x = ?$

(1) 6

(2) 12

(3) 3

(4) 4

---

18. כמה פתרונות אפשריים יש למשוואה $10x = x$?

(1) אחד

(2) שניים

(3) עשרה

(4) למשוואה אין שום פתרון

---

19. נתון: $(m+1)(n+1) = 3$

$m \cdot n = -2$

$m + n = ?$

(1) -1 (2) -5 (3) 6 (4) 4

---

20. נתון: $\frac{(x-1)-(1-x)}{1+x} = 1$ $(x \neq -1)$

$x = ?$

(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4

תשובות

שאלה	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
תשובה	1	3	3	4	2	1	2	1	2	1

שאלה	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
תשובה	2	1	4	1	1	3	1	1	4	3

1. תשובה (1) נכונה

$2x - 7 = x + 2 \qquad / - x + 7$

$x = 9$

---

2. תשובה (3) נכונה

$2(x - 9) = 10 \qquad / :2$

$x - 9 = 5 \qquad / + 9$

$x = 14$

---

3. תשובה (3) נכונה

$\frac{x+2}{3} = 6 \qquad /\cdot 3$

$x + 2 = 18 \qquad /-2$

$x = 16$

---

4. תשובה (4) נכונה

$\frac{2x+2}{2} = 5 \qquad /\cdot 2$

$2x + 2 = 10 \qquad /-2$

$2x = 8 \qquad /:2$

$x = 4$

---

5. תשובה (2) נכונה

$$\frac{6x+3}{5}-\frac{x+1}{3}=\frac{2x+16}{10} \qquad /\cdot 30$$

$$6(6x+3)-10(x+1)=3(2x+16)$$

$$36x+18-10x-10=6x+48$$

$$26x+8=6x+48 \qquad /-8-6x$$

$$20x=40 \qquad /:20$$

$$x=2$$

---

6. תשובה (1) נכונה

$$3x+y=31$$
$$y=10$$

נציב את y במשוואה הראשונה :

$$3x+10=31 \qquad /-10$$

$$3x=21 \qquad /:3$$

$$x=7$$

---

7. תשובה (2) נכונה

$$x+3y=10$$
$$3x=12$$

נחלק את המשוואה השנייה ב-3, ונציב את x במשוואה הראשונה :

$$3x=12 \qquad \Rightarrow \qquad x=4$$

$$4+3y=10 \qquad /-4$$

$$3y=6 \qquad /:3$$

$$y=2$$

---

8. תשובה (1) נכונה

נחבר את שתי המשוואות :

$$2x+y=19$$
$$\underline{x-y=2}$$

$$2x+x+y-y=19+2 \qquad \Rightarrow \qquad 3x=21 \qquad \Rightarrow \qquad x=7$$

.9 תשובה (2) נכונה

נחסר את המשוואה השנייה מהמשוואה הראשונה:

$$x + 3y = 7$$
$$\underline{x + y = 3}$$

$$x - x + 3y - y = 7 - 3 \quad \Rightarrow \quad 2y = 4 \quad \Rightarrow \quad y = 2$$

.10 תשובה (1) נכונה

נחבר את שתי המשוואות:

$$x + y = 14$$
$$\underline{x - y = 8}$$

$$x + x + y - y = 14 + 8 \quad \Rightarrow \quad 2x = 22 \quad \Rightarrow \quad x = 11$$

.11 תשובה (2) נכונה

דרך א' – חיבור משוואות

נכפול את המשוואה השנייה ב-2 ונחבר את המשוואות:

$$3x + 2y = 16$$
$$\underline{10x - 2y = 10}$$

$$3x + 10x + 2y - 2y = 16 + 10 \quad \Rightarrow \quad 13x = 26 \quad \Rightarrow \quad x = 2$$

דרך ב' – הצבת נעלם

עלינו למצוא את ערכו של x. לשם כך, נשאף להיפטר מהנעלם y. נבודד את y במשוואה השנייה:

$$5x - y = 5 \quad \Rightarrow \quad 5x - 5 = y$$

נציב את y במשוואה הראשונה:

$$3x + 2(5x - 5) = 16$$

$$3x + 10x - 10 = 16 \quad /+10$$

$$13x = 26 \quad /:13$$

$$x = 2$$

---

12. תשובה (1) נכונה

עלינו למצוא את ערכו של x. לשם כך, נשאף להיפטר מהנעלם y. נחלק את המשוואה השנייה ב-2:

$$2x+4y=14 \quad\Rightarrow\quad x+2y=7$$

נחסר את המשוואות:

$$\begin{array}{l} 3x+2y=9 \\ \underline{x+2y=7\qquad\qquad} \end{array}$$

$$3x-x+2y-2y=9-7 \quad\Rightarrow\quad 2x=2 \quad\Rightarrow\quad x=1$$

---

13. תשובה (4) נכונה

עלינו למצוא את ערכו של x. לשם כך, נשאף להיפטר מהנעלם y. נכפול את המשוואה הראשונה ב-3 ואת המשוואה השנייה ב-2:

$$\begin{array}{lcl} 5x+2y=14 & \Rightarrow & 15x+6y=42 \\ 2x-3y=17 & \Rightarrow & 4x-6y=34 \end{array}$$

נחבר את המשוואות:

$$\begin{array}{l} 15x+6y=42 \\ \underline{4x-6y=34\qquad\qquad} \end{array}$$

$$15x+4x+6y-6y=42+34 \quad\Rightarrow\quad 19x=76 \quad\Rightarrow\quad x=4$$

---

14. תשובה (1) נכונה. שאלה 1 מתוך 20 בפרק.

$$\frac{\frac{1}{x}}{2}=7$$

ראשית, ניצור מכנה משותף על מנת להיפטר מה-2 במכנה, ונקבל:

$$\frac{1}{x}=14$$

כעת, ניצור מכנה משותף בשנית, על מנת להיפטר מה-x במכנה:

$$1=14\cdot x$$

נחלק ב-14:

$$\frac{1}{14}=x$$

---

15. תשובה (1) נכונה. שאלה 1 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הברקה

נתון שמכפלת המספרים היא 16 וחלוקתם היא 4, ננסה לחשוב על שני מספרים שמקיימים תנאים אלו ודי מהר נגיע ל-8 ו-2. ולכן סכום שווה 10. תשובה (1) נכונה.

דרך ב' – בידוד משתנה

נבודד את x במשוואה השנייה:

$$\frac{x}{y}=4 \quad /\cdot y \quad \Rightarrow \quad x=4y$$

כעת, נציב $x=4y$ במשוואה הראשונה:

$$x\cdot y=16$$
$$4y\cdot y=16$$
$$4y^2=16 \qquad /:4$$
$$y^2=4$$
$$y=\pm 2$$

כיוון שנתון ש-x ו-y חיוביים, ולכן $y=2$.

נציב $y=2$ באחת המשוואות על מנת למצוא את x:

$$x=4y=4\cdot 2=8$$

נחשב את הביטוי המבוקש:

$$x+y=8+2=10$$

דרך ג' – כפל משוואות

ניתן לשים לב שאם נכפול את שתי המשוואות נוכל להיפטר מ-y.

$$\begin{cases} x\cdot y=16 \\ \frac{x}{y}=4 \end{cases}$$

$$x\cdot y\cdot\frac{x}{y}=4\cdot 16$$

נצמצם y ונקבל:

$$x^2=64$$
$$x=\pm 8$$

כיוון שנתון ש-x ו-y חיוביים, $x=8$. נציב $x=8$ באחת המשוואות על מנת למצוא את y:

$$x\cdot y=16 \quad \Rightarrow \quad 8\cdot y=16 \quad \Rightarrow \quad y=2$$

נחשב את הביטוי המבוקש:

$$x+y=8+2=10$$

16. תשובה (3) נכונה. שאלה 2 מתוך 20 בפרק.

$$\frac{1}{x+2}=\frac{2}{x+1}$$

נבצע כפל בהצלבה:

$$x+1=2\cdot(x+2)$$

נפתח סוגריים:

$$x+1=2x+4$$

נסדר אגפים:

$$-3=x$$

---

17. תשובה (1) נכונה. שאלה 3 מתוך 20 בפרק.

עלינו למצוא את ערכו של x, ולפנינו שתי משוואות עם שני נעלמים. האחת מוצגת באופן אלגברי והשנייה באופן מילולי. נתון כי y גדול פי 2 מ-x. נכתוב קשר זה באמצעות משוואה:

$$y = 2x$$

מאחר שאנו מעוניינים למצוא את ערכו של x, נציב את y שמצאנו במשוואה הראשונה:

$$x^2=3y \;\;\Rightarrow\;\; x^2=3\cdot(2x)$$
$$x^2=6x$$

נצמצם ב-x:

$$x=6$$

---

18. תשובה (1) נכונה. שאלה 5 מתוך 20 בפרק.

נסדר את המשוואה על ידי העברת אגפים:

$$10x = x$$
$$9x = 0$$

נחלק ב-9:

$$x = 0$$

המשוואה מתקיימת כאשר $x = 0$, ולכן יש למשוואה פתרון אחד. תשובה (1) נכונה.

---

19. תשובה (4) נכונה. שאלה 8 מתוך 20 בפרק.

בשאלה זו עלינו למצוא את ערכו של הביטוי $m + n$ בעזרת שתי המשוואות הנתונות. תחילה, נפשט את המשוואה הראשונה:

$$(m + 1)(n + 1) = 3$$

נפתח את הסוגריים:

$$m\cdot n+m+n+1=3$$

נסדר אגפים:

$$m\cdot n+m+n=2$$

כעת, אנו יכולים להציב 2- במקום $m \cdot n$ (לפי המשוואה השנייה):

$$-2+m+n=2$$

נסדר אגפים:

$$m+n=4$$

---

20. תשובה (3) נכונה. שאלה 10 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – פתרון מתמטי

$$\frac{(x-1)-(1-x)}{1+x}=1$$

נפתח סוגריים במונה:

$$\frac{x-1-1+x}{1+x}=1$$

$$\frac{2x-2}{1+x}=1$$

ניצור מכנה משותף:

$$2x-2=1+x$$

נסדר אגפים:

$$x=3$$

דרך ב' – הצבת התשובות

עלינו למצוא את ערך x. ניתן להציב את התשובות ולחפש תשובה מתאימה אשר מקיימת את המשוואה.

(1) $\frac{(1-1)-(1-1)}{1+1}\overset{?}{=}1 \Rightarrow \frac{0}{2}\neq 1 \Rightarrow$ לא מתאים, התשובה נפסלת

(2) $\frac{(2-1)-(1-2)}{1+2}\overset{?}{=}1 \Rightarrow \frac{2}{3}\neq 1 \Rightarrow$ לא מתאים, התשובה נפסלת

(3) $\frac{(3-1)-(1-3)}{1+3}\overset{?}{=}1 \Rightarrow \frac{4}{4}=1 \Rightarrow$ **מתאים**

טיפ: מכיוון שהצבנו את התשובות, ברגע שמצאנו תשובה נכונה אין צורך להמשיך לבדוק את שאר התשובות, אך למען שלמות ההסבר נפסול את תשובה (4):

(4) $\frac{(4-1)-(1-4)}{1+4}\overset{?}{=}1 \Rightarrow \frac{6}{5}\neq 1 \Rightarrow$ לא מתאים, התשובה נפסלת

משוואות

טכניקות מתקדמות

צמצום בנעלם

כאשר אנו מעוניינים לצמצם שני אגפים של משוואה בנעלם, עלינו לוודא שהנעלם אינו שווה ל-0 (אחרת, זה כאילו חילקנו ב-0, ואסור לחלק ב-0...).

דוגמה:

נתון: $x^3 = x^2 \cdot y$

$y = ?$

(1) x
(2) x^2
(3) 0
(4) אי אפשר לדעת מהנתונים

פתרון -

מכיוון שאנו לא יודעים אם x שווה ל-0, אסור לנו לצמצם את המשוואה ב- x^2, ולכן לא ניתן לדעת מה ערכו של y.
תשובה (4) נכונה.
ניתן לראות זאת גם על ידי הצבת מספרים:
נציב: $x = 2$ ונקבל $y = 2$
נציב: $x = 0$ ונקבל משוואה שנכונה עבור כל y.

משוואה ממעלה שנייה ומעלה

בפתרון משוואות ממעלה שנייה ומעלה נוציא גורם משותף על מנת להגיע למכפלה השווה ל-0. כאשר מכפלה של מספר איברים שווה לאפס, ניתן להסיק כי לפחות אחד מהאיברים שווה לאפס.

דוגמה:

$x^4 - 4x^2 = 0$

מספר הפתרונות של המשוואה הוא -

(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4

פתרון -

נוציא גורם משותף:

$$x^2 \cdot (x^2 - 4) = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \text{או} \quad x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$$

הוצאת שורש זוגי

בהוצאת שורש זוגי מתקבלים שני פתרונות.

דוגמה:

נתון: $x < 0$

$(x-7)^2 = 25$

כמה ערכים **שונים** יכול x לקבל?

(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 0

פתרון -

נוציא שורש משני אגפי המשוואה:

$$\sqrt{(x-7)^2} = \sqrt{25} \quad \Rightarrow \quad x-7 = \pm 5$$

1) $x - 7 = 5 \quad \Rightarrow \quad x = 12$

2) $x - 7 = -5 \quad \Rightarrow \quad x = 2$

בשני המקרים קיבלנו x חיובי. מכיוון שנתון כי x הוא שלילי, אין אף x שמקיים את המשוואה ותשובה (4) נכונה.

הצבה בנוסחה

בשאלות אלו אנו מקבלים מספר משוואות שהן חלק מתוך משוואת כפל מקוצר. עלינו למצוא את המשוואה הרלוונטית, להציב בה את המשוואות הנתונות, ולמצוא את הביטוי המבוקש.

דוגמה:

נתון: $x^2 + y^2 = 106 \quad ; \quad x - y = 4$

$x \cdot y = ?$

(1) 15 (2) 24 (3) 30 (4) 45

פתרון -

נציב את הביטויים הנתונים לנו בנוסחה המתאימה:

$$\underbrace{(x-y)^2}_{4^2} = \underbrace{x^2+y^2}_{106} - \underbrace{2xy}_{2xy}$$

$$2xy = 106 - 16 \quad \Rightarrow \quad 2xy = 90 \quad \Rightarrow \quad xy = 45$$

שימו לב! אין צורך לחשב את ערכם של x ושל y בנפרד.

חישוב ביטוי

בחלק מהשאלות נתבקש לחשב ערך של ביטוי מסוים. בשאלות אלו אין צורך לחשב את הערך של כל נעלם בנפרד, אלא לחשב ישירות את הביטוי המבוקש (באמצעות חיבור, חיסור או חלוקת משוואות).

דוגמה:

נתון: $5x+3y=11$; $2x+4y=17$

$x+y=?$

(1) 10 (2) 12 (3) 8 (4) 4

פתרון -

בשאלה זו אנו יכולים למצוא את ערכו של x או של y על ידי השוואת מקדמים וחיסור משוואות, אולם מהיר יותר לחבר את המשוואות ולחשב ישירות את הביטוי המבוקש:

$$\begin{array}{l} 2x+4y=17 \\ + \underline{5x+3y=11} \\ 7x+7y=28 \quad \Rightarrow \quad 7(x+y)=28 \quad \Rightarrow \quad x+y=4 \end{array}$$

הצבת משוואות

כאשר נתונות לנו מספר משוואות עם מספר נעלמים, אין צורך לבודד נעלמים ולהציבם במשוואות האחרות (זה יכול לקחת שעות...), ניתן להציב משוואה שלמה בתוך משוואה אחרת, ולפתור מהר יותר.

דוגמה:

נתון: $x+y+z=4$; $y-z=2$; $w+y-z=9$

$x+y+z+w=?$

פתרון -

נציב את המשוואה האמצעית בתוך המשוואה השמאלית ונמצא את w:

$$w+\overbrace{y-z}^{2}=9 \quad \Rightarrow \quad w+2=9 \quad \Rightarrow \quad w=7$$

נציב את המשוואה הימנית ואת w בתוך הביטוי המבוקש:

$$\overbrace{x+y+z}^{4}+\overbrace{w}^{7} \quad \Rightarrow \quad 4+7=11$$

פירוק משוואה

טכניקה נוספת במצב של ריבוי משוואות היא פירוק משוואה.

דוגמה:

$$2a+3b+3c=22$$
$$a+b=2$$
$$2b+c=1$$
$$a+c=12$$

$$c=?$$

(1) 7 (2) 8 (3) 5 (4) 4

פתרון -

נפרק את המשוואה הגדולה לגורמים באופן הבא:

$$a+a+b+b+b+c+c+c=22$$

כעת נציב בתוכה את המשוואה השנייה ("נחליף" את a ו- b ב-2):

$$a+\overbrace{\mathbf{a}+\mathbf{b}}^{\mathbf{2}}+b+b+c+c+c=22$$

כעת נציב בתוכה את המשוואה השלישית ("נחליף" 2b ו- c ב-1):

$$a+2+\overbrace{\mathbf{b}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}^{\mathbf{1}}+c+c=22$$
$$a+3+c+c=22$$

נציב גם את המשוואה הרביעית:

$$3+\overbrace{\mathbf{a}+\mathbf{c}}^{\mathbf{12}}+c=22$$

ולבסוף, נמצא את c:

$$15+c=22 \qquad \Rightarrow \qquad c=7$$

משוואה אחת עם שני נעלמים

כאשר מספר הנעלמים גדול ממספר המשוואות, לא ניתן לדעת את הערך של כל הנעלמים במשוואות, אך ניתן לעיתים לדעת את יחסי הגדלים בין הנעלמים (מי יותר גדול, פי כמה, בכמה וכו').

דוגמה:

נתון: $\frac{a-3b}{2}=1-b$

איזו מהטענות הבאות נכונה בהכרח?

(1) $a<b$ (2) $b<a$ (3) $a=b$ (4) $a=2b$

פתרון -

$$\frac{a-3b}{2}=1-b \quad \Rightarrow \quad a-3b=2-2b \quad \Rightarrow \quad a=2+b$$

לא ניתן למצוא את הערך של a ושל b, אך מצאנו כי a גדול מ-b ב-2, ולכן התשובה היחידה שמתאימה היא תשובה (2).

תרגול שאלות מבחינות אמת

.1 נתון: $x + y = 7$
$x^2 + y^2 = 49$

$x \cdot y = ?$

(1) 10.5 (2) 0 (3) 14 (4) 7

.2 נתון: $\frac{x}{x+y} = 3x$, $x \neq 0$

$x + y = ?$

(1) 1 (2) $\frac{1}{2}$ (3) $\frac{1}{3}$ (4) $\frac{1}{6}$

.3 נתון: $x + y + z = 8$
$y + z = 15$
$y + z + w = -6$

$x + y + z + w = ?$

(1) -1
(2) 17
(3) -13
(4) 9

.4 $\frac{x}{y+2} = \frac{4}{x}$ $(y \neq -2 , x \neq 0)$

$y = ?$

(1) $\frac{x^2}{2}$ (2) 2 (3) $\frac{x^2}{4} - 2$ (4) $\frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}$

.5 נתון: $m^2 + n^2 = (m + n)^2$
$m < 2 < n$

איזו מן הטענות הבאות נובעת **בהכרח** מן הנתונים?

(1) $n = 2m$
(2) $m = 0$
(3) $m = n - 1$
(4) $n = 4$

פתרתי ____________ שאלות ב ____________ דקות, ____________ תשובות נכונות

6. נתון: $\frac{(a-b)^2+(a+b)^2}{2}=2a^2$, $0<a\,,\,b$

$a=?$

(1) b (2) $2b$ (3) $\frac{b^2}{2}$ (4) a^2-2

---

7. נתון: $\frac{21\cdot a}{x+5}=\frac{a}{x}$ $0<x,a$

$x=?$

(1) $\frac{1}{5a}$ (2) $\frac{1}{4}$ (3) 5 (4) $4a$

---

8. נתון: a ו-b הם מספרים ו-x הוא משתנה כלשהו.
למשוואה $ax+b=0$ אין פתרון.

מהנתון נובע בהכרח ש-

(1) $a=0\ ,\ b\neq 0$
(2) $a\neq 0\ ,\ b=0$
(3) $a=1\ ,\ b\neq 0$
(4) $a=1\ ,\ b=0$

---

9. נתון: $k=x-\frac{y}{3}$

$x+y=3k$ $(y\neq 0)$

$\frac{x}{y}=?$

(1) 1
(2) 2
(3) 3
(4) $\frac{2}{3}$

---

10. לכל x ו-y מתקיים: $(ax+y)(x+by)=x^2-y^2$

$a+b=?$

(1) 1 (2) 2 (3) -1 (4) 0

פתרתי ____________ שאלות ב ____________ דקות, ____________ תשובות נכונות

11. נתון: $a + b = c + d$
$a = 2b = 3c = 4d$

$d = ?$

(1) 1

(2) 0

(3) $\frac{3}{4}$

(4) $\frac{1}{12}$

---

12. נתון: $x^2 - y^2 = 0$
$x - y = 1$

$x = ?$

(1) -1 (2) 2 (3) $\frac{1}{2}$ (4) $-\frac{1}{4}$

---

13. נתון: $x^2 + x^3 = ax^2$, $x \neq 0$

$x = ?$

(1) a

(2) $\sqrt{a}$

(3) $a - 1$

(4) a^2

---

14. נתון: $x^3 = 3 \cdot x$, $0 < x$

$x = ?$

(1) 1 (2) $\sqrt{2}$ (3) $\sqrt{3}$ (4) $\sqrt[3]{3}$

---

15. נתון: $2x + 3y = a$
$3x + 2y = c$

$x + y = ?$

(1) $\frac{5}{a} + \frac{5}{c}$ (2) $\frac{2}{a} + \frac{3}{c}$ (3) $\frac{a+c}{2 \cdot 3}$ (4) $\frac{a+c}{5}$

פתרתי ______________ שאלות ב ______________ דקות, ______________ תשובות נכונות

16. נתון: $x + y = z$
$x + z = y$

כמה ערכים שונים יכול x לקבל?

(1) 1
(2) 2
(3) 3
(4) x אינו יכול לקבל שום ערך

---

17. נתון: $3x + 2y = 6$

מהנתון נובע **בהכרח** כי -

(1) $1 < y$ ו/או $1 < x$
(2) $x < 0$ ו/או $y < 0$
(3) $x < y$
(4) $x < 6$

---

18. נתון: $(a + 1)\cdot(a - 1) - (b + 1)\cdot(b - 1) = a^2 - b^2$

איזה מזוגות המספרים הבאים **לא** יכול להיות הזוג a ; b ?

(1) -1 ; 1
(2) 1 ; 2
(3) 0 ; 3
(4) כל זוג מספרים יכול להיות a ; b

---

19. היחס $A : B$ שווה ליחס $B : C$.

מכאן שהיחס $A : C$ שווה ל-

(1) $1 : 1$ (2) $C : A$ (3) $B : C^2$ (4) $B^2 : C^2$

---

20. נתון: $x = \frac{1}{b} - \frac{a}{b}$ $(a \neq 0,1 \ , \ b \neq 0,1)$

$y = x + 1 - a$

$\frac{y}{x} = ?$

(1) $1 + b$ (2) $1 - b$ (3) $\frac{1 - b}{a}$ (4) $\frac{1 + b}{a}$

פתרתי ____________ שאלות ב ____________ דקות, ____________ תשובות נכונות

תשובות

שאלה	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
תשובה	2	3	3	3	2	1	2	1	1	4

שאלה	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
תשובה	2	3	3	3	4	1	1	4	4	1

פתרתי 20 שאלות - ______________ נכונות, ______________ אחוזי הצלחה

1. תשובה (2) נכונה. שאלה 3 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – פתרון מתמטי

עלינו למצוא את ערך הביטוי xy. לשם כך, ניעזר במשוואות הנתונות. ניתן לזהות שהמשוואות הנתונות הן חלקים מתוך נוסחת כפל מקוצר. תחילה, נכתוב את הנוסחה המתאימה בשלמותה:

$$(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$$

לפי המשוואה הראשונה, ידוע כי $x + y = 7$. נציב ערך זה במשוואה:

$$(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy \quad \Rightarrow \quad 7^2 = x^2 + y^2 + 2xy \quad \Rightarrow \quad 49 = x^2 + y^2 + 2xy$$

לפי המשוואה השנייה, ידוע לנו כי $x^2 + y^2 = 49$. נציב ערך זה במשוואה:

$$49 = x^2 + y^2 + 2xy \quad \Rightarrow \quad 49 = 49 + 2xy$$

נפחית 49 משני האגפים:

$$2xy = 0 \quad \Rightarrow \quad xy = 0$$

דרך ב' – ניסוי וטעייה

עלינו לקבוע מה מכפלתם של x ו-y המקיימים את שתי המשוואות הנתונות. יש שיבחינו מלכתחילה כי המספרים המקיימים את המשוואות הם 0 ו-7, אולם גם אם לא הבחנתם בכך, ניתן לערוך ניסוי וטעייה ולגלות זאת במהירות.

ננסה להציב מספרים עבור x ו-y המקיימים את שתי המשוואות. נמצא מספרים שסכומם 7 ונבדוק מה סכום ריבועיהם.

עבור $x = 3$, $y = 4$ סכום הריבועים הוא 25 $(3^2 + 4^2 = 9 + 16)$. לא מתאים.

עבור $x = 2$, $y = 5$ סכום הריבועים הוא 29 $(2^2 + 5^2 = 4 + 25)$. לא מתאים.

בשלב זה ניתן להבחין בכך שעלינו להציב מספרים "קיצוניים" יותר כדי שהסכום יגדל (כלומר, מספרים שההפרש ביניהם גדול יותר).

עבור $x = 0$, $y = 7$ סכום הריבועים הוא 49 $(0^2 + 7^2 = 9 + 16)$. **מתאים**.

מכפלתם של x ו-y היא 0 $(0 \cdot 7)$.

.2 תשובה (3) נכונה. שאלה 4 מתוך 20 בפרק.

נפשט את המשוואה הנתונה על מנת לבודד את הביטוי $x + y$.

$$\frac{x}{x+y} = 3x$$

תחילה, נכפול את שני האגפים ב- $(x + y)$:

$$x = 3x \cdot (x+y)$$

מאחר שאנחנו שואפים לבודד את הביטוי $x + y$, נחלק את שני אגפי המשוואה במקדם של הביטוי הנ"ל: $3x$.
שימו לב שניתן לחלק ב-$3x$ מפני שנתון כי $x \neq 0$ ולכן גם $3x \neq 0$:

$$\frac{x}{3x} = x + y$$

נצמצם x בשבר שבאגף שמאל:

$$\frac{1}{3} = x + y$$

.3 תשובה (3) נכונה. שאלה 6 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – פתרון מקוצר
עלינו למצוא את סכומם של 4 הנעלמים x, y, z ו-w. נשים לב כי אם נחבר את המשוואה הראשונה עם המשוואה השלישית, נקבל את סכומם של ארבעת הנעלמים, אולם y ו-z יופיעו פעמיים:

$$x + y + z = 8$$
$$\underline{y + z + w = -6}$$

$$x + y + \mathbf{y} + \mathbf{z} + z + w = 8 - 6 \quad \Rightarrow \quad x + \mathbf{2y} + \mathbf{2z} + w = 2$$

כדי להיפטר מהכפילות של y ו-z, נחסר את המשוואה השנייה מהמשוואה שמצאנו לעיל:

$$x + \mathbf{2y} + \mathbf{2z} + w = 2$$
$$\underline{y + z = 15}$$

$$x + \mathbf{2y} - \mathbf{y} + \mathbf{2z} - \mathbf{z} + w = 2 - 15 \quad \Rightarrow \quad x + y + z + w = -13$$

דרך ב' – פתרון מלא
עלינו למצוא את סכומם של 4 הנעלמים x, y, z ו-w. ידוע כי $y + z = 15$. כעת נמצא את ערכם של x ו-w.

נציב את ערך הסכום $y + z$ במשוואה הראשונה, במטרה לבודד את x:

$$y + z = 15$$
$$x + y + z = 8 \quad \Rightarrow \quad x + 15 = 8$$
$$x = -7$$

נציב את ערך הסכום $y + z$ במשוואה השנייה, במטרה לבודד את w:

$$y + z = 15$$
$$y + z + w = -6 \quad \Rightarrow \quad 15 + w = -6$$
$$w = -21$$

כעת, משמצאנו את ערכיהם של הנעלמים x ו-w, ניתן לחשב את סכומם של 4 הנעלמים:

$$x + y + z + w \quad \Rightarrow \quad x + 15 + w$$

נציב את ערכי x ו-w שמצאנו לעיל:

$$x + 15 + w = -7 + 15 - 21 = -13$$

.4 תשובה (3) נכונה. שאלה 6 מתוך 20 בפרק.

עלינו לבטא את y באמצעות x. לשם כך, נפשט את המשוואה ונבודד את y.

$$\frac{x}{y+2}=\frac{4}{x}$$

נבצע כפל בהצלבה:

$$x^2=4\cdot(y+2)$$

$$x^2=4y+8$$

נסדר אגפים:

$$4y=x^2-8$$

נחלק ב-4:

$$y=\frac{x^2-8}{4}$$

אין תשובה כזו ולכן נפרק את השבר:

$$y=\frac{x^2}{4}-\frac{8}{4}\quad\Rightarrow\quad y=\frac{x^2}{4}-2$$

.5 תשובה (2) נכונה. שאלה 7 מתוך 20 בפרק.

עלינו להבין איזו טענה נובעת מהנתונים. תחילה, נפשט את המשוואה הראשונה במטרה לדלות ממנה מידע.

$$m^2+n^2=(m+n)^2$$

נפתח את אגף ימין לפי נוסחת כפל מקוצר:

$$m^2+n^2=m^2+n^2+2mn$$

נפחית m^2+n^2 משני האגפים:

$$0=2mn$$

נחלק ב-2:

$$0=mn$$

אם המכפלה של m ו-n היא 0, הרי שלפחות אחד מהם שווה ל-0. נשים לב לנתון השני:

$$m<2<n$$

לפי נתון זה, n גדול מ-2 ולכן אינו יכול להיות שווה ל-0. מכאן ש-m בהכרח שווה ל-0, כפי שנטען בתשובה (2).

.6 תשובה (1) נכונה. שאלה 9 מתוך 20 בפרק.

$$\frac{(a-b)^2+(a+b)^2}{2}=2a^2$$

תחילה, ניצור מכנה משותף על מנת להעלים את המכנה:

$$(a-b)^2+(a+b)^2=4a^2$$

כעת, נפתח סוגריים על ידי שימוש בנוסחות כפל מקוצר:

$$a^2+b^2-2ab+a^2+b^2+2ab=4a^2$$

נכנס איברים דומים:

$$2a^2+2b^2=4a^2$$

נעביר אגפים:

$$2b^2=2a^2$$
$$b^2=a^2$$

a ו-b מוגדרים לנו כמספרים חיוביים, ולכן ניתן להסיק ש-$a=b$. תשובה (1) נכונה.

טיפ: לעיתים קרובות יחסית מופיעות שאלות שבהן מחברים את נוסחת כפל מקוצר ראשונה ואת נוסחת כפל מקוצר שנייה (כפי שניתן לראות במונה של השבר בתרגיל זה); או לחילופין מחסרים בין שתי נוסחות אלה. כדאי לזכור שבמצבים כאלו יתקזזו חלק מגורמים:

כאשר יש חיבור בין שתי הנוסחות:

$$(a-b)^2+(a+b)^2=2a^2+2b^2$$

כאשר מחסרים מנוסחה הראשונה את הנוסחה השנייה:

$$(a-b)^2-(a+b)^2=4ab$$

.7 תשובה (2) נכונה. שאלה 10 מתוך 20 בפרק.

עלינו למצוא את ערכו של x בעזרת המשוואה הנתונה:

$$\frac{21\cdot a}{x+5}=\frac{a}{x}$$

נעשה כפל בהצלבה:

$$21\cdot a\cdot x=a\cdot(x+5)$$

נצמצם ב-a (מותר מכיוון שהוא שונה מאפס):

$$21x=x+5$$

נסדר אגפים:

$$20x=5$$

נחלק ב-20:

$$x=\frac{5}{20}=\frac{1}{4}$$

---

8. תשובה (1) נכונה. שאלה 11 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הבנה

כדי שלמשוואה לא יהיה פתרון, היא צריכה להיות תמיד פסוק שקר – כלומר, שכל x שנציב לא יוביל לשוויון בין שני האגפים. אנו מגיעים למצב כזה כאשר אין נעלם כלל במשוואה (הנעלם "מתבטל") וכן ששני אגפי המשוואה אינם שווים, למשל: $1 = 0$. אם היה נעלם, לדוגמה באופן הבא: $1 \cdot x = 0$, למשוואה היה פתרון ($x = 0$).

מתוך ההבנה הזו, ראשית אנו צריכים להעלים את x מהמשוואה. הדבר יקרה רק אם $a = 0$ (משום ש-a הוא המקדם של x).

כעת נותרנו עם המשוואה הזו:

$$0 \cdot x + b = 0$$
$$b = 0$$

מכאן שכדי שלמשוואה לא יהיה פתרון, b צריך להיות שונה מ- 0 (כך שני האגפים לא יהיו שווים זה לזה).

ולסיכום: $a = 0 \quad , \quad b \neq 0$

דרך ב' – הצבת תשובות

נציב נתונים המתאימים לנאמר בתשובות. כיוון שאנו נשאלים מה נכון בהכרח, נפסול כל תשובה שהצבתה תיתן פתרון למשוואה – מפני שהיא אינה נכונה בהכרח.

<u>נבדוק את תשובה (1)</u>: $b \neq 0 \ , \ a = 0$

נציב במשוואה מספרים שתואמים את התנאים האלו, לדוגמה: $b = 1 \ , \ a = 0$:

$$0 \cdot x + 1 = 0$$
$1 = 0 \quad \Rightarrow$ אין פתרון

אכן קיבלנו מצב שבו למשוואה אין פתרון. עם זאת, אנו נשאלים מה נכון <u>בהכרח</u>. קיים סיכוי שהמקרה הפרטי שהצבנו הוא מקרה חריג, ואינו מעיד על הכלל. כלומר, איננו יכולים להיות בטוחים שהתשובה נכונה בהכרח, ולכן נמשיך לבדוק את התשובות ונשאף לפסול 3:

<u>נבדוק את תשובה (2)</u>: $b = 0 \ , \ a \neq 0$

נציב במשוואה מספרים שתואמים את התנאים האלו, לדוגמה: $b = 0 \ , \ a = 1$:

$$1 \cdot x + 0 = 0$$
$x = 0 \quad \Rightarrow$ יש פתרון, התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (3)</u>: $b \neq 0 \ , \ a = 1$

נציב במשוואה מספרים שתואמים את התנאים האלו, לדוגמה: $b = 1 \ , \ a = 1$:

$$1 \cdot x + 1 = 0$$
$x = -1 \quad \Rightarrow$ יש פתרון, התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (4)</u>: $b = 0 \ , \ a = 1$

אלו הם הנתונים שהצבנו בתשובה (2) וראינו שיש פתרון למשוואה במצב זה. התשובה נפסלת.

פסלנו 3 תשובות, ועל כן תשובה (1) נכונה.

.9 תשובה (1) נכונה. שאלה 12 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – פתרון מתמטי

עלינו למצוא את היחס בין x ל-y. k אינו רלוונטי לביטוי המבוקש ולכן נשאף להיפטר ממנו. נכפיל את המשוואה הראשונה ב-3:

$$k = x - \frac{y}{3} \quad \Rightarrow \quad 3k = 3x - y$$

כעת נחסר משוואות:

$$\begin{array}{l} 3k = 3x - y \\ \underline{3k = x + y \qquad\qquad} \end{array}$$

$$3k - 3k = 3x - x - y - y \qquad \Rightarrow \qquad 0 = 2x - 2y$$

נפשט את המשוואה שאליה הגענו במטרה להגיע לביטוי המבוקש, $\frac{x}{y}$:

$$2y = 2x \qquad \Rightarrow \qquad y = x$$

נחלק ב-y:

$$1 = \frac{x}{y}$$

דרך ב' – הצבת התשובות

עלינו למצוא את היחס בין x ל-y, בהינתן שתי משוואות הקושרות בין x, y ו-k. בתשובות נמצאים יחסים. ניתן לבדוק את התשובות במטרה לחפש תשובה המתאימה לכל הנתונים.

<u>נבדוק את תשובה (1):</u>

$$\frac{x}{y} = 1 \quad \Rightarrow \quad x = y$$

נציב ערך זה במשוואה הראשונה:

$$k = x - \frac{y}{3} \quad \Rightarrow \quad k = y - \frac{1}{3}y \quad \Rightarrow \quad k = \frac{2}{3}y$$

נציב ערך זה במשוואה השנייה:

$$x + y = 3k \quad \Rightarrow \quad y + y = 3k \quad \Rightarrow \quad k = \frac{2}{3}y$$

הערך של k זהה בשתי המשוואות. משמע, תשובה זו מקיימת את נתוני השאלה ולא יוצרת סתירה. **תשובה נכונה.**

טיפ: מכיוון שהצבנו את התשובות, ברגע שמצאנו תשובה נכונה אין צורך להמשיך לבדוק את שאר התשובות.

10. תשובה (4) נכונה. שאלה 19 מתוך 20 בפרק.

$$(ax + y)(x + by) = x^2 - y^2$$

נזהה באגף הימני נוסחת כפל מקוצר שלישית, ולכן נכנס אותה:

$$(ax + y)(x + by) = (\mathbf{x} + \mathbf{y})(\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

עלינו להבין מתי המשוואה תתקיים. ראשית, באגף הימני של המשוואה המקדם של x הוא 1 בשני הסוגריים. על מנת ליצור מצב כזה גם באגף הימני, גם ערכו של a צריך להיות 1. נציב a = 1 ונקבל:

$$(\mathbf{x} + y)(x + by) = (x + y)(x - y)$$

כעת, נשים לב שהסוגריים הראשונים בכל אחד מהאגפים זהים זה לזה – (x + y). עלינו ליצור מצב זה גם בסוגריים השניים. באגף הימני המקדם של y בסוגריים אלו הוא (1-). לכן ערכו של b, שמהווה את המקדם של y באגף השמאלי, צריך להיות גם הוא (1-). נציב b = -1 ונקבל:

$$(x + y)(x + (\mathbf{-1})y) = (x + y)(x - y)$$
$$(x + y)(x - \mathbf{y}) = (x + y)(x - y)$$

אכן הגענו לפסוק אמת. כלומר, מצאנו שערכם של הפרמטרים הם: a = 1, b = -1. עלינו לחשב את הסכום (a + b):

$$1 + (-1) = 0$$

11. תשובה (2) נכונה. שאלה 14 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הצבת תשובות

אנו יכולים להציב את ערכו של d שנמצא בתשובות ולמצוא את ערכיהם של שאר המשתנים. אם הם יקיימו את המשוואה הראשונה, התשובה נכונה.

טיפ: כאשר עובדים עם התשובות, מומלץ להתחיל בבדיקת התשובות הנוחות ביותר.

<u>נבדוק את תשובה (2)</u>:

$d = 0 \;\Rightarrow\; 4d = 4 \cdot 0 = 0$

נתון כי $a = 2b = 3c = 4d$, ולפי הצבה זו $4d = 0$. מכאן שגם שאר האגפים שווים ל-0, ולכן:

$a = 0$

$2b = 0 \;\Rightarrow\; b = 0$

$3c = 0 \;\Rightarrow\; c = 0$

מצאנו את ערכם של הנעלמים. כעת, נציב ערכים אלו במשוואה הראשונה:

$0 + 0 \stackrel{?}{=} 0 + 0$

$0 = 0$

קיבלנו פסוק אמת, ועל כן זו **התשובה הנכונה**.

טיפ: מכיוון שהצבנו את התשובות, ברגע שמצאנו תשובה נכונה אין צורך להמשיך לבדוק את שאר התשובות.

דרך ב' – פתרון מתמטי

מאחר שעלינו למצוא את ערכו של d, נבטא את יתר הנעלמים באמצעותו וכך נוכל לבנות משוואה המורכבת רק מ-d וממספרים חופשיים.

$a = 4d$

$2b = 4d \;\Rightarrow\; b = 2d$

$3c = 4d \;\Rightarrow\; c = \frac{4d}{3}$

נציב את הערכים במשוואה הראשונה:

$a + b = c + d$

$4d + 2d = \frac{4d}{3} + d$

ניצור מכנה משותף 3 ו"ניפטר" ממנו:

$12d + 6d = 4d + 3d$

$18d = 7d$

נעביר אגפים:

$11d = 0$

$d = 0$

---

12. תשובה (3) נכונה. שאלה 14 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – כפל מקוצר

נזהה כי בנתון הראשון ניתן לכנס את האגף השמאלי לפי נוסחת כפל מקוצר שלישית:

$x^2 - y^2 = 0$

$(x - y)(x + y) = 0$

נתון לנו כי $x - y = 1$. נציב זאת במשוואה ונקבל:

$1 \cdot (x + y) = 0$

$x + y = 0$

על מנת למצוא את x עלינו "להיפטר" מ-y. לשם כך, נחבר משוואה זו עם המשוואה שיש בנתונים:

$$+\begin{cases}x+y=0\\x-y=1\end{cases}$$
$2x=1$
$x=\frac{1}{2}$

דרך ב' – הצבת נעלם

עלינו למצוא את ערכו של x ולכן y מיותר. נבודד את y בעזרת המשוואה השנייה:

$x-y=1$
$y=x-1$

נציב את מה שקיבלנו במקום y במשוואה הראשונה:

$x^2-y^2=0$
$x^2-(x-1)^2=0$
$x^2-x^2-1+2x=0$
$2x=1$
$x=\frac{1}{2}$

דרך ג' – הצבת תשובות

ניתן להציב את x שבתשובות במשוואה השנייה, למצוא את y ולבדוק האם הערכים שנמצאו מקיימים את המשוואה הראשונה:

(1) $x=-1$
$-1-y=1 \Rightarrow y=-2$

$(-1)^2-(-2)^2 \overset{?}{=} 0$
$1-4\neq 0 \quad \Rightarrow$ התשובה נפסלת.

(2) $x=2$
$2-y=1 \Rightarrow y=1$

$2^2-1^2 \overset{?}{=} 0$
$4-1\neq 0 \quad \Rightarrow$ התשובה נפסלת.

(3) $x=\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}-y=1 \Rightarrow y=-\frac{1}{2}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(-\frac{1}{2}\right)^2 \overset{?}{=} 0$
$\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=0 \quad \Rightarrow$ **תשובה נכונה.**

טיפ: מכיוון שהצבנו את התשובות, ברגע שמצאנו תשובה נכונה אין צורך להמשיך לבדוק את שאר התשובות, אך למען שלמות ההסבר נפסול את תשובה (4):

(4) $x=\frac{1}{4}$
$\frac{1}{4}-y=1 \Rightarrow y=-\frac{3}{4}$

$\left(\frac{1}{4}\right)^2-\left(-\frac{3}{4}\right)^2 \neq 0 \quad \Rightarrow$ התשובה נפסלת.

13. תשובה (3) נכונה. שאלה 13 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – פתרון מתמטי

$$x^2 + x^3 = ax^2$$

נסדר אגפים:

$$x^2 - ax^2 + x^3 = 0$$

נוציא גורם משותף x^2:

$$x^2(1 - a + x) = 0$$

נתון כי $x \neq 0$, לכן נוכל לחלק את המשוואה ב-x^2.

$$1 - a + x = 0$$

נעביר אגפים:

$$x = a - 1$$

דרך ב' – הצבת מספרים

נתונה משוואה הקושרת בין x ל-a, ועלינו לבטא את x באמצעות a. מאחר שהפישוט נראה לא נוח, נציב ערך עבור a. נשים לב שאם נציב $a = 0$ או $a = 1$, תשובות רבות יהיו זהות. לכן, נציב $a = 2$:

$$x^2 + x^3 = ax^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 + x^3 = 2x^2$$

נסדר אגפים:

$$x^3 - x^2 = 0$$

נוציא גורם משותף x^2:

$$x^2 \cdot (x - 1) = 0$$

הפתרונות המתאימים:

$$x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$
$$x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1$$

נתון כי $x \neq 0$, ולכן הפתרון הראשון של המשוואה מתבטל ואנו נשארים עם הפתרון $x = 1$.

כעת, נציב גם בתשובות $a = 2$ ונחפש תשובה השווה ל-1. נשים לב שמכיוון שהשתמשנו בהצבת מספרים, עלינו לפסול 3 תשובות בטרם נוכל לסמן תשובה נכונה.

(1) $a \Rightarrow 2 \quad \Rightarrow$ לא מתאים, התשובה נפסלת

(2) $\sqrt{a} \Rightarrow \sqrt{2} \quad \Rightarrow$ לא מתאים, התשובה נפסלת

(3) $a - 1 \Rightarrow 2 - 1 = 1 \quad \Rightarrow$ **מתאים**

(4) $a^2 \Rightarrow 2^2 = 4 \quad \Rightarrow$ לא מתאים, התשובה נפסלת

פסלנו 3 תשובות ועל כן תשובה (3) נכונה.

14. תשובה (3) נכונה. שאלה 14 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – פתרון מתמטי

נפשט את המשוואה על מנת למצוא את ערכו של x :

$$x^3 = 3x \quad \Rightarrow \quad x^2 \cdot x = 3x$$

נחלק ב-x. ניתן לעשות זאת מפני שידוע כי $x > 0$ ולכן $x \neq 0$:

$$x^2 = 3$$

נוציא שורש :

$$x = \sqrt{3}$$

דרך ב' – הצבת התשובות

עלינו למצוא את ערך x אשר מקיים את המשוואה. נציב את התשובות ונחפש תשובה מתאימה.

טיפ: בהצבת תשובות, כדאי להתחיל בתשובות הנוחות יותר.

(1) $1^3 \stackrel{?}{=} 3 \cdot 1 \quad \Rightarrow \quad 1 \neq 3 \quad \Rightarrow$ לא מתאים, התשובה נפסלת

(2) $\left(\sqrt{2}\right)^3 \stackrel{?}{=} 3 \cdot \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad 2\sqrt{2} \neq 3\sqrt{2} \quad \Rightarrow$ לא מתאים, התשובה נפסלת

(3) $\left(\sqrt{3}\right)^3 \stackrel{?}{=} 3 \cdot \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad 3\sqrt{3} = 3\sqrt{3} \quad \Rightarrow$ **מתאים, תשובה נכונה**

טיפ: מכיוון שהצבנו את התשובות, ברגע שמצאנו תשובה נכונה אין צורך להמשיך לבדוק את שאר התשובות, אך למען שלמות ההסבר נפסול את תשובה (4) :

(3) $\left(\sqrt[3]{3}\right)^3 \stackrel{?}{=} 3 \cdot \sqrt[3]{3} \quad \Rightarrow \quad 3 \neq 3\sqrt[3]{3} \quad \Rightarrow$ לא מתאים, התשובה נפסלת

15. תשובה (4) נכונה. שאלה 15 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – פתרון מקוצר

עלינו לבטא את סכום הנעלמים x ו-y באמצעות a ו-c. נשים לב שאם נחבר את שתי המשוואות, x ו-y יהיו שניהם בעלי מקדם 5, שאותו ניתן להוציא כגורם משותף וכך לבודד את x + y :

$$\begin{array}{l} 2x + 3y = a \\ \underline{3x + 2y = c \qquad\qquad} \end{array}$$

$$2x + 3x + 3y + 2y = a + c \qquad \Rightarrow \qquad 5x + 5y = a + c$$

נוציא 5 כגורם משותף:

$$5(x + y) = a + c$$

נחלק ב-5:

$$x + y = \frac{a + c}{5}$$

דרך ב' – פתרון מלא

כדי למצוא את סכומם של x ו-y באמצעות a ו-c, נבודד כל אחד מהם ונבטא את ערכו באמצעות a ו-c, ולבסוף נחבר.

כדי לבודד את y, נכפול את המשוואה הראשונה ב-3 ואת השנייה ב-2:

$$\begin{array}{lll} 2x + 3y = a & \Rightarrow & 6x + 9y = 3a \\ 3x + 2y = c & \Rightarrow & 6x + 4y = 2c \end{array}$$

נחסר משוואות:

$$\begin{array}{l} 6x + 9y = 3a \\ \underline{6x + 4y = 2c \qquad\qquad} \end{array}$$

$$6x - 6x + 9y - 4y = 3a - 2c \qquad \Rightarrow \qquad 5y = 3a - 2c$$

נחלק ב-5:

$$y = \frac{3a - 2c}{5}$$

כעת נבודד את x. לשם כך נכפול את המשוואה הראשונה ב-2 ואת השנייה ב-3:

$$\begin{array}{lll} 2x + 3y = a & \Rightarrow & 4x + 6y = 2a \\ 3x + 2y = c & \Rightarrow & 9x + 6y = 3c \end{array}$$

נחסר משוואות:

$$\begin{array}{l} 4x + 6y = 2a \\ \underline{9x + 6y = 3c \qquad\qquad} \end{array}$$

$$4x - 9x + 6y - 6y = 2a - 3c \qquad \Rightarrow \qquad -5x = 2a - 3c \qquad \Rightarrow \qquad 5x = 3c - 2a$$

נחלק ב-5:

$$x = \frac{3c - 2a}{5}$$

כעת נחבר את ערכי x ו-y שמצאנו:

$$x + y = \frac{3c - 2a}{5} + \frac{3a - 2c}{5} = \frac{3c - 2a + 3a - 2c}{5}$$

$$x + y = \frac{c + a}{5}$$

.16 תשובה (1) נכונה. שאלה 15 מתוך 20 בפרק.

עלינו לקבוע כמה ערכים שונים יכול לקבל x. כדי להבין זאת, ננסה לייצר משוואה המכילה את x, וממנה נלמד על תכונותיו.

$x + y = z$
$x + z = y$

נציב את ערכו של z מהמשוואה הראשונה במשוואה השנייה:

$x + z = y \quad \Rightarrow \quad x + x + y = y$

נפחית y משני האגפים:

$2x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$

מצאנו כי המספר היחיד המקיים את המשוואה הוא $x = 0$, ולכן x יכול לקבל ערך אחד בלבד.

.17 תשובה (1) נכונה. שאלה 15 מתוך 20 בפרק.

דרך א' - הבנה
נתונה משוואה עם שני נעלמים $3x + 2y = 6$, כמובן שיש לה אינסוף פתרונות אך עלינו להבין שלפחות אחד מהנעלמים חיובי (אם שניהם שליליים התוצאה בהכרח תהיה שלילית). יתרה מכך, לפחות אחד האיברים צריך להיות גדול מ-1, שהרי אם שניהם קטנים מ-1 לא נצליח להגיע לסכום 6. כלומר, $x > 1$ ו/או $y > 1$.

דרך ב' – הצבת תשובות ומספרים
נבחן את התשובות ונציב בהן מספרים בניסיון לפסול כמה מהן על דרך השלילה.

(1) כדי לפסול את תשובה זו עלינו להציב x ו-y קטנים מאחד ושעדיין המשוואה תתקיים. מכיוון שזו התשובה הנכונה לא נוכל לעשות זאת (אם שניהם קטנים מאחד אז הסכום בוודאות קטן מ-5).
(2) כדי לפסול את תשובה זו עלינו להציב x ו-y חיוביים ושעדיין המשוואה תתקיים. לדוגמה $x = 2$ ו-$y=1-$ תשובה זו נפסלת.
(3) כדי לפסול את תשובה זו עלינו להציב x גדול מ-y ושעדיין המשוואה תתקיים. לדוגמה $x = 2$ ו-$y=1-$ תשובה זו נפסלת.
(4) כדי לפסול את תשובה זו עלינו להציב x גדול מ-6 ושעדיין המשוואה תתקיים. לדוגמה $x = 10$ ו-$y=1-$ תשובה זו נפסלת.

פסלנו שלוש תשובות באמצעות הצבה, ניתן לסמן את הרביעית.

הערה: המשמעות המילולית של המונח ו/או היא לפחות.

---

18. תשובה (4) נכונה. שאלה 18 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – פתרון מתמטי

עלינו לקבוע איזה זוג מספרים **לא** יכול להיות הזוג a ; b. כדי להבין את המידע שבמשוואה, נפשט אותה.

$$(a+1)\cdot(a-1)-(b+1)(b-1)=a^2-b^2$$

נפשט את אגף שמאל לפי נוסחאות כפל מקוצר:

$$a^2-1^2-(b^2-1^2)=a^2-b^2$$

$$a^2-1-b^2+1=a^2-b^2$$

$$a^2-b^2=a^2-b^2$$

כל זוג מספרים a ; b יקיים את המשוואה שלעיל המהווה פסוק אמת. לכן, כל זוג מספרים עשוי להיות a ; b, כפי שנטען בתשובה (4).

דרך ב' – הצבת התשובות

נציב את ערכי a ו-b המוצגים בתשובות, ונחפש זוג שלא מקיים את המשוואה הנתונה ולכן אינו יכול להיות הזוג a ; b.

<u>נבדוק את תשובה (1):</u>

$$b=-1\quad,\quad a=1$$

$$(a+1)\cdot(a-1)-(b+1)(b-1)=a^2-b^2$$
$$(1+1)\cdot(1-1)-(-1+1)(-1-1)=1^2-(-1)^2$$
$$2\cdot0-0\cdot(-2)=1-1$$
$$0=0$$

זוג מתאים, התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (2):</u>

$$b=1\quad,\quad a=2$$

$$(a+1)\cdot(a-1)-(b+1)(b-1)=a^2-b^2$$
$$(2+1)\cdot(2-1)-(1+1)(1-1)=2^2-1^2$$
$$3\cdot1-2\cdot0=4-1$$
$$3=3$$

זוג מתאים, התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (3):</u>

$$b=0\quad,\quad a=3$$

$$(a+1)\cdot(a-1)-(b+1)(b-1)=a^2-b^2$$
$$(3+1)\cdot(3-1)-(0+1)(0-1)=3^2-0^2$$
$$4\cdot2-1\cdot(-1)=9-0$$
$$9=9$$

זוג מתאים, התשובה נפסלת.

פסלנו 3 תשובות ועל כן תשובה (4) נכונה.

19. תשובה (4) נכונה. שאלה 19 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הצבת מספרים

נתון כי היחס $A : B$ שווה ליחס $B : C$. עלינו לקבוע למה שווה היחס $A : C$. נציב מספרים נוחים עבור A ו-B.
נציב $A = 1$, $B = 2$.

היחס $A : B$ שווה $1 : 2$. לכן, היחס $B : C$ שווה גם הוא ל- $1 : 2$. משמע, C גדול פי 2 מ-B, כפי ש-B גדול פי 2 מ-A. $B = 2$ ולכן $C = 4$ $\Leftarrow$ $1 : 2 = 2 : 4$.

לפיכך, היחס $A : C$ שווה ל- $1 : 4$.

כעת, נציב גם בתשובות $A = 1$, $B = 2$, $C = 4$, ונחפש תשובה השווה ל-$1 : 4$. נשים לב שמכיוון שהשתמשנו בהצבת מספרים, עלינו לפסול 3 תשובות בטרם נוכל לסמן תשובה נכונה.

(1) $1 : 1$ $\Rightarrow$ לא מתאים, התשובה נפסלת

(2) $C : A \Rightarrow 4 : 1$ $\Rightarrow$ לא מתאים, התשובה נפסלת

(3) $B : C^2 \Rightarrow 2 : 4^2 = 2 : 16 = 1 : 8$ $\Rightarrow$ לא מתאים, התשובה נפסלת

טיפ: כיוון שפסלנו 3 תשובות, ניתן לסמן את תשובה (4) מבלי לבדוק אותה. למען שלמות ההסבר, נבדוק את נכונותה:

(3) $B^2 : C^2 \Rightarrow 2^2 : 4^2 = 4 : 16 = 1 : 4$ $\Rightarrow$ **מתאים**

דרך ב' – פתרון מתמטי

נתון שהיחס $A : B$ שווה ליחס $B : C$. נבטא קשר זה באופן אלגברי ונבודד את A במטרה למצוא את היחס $A : C$:

$$\frac{A}{B} = \frac{B}{C}$$

נכפול ב-B:

$$A = \frac{B^2}{C}$$

כאמור, אנו מחפשים את ערך הביטוי $\frac{A}{C}$, ולכן נחלק את המשוואה ב-C:

$$\frac{A}{C} = \frac{\frac{B^2}{C}}{C}$$

שימו לב, בשלב זה ניתן לשים לב לכך ש- B^2 לא יצטמצם. התשובה היחידה המכילה את הביטוי B^2 היא תשובה (4) ועל כן ניתן לסמנה. למען שלמות ההסבר, נשלים את החישוב.

נשתמש בקשתות:

$$\frac{A}{C} = \frac{\frac{B^2}{C}}{C} \Rightarrow \frac{A}{C} = \frac{\frac{B^2}{C}}{\frac{C}{1}} \Rightarrow \frac{A}{C} = \frac{B^2}{C^2}$$

20. תשובה (1) נכונה. שאלה 20 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – פתרון מתמטי
נפשט את המשוואה:

$$x = \frac{1}{b} - \frac{a}{b} \quad \Rightarrow \quad bx = 1 - a$$

נציב את bx במקום $1 - a$ במשוואה השנייה:

$$y = x + 1 - a \quad \Rightarrow \quad y = x + bx$$

נוציא x גורם משותף ונחלק ב-x:

$$y = x(1 + b) \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{x} = 1 + b$$

דרך ב' – הצבת מספרים

ערכי x ו-y נתונים באמצעות a ו-b, ועלינו למצוא את ערך הביטוי $\frac{y}{x}$ באמצעות a ו-b. מאחר שהפישוט נראה מסובך למדי, נציב מספרים נוחים במקום a ו-b. נשים לב כי לפי תחום ההגדרה a ו-b שונים מאפס ומאחד.
לכן, נציב $a = 2\ ,\ b = 2$.

$$x = \frac{1}{b} - \frac{a}{b} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2} - \frac{2}{2} = \frac{1}{2} - 1 = -0.5$$

$$y = x + 1 - a \quad \Rightarrow \quad y = -0.5 + 1 - 2 = -1.5$$

משמצאנו את ערכי x ו-y, ניתן למצוא את ערך הביטוי המבוקש:

$$\frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{-1.5}{-0.5} = \frac{-3}{-1} = 3$$

כעת, נציב גם בתשובות $a = 2\ ,\ b = 2$, ונחפש תשובה השווה ל-3. נשים לב שמכיוון שהשתמשנו בהצבת מספרים, עלינו לפסול 3 תשובות בטרם נוכל לסמן תשובה נכונה.

(1) $1 + b \quad \Rightarrow \quad 1 + 2 = 3 \quad \Rightarrow$ **מתאים**

(2) $1 - b \quad \Rightarrow \quad 1 - 2 = -1 \quad \Rightarrow$ לא מתאים, התשובה נפסלת

(3) $\frac{1 - b}{a} \quad \Rightarrow \quad \frac{1 - 2}{2} = -0.5 \quad \Rightarrow$ לא מתאים, התשובה נפסלת

(4) $\frac{1 + b}{a} \quad \Rightarrow \quad \frac{1 + 2}{2} = 1.5 \quad \Rightarrow$ לא מתאים, התשובה נפסלת

פסלנו 3 תשובות ועל כן תשובה (1) נכונה.

חזקות ושורשים - יסודות

כללי חזקות

חזקות

פעולת החזקה היא דרך מקוצרת לכתוב פעולת כפל החוזרת על עצמה.

במקום לכתוב: $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$, נכתוב: 3^5

המספר שמכפילים כפול עצמו נקרא <u>בסיס</u> (3), והמספר שמייצג את מספר הפעמים נקרא <u>מעריך</u> או <u>חזקה</u> (5).

כללים

כל מספר בחזקת 1 שווה לעצמו	$a^1 = a$
כל מספר בחזקת אפס שווה לאחד	$a^0 = 1$
1 בחזקת כל מספר שווה ל-1	$1^a = 1$
אפס בחזקת כל מספר חיובי שווה לאפס	$0^a = 0 \qquad (0 < a)$
אפס בחזקת אפס אינו מוגדר	$0^0 = \emptyset$
מספר שלילי בחזקה זוגית יהיה חיובי	$(-3)^4 = 81$
מספר שלילי בחזקה אי-זוגית יהיה שלילי	$(-5)^3 = -125$
בסדר פעולות, חזקה קודמת לסימן המספר	$-3^2 = -(3^2) = -9$
מספר בחזקה שלילית יהיה ההופכי של המספר בחזקה חיובית	$\left(\frac{x}{y}\right)^{-a} = \left(\frac{y}{x}\right)^{a}$
בכפל בסיסים זהים נחבר את החזקות	$x^a \cdot x^b = x^{a+b}$
בחילוק בסיסים זהים נחסר את החזקות	$\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$
בחזקה על חזקה נכפול את החזקות	$(x^a)^b = x^{a \cdot b}$
בכפל מעריכים זהים נכפול את הבסיסים	$x^a \cdot y^a = (x \cdot y)^a$
בחילוק מעריכים זהים נחלק את הבסיסים	$\frac{x^a}{y^a} = \left(\frac{x}{y}\right)^a$

$$\mathbf{a = \pm 1} \quad \textbf{או} \quad \mathbf{b = 0} \quad \Leftarrow \quad \mathbf{a^b = 1}$$

$$\mathbf{2^4 = 4^2} \quad \Leftarrow \quad \mathbf{a^b = b^a}$$

טבלת חזקות - ללמוד בעל-פה

חזקה / בסיס	2	3	4	5	6	7	8
2	4	8	16	32	64	128	256
3	9	27	81	243			
4	16	64	256				
5	25	125	625				
6	36	216					
7	49	343					
8	64						
9	81						
10	100						
11	121						
12	144						
13	169						
14	196						
15	225						
16	256						
17	289						
18	324						
19	361						
20	400						

תרגול - כללי חזקות

.1 $0^{\pi} + \pi^{1} = ?$

(1) 1 (2) $\pi + 1$ (3) 0 (4) π

.2 $1^{\pi} + \pi^{0} = ?$

(1) 1 (2) 2 (3) $\pi + 1$ (4) π

.3 $-(-5)^{3} = ?$

(1) 125 (2) -125 (3) 625 (4) -625

.4 $\left(\frac{2}{3}\right)^{-4} = ?$

(1) $\frac{16}{81}$ (2) $-\frac{16}{81}$ (3) $\frac{81}{16}$ (4) $-\frac{81}{16}$

.5 $(-2)^{-4} = ?$

(1) $\frac{1}{16}$ (2) $-\frac{1}{16}$ (3) 16 (4) -16

.6 $13^{-6} \cdot 13^{10} \cdot 13^{-2} = ?$

(1) 1 (2) 169 (3) 13^{3} (4) 13

.7 $3^{x+2} = ?$

(1) $9 + 3^{x}$ (2) $9 \cdot 3^{x}$ (3) $3 \cdot 3^{x}$ (4) $3 + 3^{x}$

.8 $\frac{16^8}{16^6} = ?$

(1) 16 (2) 256 (3) $\frac{1}{256}$ (4) 16^{14}

.9 $\frac{3 \cdot 3^{-5}}{3^{-8}} = ?$

(1) 1 (2) 81 (3) $\frac{1}{81}$ (4) 3^{-12}

.10 $\left(3^5\right)^{\frac{2}{5}} = ?$

(1) 243 (2) 27 (3) 3 (4) 9

.11 $2^6 \cdot 5^6 = ?$

(1) 1,000 (2) 10,000 (3) 100,000 (4) 1,000,000

.12 $\frac{6^5}{2^5} = ?$

(1) 81 (2) 32 (3) 243 (4) 216

.13 $\frac{6^3}{12^3} = ?$

(1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{1}{4}$ (3) $\frac{1}{6}$ (4) $\frac{1}{8}$

.14 נתון: $a^b = 1$

מה מהבאים לא ייתכן?

(1) $a = -1$ (2) $b = 0$ (3) $b = 3$ (4) $a = 0$

---

15. נתון: $a^b = b^a$, $0 < a < b$

$a \cdot b = ?$

(1) 16 (2) 2 (3) 8 (4) 4

תשובות

שאלה	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
תשובה	4	2	1	3	1	2	2	2	2	4

שאלה	11	12	13	14	15
תשובה	4	3	4	4	3

1. תשובה (4) נכונה

$0^{\pi} + \pi^{1} = 0 + \pi = \pi$

---

2. תשובה (2) נכונה

$1^{\pi} + \pi^{0} = 1 + 1 = 2$

---

3. תשובה (1) נכונה

$-(-5)^3 = -(-125) = 125$

---

4. תשובה (3) נכונה

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-4} = \left(\frac{3}{2}\right)^{4} = \frac{3^4}{2^4} = \frac{81}{16}$$

---

5. תשובה (1) נכונה

$$(-2)^{-4} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{4} = \frac{1^4}{2^4} = \frac{1}{16}$$

---

6. תשובה (2) נכונה

$13^{-6} \cdot 13^{10} \cdot 13^{-2} = 13^{-6+10-2} = 13^2 = 169$

---

7. תשובה (2) נכונה

$3^{x+2} = 3^x \cdot 3^2 = 9 \cdot 3^x$

---

8. תשובה (2) נכונה

$$\frac{16^8}{16^6}=16^{8-6}=16^2=256$$

---

9. תשובה (2) נכונה

$$\frac{3\cdot 3^{-5}}{3^{-8}}=\frac{3^{1+(-5)}}{3^{-8}}=\frac{3^{-4}}{3^{-8}}=3^{-4-8}=3^4=81$$

---

10. תשובה (4) נכונה

$$(3^5)^{\frac{2}{5}}=3^{5\cdot\frac{2}{5}}=3^2=9$$

---

11. תשובה (4) נכונה

$$2^6\cdot 5^6=(2\cdot 5)^6=10^6=1{,}000{,}000$$

שימו לב, כאשר מעלים את 10 בחזקה כלשהי, מספר האפסים בתוצאה יהיה שווה לחזקה.

---

12. תשובה (3) נכונה

$$\frac{6^5}{2^5}=\left(\frac{6}{2}\right)^5=3^5=243$$

---

13. תשובה (4) נכונה

$$\frac{6^3}{12^3}=\left(\frac{6}{12}\right)^3=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$$

---

14. תשובה (4) נכונה

נבדוק את התשובות במטרה לפסול 3 מהן. ניתן לפסול תשובה אם נראה שהיא דווקא תיתכן.

<u>נבדוק את תשובה (1) :</u> $a = -1$
הנתון יתקיים אם $b = 2$ למשל (או כל מספר זוגי אחר, שיביא לכך שהתוצאה תהיה חיובית).

$$(-1)^2 = 1$$

התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (2) :</u> $b = 0$
הנתון יתקיים עבור כל ערך של a (למעט $a = 0$).

$$A^0 = 1$$

התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (3) :</u> $b = 3$
הנתון יתקיים אם $a = 1$.

$$1^3 = 1$$

התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (4) :</u> $a = 0$
לא ייתכן שהנתון יתקיים במצב זה, שכן 0 בחזקת כל מספר חיובי שווה ל-0 (והוא לא מוגדר בחזקה אחרת).

$$0^b \neq 1$$

תשובה נכונה.

---

15. תשובה (3) נכונה

נתון: $a^b = b^a$, $0 < a < b$

ידוע לנו כי שני המספרים החיוביים השונים שמקיימים נתון זה הם 2 ו-4 ($2^4 = 4^2$). מכפלתם היא 8 ($2 \cdot 4$).

כללי שורשים

שורשים

פעולת השורש היא הפעולה ההפוכה לפעולת החזקה.

למשל, $\sqrt[3]{8}$ שווה למספר שאם נעלה אותו בחזקת 3 נקבל 8 (המספר 2).
המספר שנמצא מתחת לשורש נקרא בסיס (8), והמספר שנמצא מעל השורש (מחוצה לו) נקרא מעריך או מציין (3). כאשר מופיע שורש ללא מעריך, המעריך הוא 2.

שימו לב! בבחינה הפסיכומטרית, שורש של מספר חיובי הוא תמיד חיובי.
למשל, $\sqrt{25}$ שווה ל-5 ולא ל- (-5), למרות שאם $x^2 = 25$ אז x יכול להיות גם 5 וגם (-5).

כללים

שורש של 1 תמיד שווה ל-1 (בכל מעריך)	$\sqrt[a]{1} = 1$
שורש של אפס תמיד שווה לאפס (בכל מעריך)	$\sqrt[a]{0} = 0$
אין שורש עם מעריך זוגי למספר שלילי	$x < 0 \quad , \quad \sqrt[4]{x} = \emptyset$
המרת שורש לחזקה	$\sqrt[b]{x^a} = \left(\sqrt[b]{x}\right)^a = x^{\frac{a}{b}}$
שורש וחזקה זהים מבטלים זה את זה	$\sqrt[a]{x^a} = x^{\frac{a}{a}} = x$
ניתן לפרק שורש לגורמים שלו, ולהיפך	$\sqrt[a]{x \cdot y} \Leftrightarrow \sqrt[a]{x} \cdot \sqrt[a]{y}$
שורש של מספר כפול עצמו מתבטל	$\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} \Leftrightarrow x$
בחילוק מעריכים זהים מחלקים את הבסיסים	$\frac{\sqrt[a]{x}}{\sqrt[a]{y}} = \sqrt[a]{\frac{x}{y}}$
בשורש מעל שורש נכפול את המעריכים	$\sqrt[a]{\sqrt[b]{x}} = \sqrt[a \cdot b]{x}$
הכנסת כופל לשורש	$x \cdot \sqrt[a]{y} = \sqrt[a]{x^a \cdot y}$
על מנת להיפטר משורש במשוואה נעלה את שני האגפים בריבוע	$\sqrt{x-5} = 2 \quad /^2$ $x - 5 = 4 \Rightarrow x = 9$
הערכת סדר גודל:	$\sqrt{2} \approx 1.4 \qquad \sqrt{3} \approx 1.7 \qquad \sqrt{10} \approx \pi$

$$\mathbf{x = \sqrt{x}} \quad \Leftarrow \quad \mathbf{x = 0} \quad \textbf{או} \quad \mathbf{x = 1}$$

טבלת שורשים - ללמוד בעל-פה

טיפ - מספיק ללמוד את טבלת החזקות בעל-פה. אין צורך ללמוד גם את טבלת השורשים בעל-פה שכן שורש הוא בדיוק הפעולה ההפוכה מחזקה.

$\sqrt{4}=2$	$\sqrt[3]{8}=2$	$\sqrt[4]{16}=2$	$\sqrt[5]{32}=2$	$\sqrt[6]{64}=2$
$\sqrt{9}=3$	$\sqrt[3]{27}=3$	$\sqrt[4]{81}=3$	$\sqrt[5]{243}=3$	
$\sqrt{16}=4$	$\sqrt[3]{64}=4$	$\sqrt[4]{256}=4$		
$\sqrt{25}=5$	$\sqrt[3]{125}=5$	$\sqrt[4]{625}=5$		
$\sqrt{36}=6$	$\sqrt[3]{216}=6$			
$\sqrt{49}=7$	$\sqrt[3]{343}=7$			
$\sqrt{64}=8$				
$\sqrt{81}=9$				
$\sqrt{100}=10$				
$\sqrt{121}=11$				
$\sqrt{144}=12$				
$\sqrt{169}=13$				
$\sqrt{196}=14$				
$\sqrt{225}=15$				
$\sqrt{256}=16$				
$\sqrt{289}=17$				
$\sqrt{324}=18$				
$\sqrt{361}=19$				
$\sqrt{400}=20$				

תרגול - כללי שורשים

1. $\sqrt[7]{1}-\sqrt[7]{0}-\sqrt[7]{-1}=?$

(1) 1 (2) 2 (3) 0 (4) -1

---

2. $\sqrt[4]{-81}=?$

(1) -9 (2) -3 (3) 3 (4) אין פתרון

---

3. $\sqrt[3]{7^6}=?$

(1) $\sqrt{7}$ (2) 7 (3) 343 (4) 49

---

4. $16^{\frac{1}{4}}=?$

(1) 1 (2) 2 (3) 8 (4) 4

---

5. $\sqrt{12}\cdot\sqrt{3}=?$

(1) 6 (2) 8 (3) 3 (4) 4

---

6. $\sqrt{23}\cdot\sqrt{23}=?$

(1) 1 (2) 0 (3) 23 (4) 46

---

7. $\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{4}=?$

(1) 1 (2) 12 (3) 8 (4) 4

---

8. $\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{2}}=?$

(1) 16 (2) 2 (3) 8 (4) 4

.9 $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{72}} = ?$

(1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{1}{4}$ (3) $\frac{1}{6}$ (4) $\frac{1}{8}$

.10 $\sqrt[2.5]{\sqrt[2]{32}} = ?$

(1) 1 (2) 2 (3) 8 (4) 4

.11 $5 \cdot \sqrt{3} = ?$

(1) $\sqrt{8}$ (2) $\sqrt{15}$ (3) $\sqrt{45}$ (4) $\sqrt{75}$

.12 $2 \cdot \sqrt[3]{5} = ?$

(1) $\sqrt[3]{10}$ (2) $\sqrt[3]{250}$ (3) $\sqrt[3]{7}$ (4) $\sqrt[3]{40}$

.13 מי מהבאים הוא הקטן ביותר?

(1) $\sqrt{8}$ (2) $\sqrt[3]{28}$ (3) 3 (4) π

.14 מי מהבאים הכי קרוב בערכו ל-$\sqrt{2}$?

(1) 1.6 (2) 1.5 (3) 1.3 (4) 1.4

.15 נתון: $\sqrt{x} = x$

מספר הפתרונות של המשוואה הוא -

(1) 1 (2) 2 (3) 0 (4) 4

תשובות

שאלה	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
תשובה	2	4	4	2	1	3	4	4	3	2

שאלה	11	12	13	14	15
תשובה	4	4	1	4	2

1. תשובה (2) נכונה

$$\sqrt[7]{1}-\sqrt[7]{0}-\sqrt[7]{-1}=1-0-(-1)=1+1=2$$

---

2. תשובה (4) נכונה

לא ניתן להוציא שורש זוגי למספר שלילי, שכן לא קיים מספר שהעלאתו בחזקה זוגית תביא לתוצאה שלילית.
כלומר, אין פתרון.

---

3. תשובה (4) נכונה

$$\sqrt[3]{7^6}=7^{\frac{6}{3}}=7^2=49$$

---

4. תשובה (2) נכונה

$$16^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{16^1}=\sqrt[4]{16}=2$$

---

5. תשובה (1) נכונה

$$\sqrt{12}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{12\cdot3}=\sqrt{36}=6$$

---

6. תשובה (3) נכונה

$$\sqrt{23}\cdot\sqrt{23}=\left(\sqrt{23}\right)^2=23$$

---

7. תשובה (4) נכונה

$$\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{4}=\left(\sqrt[3]{4}\right)^3=4$$

---

8. תשובה (4) נכונה

$$\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{32}{2}}=\sqrt{16}=4$$

---

9. תשובה (3) נכונה

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{72}}=\sqrt{\frac{2}{72}}=\sqrt{\frac{1}{36}}=\frac{1}{6}$$

---

10. תשובה (2) נכונה

$$\sqrt[2.5]{\sqrt[2]{32}}=\sqrt[5]{32}=2$$

---

11. תשובה (4) נכונה

$$5\cdot\sqrt{3}=\sqrt{25}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{25\cdot 3}=\sqrt{75}$$

---

12. תשובה (4) נכונה

$$2\cdot\sqrt[3]{5}=\sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{5}=\sqrt[3]{8\cdot 5}=\sqrt[3]{40}$$

---

13. תשובה (1) נכונה

עלינו לקבוע מי מהבאים הוא הקטן ביותר. תחילה, נשווה בין תשובה (3) לתשובה (4), מפני שמדובר בשני ערכים מוכרים. ידוע לנו כי π גדול מ-3 ($\pi = 3.14\ldots$) ולכן תשובה (4) נפסלת.

כעת, נשווה בין תשובה (3) לתשובה (2). 3 שווה ל- $\sqrt[3]{27}$. אנו יודעים ש- $\sqrt[3]{28}$ גדול מ- $\sqrt[3]{27}$, ולכן $\sqrt[3]{28}$ גדול מ-3. תשובה (2) נפסלת.

נשווה בין שתי התשובות הנותרות, תשובה (3) ותשובה (1). 3 שווה ל- $\sqrt{9}$. אנו יודעים ש- $\sqrt{8}$ קטן מ- $\sqrt{9}$, ולכן $\sqrt{8}$ קטן מ-3. תשובה (3) נפסלת.

תשובה (1) נכונה.

---

14. תשובה (4) נכונה

ערכו של $\sqrt{2}$ הוא בקירוב 1.4. זהו ערך שעלינו להכיר בעל פה.

---

15. תשובה (2) נכונה

המספרים היחידים שמקיימים משוואה זו (כלומר, שווים לשורש של עצמם), הם 0 ו-1. לפיכך, למשוואה יש 2 פתרונות.

ביטויים ומשוואות עם חזקות ושורשים

על מנת לחבר/לחסר שורשים אפשר:

$$\sqrt{8}+\sqrt{18}=$$

1) לפרקם לגורמים -

$$\sqrt{4}\cdot\sqrt{2}+\sqrt{9}\cdot\sqrt{2}=2\sqrt{2}+3\sqrt{2}=5\sqrt{2}$$

2) להוציא גורם משותף -

$$\sqrt{2}\left(\sqrt{4}+\sqrt{9}\right)=\sqrt{2}(2+3)=5\sqrt{2}$$

חלוקה בשורש

בשאלות רבות (בעיקר בגיאומטריה בחישובים של משפט פיתגורס), נצטרך לחלק מספר לשורש, למשל:

$$\frac{6}{\sqrt{2}}=\frac{3\cdot 2}{\sqrt{2}}=\frac{3\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$$

הדרך המהירה לחשב ביטוי כזה היא להתעלם מהשורש, לחלק את המונה במכנה, ולאחר מכן "להוסיף" את השורש לתוצאה (בכפל), למשל:

$$\frac{6}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$$

תחילה חילקנו את 6 ב-2 (התעלמנו מהשורש), קיבלנו 3, ולזה הוספנו את $\sqrt{2}$.

פירוק לגורמים - חזקות

בשאלות בהן עלינו לצמצם חזקות, מומלץ להמיר את כל הבסיסים לבסיס הקטן ביותר האפשרי (לפרק לגורמים ראשוניים).

דוגמה:

מה ערכו של הביטוי $\frac{9^8\cdot 8^{-3}}{3^{12}\cdot 4^{-3}}$?

פתרון -

נפרק את המספרים לבסיסים קטנים ככל שניתן, ונצמצם לפי חוקי חזקות (החזקה שבמונה פחות החזקה במכנה):

$$\frac{9^8\cdot 8^{-3}}{3^{12}\cdot 4^{-3}}=\frac{(3^2)^8\cdot(2^3)^{-3}}{3^{12}\cdot(2^2)^{-3}}=\frac{3^{16}\cdot 2^{-9}}{3^{12}\cdot 2^{-6}}=3^4\cdot 2^{-3}$$

שימו לב: את התוצאה ניתן לכתוב גם כך:

$$3^4\cdot 2^{-3}=\frac{3^4}{2^3}$$

פירוק לגורמים - שורשים

על מנת לחבר/לחסר שורשים, בדרך כלל יהיה עלינו לפרק אותם.

דוגמה:

מה ערכו של הביטוי $\frac{\sqrt{18}+\sqrt{18}}{\sqrt{50}-\sqrt{8}}=?$

פתרון -
על מנת לצמצם את השבר עלינו "לפרק" את השורשים ולחבר אותם (הוצאת כופל משורש):

$$\frac{\sqrt{18}+\sqrt{18}}{\sqrt{50}-\sqrt{8}}=\frac{\sqrt{9}\cdot\sqrt{2}+\sqrt{9}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{25}\cdot\sqrt{2}-\sqrt{4}\cdot\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}+3\sqrt{2}}{5\sqrt{2}-2\sqrt{2}}=\frac{6\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}=2$$

דרך נוספת - הוצאת גורם משותף:

$$\frac{\sqrt{18}+\sqrt{18}}{\sqrt{50}-\sqrt{8}}=\frac{2\sqrt{18}}{\sqrt{2}\cdot\left(\sqrt{25}-\sqrt{4}\right)}=\frac{2\sqrt{18}}{3\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{9}}{3\cdot 1}=2$$

משוואות מעריכיות

על מנת לפתור משוואה מעריכית (משוואה עם חזקות, כאשר הנעלם מופיע בחזקה) עלינו להשוות את הבסיסים, ולאחר מכן להשוות בין החזקות. בשאלות אלו חשוב לשלוט במעבר בין מספר כלשהו להופכי שלו, על ידי שינוי סימן החזקה.

דוגמה:

נתון: $4^{3x}=\left(\frac{1}{8}\right)^{5-3x}$

$x=?$

(1) 5 (2) 2 (3) 3 (4) 4

פתרון -
תחילה נשווה את הבסיסים בשני אגפי המשוואה:

$$4^{3x}=\left(\frac{1}{8}\right)^{5-3x} \Rightarrow (2^2)^{3x}=(2^{-3})^{5-3x} \Rightarrow 2^{6x}=2^{-15+9x}$$

כעת, כאשר הבסיסים שווים, ניתן להשוות בין החזקות:

$$6x=-15+9x \quad\Rightarrow\quad 15=3x \quad\Rightarrow\quad 5=x$$

משוואות עם שורשים

על מנת לפתור משוואה עם שורשים עלינו להעלות את שני אגפי המשוואה בריבוע.

דוגמה:

נתון: $x\sqrt{3} = 3\sqrt{x}$, $x \neq 0$

$x = ?$

(1) 1 (2) $\sqrt{3}$ (3) 3 (4) 9

פתרון -

נעלה את שני אגפי המשוואה בריבוע:

$$x\sqrt{3} = 3\sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad x^2 \cdot 3 = 9 \cdot x \quad \xrightarrow{:3x} \quad x = 3$$

דוגמה:

נתונה המשוואה: $\sqrt{x-5} = 2$

$x = ?$

פתרון -

נעלה בריבוע את שני האגפים:

$$\sqrt{x-5} = 2 \quad /^2$$

$$x - 5 = 4 \quad \Rightarrow \quad x = 9$$

תרגול - ביטויים ומשוואות עם חזקות ושורשים

1. $\frac{4^5}{20^2} = ?$

(1) $\frac{16}{25}$ (2) $\frac{64}{25}$ (3) $\frac{16}{5}$ (4) $\frac{64}{5}$

---

2. $2^2 \cdot 4^3 = ?$

(1) 2^5 (2) 2^6 (3) 2^7 (4) 2^8

---

3. $\frac{16^2 \cdot 8^3}{4^5 \cdot 2^4} = ?$

(1) 2^5 (2) 2^6 (3) 2^3 (4) 2^4

---

4. נתון: $11^3 = 11^{x+5}$

$x = ?$

(1) 1 (2) 2 (3) -1 (4) -2

---

5. נתון: $5^6 = 25^{x-4}$

$x = ?$

(1) 7 (2) 2 (3) 3 (4) 8

---

6. נתון: $8^4 = 4^3 \cdot 2^x$

$x = ?$

(1) 6 (2) 2 (3) 8 (4) 4

---

7. נתון: $\left(\frac{1}{7}\right)^2 = 7^{x-5}$

$x = ?$

(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4

---

8. $\frac{6}{\sqrt{3}} = ?$

(1) $3\sqrt{2}$ (2) $2\sqrt{2}$ (3) $3\sqrt{3}$ (4) $2\sqrt{3}$

---

9. $\frac{7\sqrt{5}}{\sqrt{35}} = ?$

(1) 1 (2) $\sqrt{5}$ (3) $\sqrt{7}$ (4) 7

---

10. $\sqrt{8} = ?$

(1) $4\sqrt{2}$ (2) $2\sqrt{2}$ (3) $3\sqrt{2}$ (4) $2\sqrt{3}$

---

11. $\sqrt{45} = ?$

(1) $3\sqrt{5}$ (2) $2\sqrt{5}$ (3) $3\sqrt{3}$ (4) $4\sqrt{3}$

---

12. $\sqrt{2} + \sqrt{8} = ?$

(1) $4\sqrt{2}$ (2) $2\sqrt{2}$ (3) $3\sqrt{2}$ (4) $2\sqrt{3}$

---

13. $\sqrt{75} - \sqrt{12} = ?$

(1) $3\sqrt{2}$ (2) $2\sqrt{3}$ (3) $3\sqrt{3}$ (4) $4\sqrt{3}$

---

14. נתון: $\sqrt{2x+17}=5$

$x = ?$

(1) 5 (2) 6 (3) 3 (4) 4

---

15. נתון: $\sqrt{3x+5}=\sqrt{50}$

$x = ?$

(1) 15 (2) 16 (3) 13 (4) 14

תשובות

שאלה	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
תשובה	2	4	3	4	1	1	3	4	3	2

שאלה	11	12	13	14	15
תשובה	1	3	3	4	1

1. תשובה (2) נכונה

$$\frac{4^5}{20^2}=\frac{4^5}{(4\cdot 5)^2}=\frac{4^5}{4^2\cdot 5^2}=\frac{4^{5-2}}{5^2}=\frac{4^3}{5^2}=\frac{64}{25}$$

---

2. תשובה (4) נכונה

$$2^2\cdot 4^3=2^2\cdot(2^2)^3=2^2\cdot 2^6=2^8$$

---

3. תשובה (3) נכונה

$$\frac{16^2\cdot 8^3}{4^5\cdot 2^4}=\frac{(2^4)^2\cdot(2^3)^3}{(2^2)^5\cdot 2^4}=\frac{2^8\cdot 2^9}{2^{10}\cdot 2^4}=\frac{2^{17}}{2^{14}}=2^3$$

---

4. תשובה (4) נכונה

$$11^3=11^{x+5}\quad\Rightarrow\quad 3=x+5\quad\Rightarrow\quad -2=x$$

---

5. תשובה (1) נכונה

$$5^6=25^{x-4}\quad\Rightarrow\quad 5^6=(5^2)^{x-4}\quad\Rightarrow\quad 5^6=5^{2x-8}\quad\Rightarrow$$

$$6=2x-8\quad\Rightarrow\quad 14=2x\quad\Rightarrow\quad 7=x$$

---

6. תשובה (1) נכונה

$$8^4 = 4^3 \cdot 2^x \quad\Longrightarrow\quad (2^3)^4 = (2^2)^3 \cdot 2^x \quad\Longrightarrow\quad 2^{3\cdot4} = 2^{2\cdot3} \cdot 2^x \quad\Longrightarrow$$

$$2^{12} = 2^6 \cdot 2^x \quad\Longrightarrow\quad 2^{12} = 2^{6+x} \quad\Longrightarrow\quad 12 = 6 + x \quad\Longrightarrow\quad x = 6$$

דרך נוספת:

$$8^4 = 4^3 \cdot 2^x \quad\Longrightarrow\quad (4\cdot2)^4 = 4^3 \cdot 2^x \quad\Longrightarrow\quad 4^4 \cdot 2^4 = 4^3 \cdot 2^x \quad\Longrightarrow$$

$$4 \cdot 2^4 = 2^x \quad\Longrightarrow\quad 2^2 \cdot 2^4 = 2^x \quad\Longrightarrow\quad 2^{2+4} = 2^x \quad\Longrightarrow\quad x = 6$$

---

7. תשובה (3) נכונה

$$\left(\frac{1}{7}\right)^2 = 7^{x-5} \quad\Longrightarrow\quad 7^{-2} = 7^{x-5} \quad\Longrightarrow\quad -2 = x - 5 \quad\Longrightarrow\quad 3 = x$$

---

8. תשובה (4) נכונה

$$\frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{2\cdot3}{\sqrt{3}} = \frac{2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\cdot\sqrt{3}\cdot1}{1} = 2\sqrt{3}$$

---

9. תשובה (3) נכונה

$$\frac{7\sqrt{5}}{\sqrt{35}} = \frac{7\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{7}\cdot\sqrt{5}} = \frac{7}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{1} = \sqrt{7}$$

---

10. תשובה (2) נכונה

$$\sqrt{8} = \sqrt{4\cdot2} = \sqrt{4}\cdot\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

---

11. תשובה (1) נכונה

$$\sqrt{45} = \sqrt{9\cdot5} = \sqrt{9}\cdot\sqrt{5} = 3\sqrt{5}$$

---

12. תשובה (3) נכונה

$$\sqrt{2} + \sqrt{8} = \sqrt{2} + \sqrt{4\cdot2} = \sqrt{2} + \sqrt{4}\cdot\sqrt{2} = \sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

---

13. תשובה (3) נכונה

$$\sqrt{75} - \sqrt{12} = \sqrt{25\cdot3} - \sqrt{4\cdot3} = \sqrt{25}\cdot\sqrt{3} - \sqrt{4}\cdot\sqrt{3} = 5\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$$

---

14. תשובה (4) נכונה

נעלה את שני האגפים בריבוע:

$\sqrt{2x+17}=5$

$2x+17=25$

$2x=8$

$x=4$

---

15. תשובה (1) נכונה

נעלה את שני האגפים בריבוע:

$\sqrt{3x+5}=\sqrt{50}$

$3x+5=50$

$3x=45$

$x=15$

תרגול מסכם יסודות

1. $x^{x+1} \cdot x^{-x} = ?$, $0 < x$

(1) 1 (2) 0 (3) x (4) $\frac{1}{x}$

---

2. נתון: $\sqrt{x^2} = 2$

x יכול להיות שווה ל-

(1) -1 (2) -2 (3) $\frac{1}{2}$ (4) 4

---

3. $\frac{a^{a+1}}{a} = ?$, $0 < a$

(1) $a + 1$ (2) a^a (3) $(a+1)^a$ (4) a^{a+2}

---

4. $8^x \cdot 4^x \cdot 2^x = ?$

(1) 2^{3x}
(2) 2^{4x}
(3) 2^{6x}
(4) 4^{2x}

---

5. $\frac{9^2 \cdot 3^6}{27} = ?$

(1) 3
(2) 3^5
(3) 3^7
(4) 3^{10}

---

6. $25^4 = ?$

(1) 5^8 (2) 50^2 (3) $(5^2)^6$ (4) 125^2

---

7. נתון: $3^{n+1} = 243$

$n = ?$

(1) 5
(2) 2
(3) 3
(4) 4

---

8. $\left(3^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = ?$

(1) $3^{\sqrt{2}}$
(2) $9^{\sqrt{2}}$
(3) 3
(4) 9

---

9. $2^{x} \cdot 2^{-x} = ?$ $(0 < x)$

(1) 1 (2) 2 (3) $\frac{1}{2}$ (4) 4

---

10. נתון: $x = y = 5$

$x^{y-x}y^{x-y} = ?$

(1) 1 (2) 0 (3) 5 (4) 25

---

11. $\frac{3a^9c^4}{a^3c^2} = ?$ $0 < a , c$

(1) $3a^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{2}}$
(2) $3a^2c$
(3) $3a^6c^2$
(4) $3a^3c^2$

---

12. נתון: $x = (5^3)^4 \cdot 5^{-14}$

$x = ?$

(1) -5 (2) -25 (3) $\frac{1}{5}$ (4) $\frac{1}{25}$

---

13. $x^{\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{3}{2}} = ?$, $0 < x$

(1) 1

(2) x

(3) $x^{\frac{4}{9}}$

(4) $x^{\frac{13}{6}}$

---

14. נתון: $4^x \cdot 5^x \cdot 6^x = \sqrt{120}$

$x = ?$

(1) 1 (2) 2 (3) $\frac{1}{3}$ (4) $\frac{1}{2}$

---

15. נתון: $x + y + z = 6$

$2^x \cdot 2^y \cdot 2^z = ?$

(1) 64 (2) 12 (3) 36 (4) אי-אפשר לדעת מהנתונים

---

16. $\sqrt{72} = ?$

(1) $6\sqrt{2}$

(2) $3\sqrt{6}$

(3) $3\sqrt{12}$

(4) $4\sqrt{3}$

---

17. נתון כי לכל $x > 1$, ועבור a ו-b מסוימים, מתקיים- $(x^a)^b = x^{a+b}$.

מה מהבאים נכון בהכרח?

(1) $a + b = 0$
(2) $a \cdot b = a + b$
(3) $a^b = a + b$
(4) אף לא אחת מהתשובות נכונה בהכרח

---

18. $\sqrt[4]{3^6} = ?$

(1) $\sqrt{3}$ (2) 3^2 (3) $3\sqrt{3}$ (4) $\sqrt[4]{3}$

---

19. נתון: $\sqrt{50x} = \sqrt{5}x$ $(0 < x)$

$x = ?$

(1) 10 (2) $\sqrt{10}$ (3) 5 (4) $\sqrt{5}$

---

20. רותם: 6 גדול מ- $\sqrt{3} + \sqrt{15}$
תומר: $5\sqrt{2}$ גדול מ- $3\sqrt{5}$

איזו מהטענות הבאות נכונה בהכרח?

(1) רק רותם צודק
(2) רק תומר צודק
(3) גם רותם וגם תומר טועים
(4) גם רותם וגם תומר צודקים

תשובות

שאלה	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
תשובה	3	2	2	3	3	1	4	4	1	1

שאלה	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
תשובה	3	4	4	4	1	1	2	3	1	4

1. תשובה (3) נכונה. שאלה 1 מתוך 20 בפרק.

$$x^{x+1} \cdot x^{-x} = x^{x+1-x} = x^1 = x$$

---

2. תשובה (2) נכונה. שאלה 1 מתוך 20 בפרק.

$$\sqrt{x^2} = 2$$

נעלה את שני האגפים בריבוע:

$$x^2 = 4$$

x יכול להיות 2 או 2-, ולכן תשובה (2) נכונה.

---

3. תשובה (2) נכונה. שאלה 2 מתוך 20 בפרק.

$$\frac{a^{a+1}}{a} = a^{a+1-1} = a^a$$

---

4. תשובה (3) נכונה. שאלה 2 מתוך 20 בפרק.

$$8^x \cdot 4^x \cdot 2^x$$

על מנת לפשט את הביטוי כך שהוא יהיה דומה יותר לתשובות, נמיר את כל החזקות שלעיל לבסיס 2:

$$8^x \cdot 4^x \cdot 2^x = (2^3)^x \cdot (2^2)^x \cdot 2^x = 2^{3x} \cdot 2^{2x} \cdot 2^x = 2^{6x}$$

---

5. תשובה (3) נכונה. שאלה 2 מתוך 20 בפרק.

$$\frac{9^2 \cdot 3^6}{27}$$

על מנת לפשט את הביטוי, נמיר את כל החזקות לבסיס משותף 3:

$$\frac{(3^2)^2 \cdot 3^6}{3^3} = \frac{3^4 \cdot 3^6}{3^3} = \frac{3^{10}}{3^3} = 3^7$$

---

6. תשובה (1) נכונה. שאלה 3 מתוך 20 בפרק.

$25^4 = (5^2)^4 = 5^8$

---

7. תשובה (4) נכונה. שאלה 3 מתוך 20 בפרק.

$3^{n+1} = 243$

נבטא את המספר 243 כחזקה בעלת בסיס 3, כדי שנוכל להשוות בין המעריכים:

$3^{n+1} = 3^5$

כאמור, נשווה בין המעריכים:

$n + 1 = 5$

$n = 4$

שימו לב, אם אינכם יודעים מהו המעריך המתאים, ניתן לבדוק זאת:

$3^3 = 27$

$3^4 = 27 \cdot 3 = 81$

$3^5 = 81 \cdot 3 = 243$

---

8. תשובה (4) נכונה. שאלה 3 מתוך 20 בפרק.

עלינו למצוא את ערך הביטוי $\left(3^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$

לפי חוקי חזקות, כאשר יש חזקה של חזקה, כופלים מעריכים:

$\left(3^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = 3^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = 3^2 = 9$

---

9. תשובה (1) נכונה. שאלה 4 מתוך 20 בפרק.

$2^x \cdot 2^{-x}$

נחבר את המעריכים:

$2^x \cdot 2^{-x} = 2^{x-x} = 2^0 = 1$

---

10. תשובה (1) נכונה. שאלה 5 מתוך 20 בפרק.

ידוע: $x = y = 5$. נציב ערכים אלה בביטוי שהתבקשנו למצוא את ערכו:

$x^{y-x}y^{x-y} \quad \Rightarrow \quad 5^{5-5} \cdot 5^{5-5} = 5^0 \cdot 5^0 = 1 \cdot 1 = 1$

---

11. תשובה (3) נכונה. שאלה 5 מתוך 20 בפרק.

נחסר מעריכים של בסיסים זהים:

$\frac{3a^9c^4}{a^3c^2} = 3a^6c^2$

---

12. תשובה (4) נכונה. שאלה 6 מתוך 20 בפרק.

נפשט את המשוואה:

$$x = (5^3)^4 \cdot 5^{-14} = 5^{12} \cdot 5^{-14} = 5^{-2}$$

$$5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$$

---

13. תשובה (4) נכונה. שאלה 6 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – פתרון מתמטי

$$x^{\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{3}{2}}$$

בכפל חזקות עם בסיסים זהים יש לחבר את המעריכים, ולכן:

$$x^{\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{3}{2}} = x^{\frac{2}{3}+\frac{3}{2}}$$

ניצור מכנה משותף 6 בחזקה:

$$x^{\frac{2}{3}+\frac{3}{2}} = x^{\frac{4}{6}+\frac{9}{6}} = x^{\frac{13}{6}}$$

דרך ב' – הערכת סדר גודל

אחת החזקות של x בביטוי המקורי היא $\frac{3}{2}$, כלומר 1.5. בכפל חזקות עם בסיסים זהים יש לחבר את המעריכים, ולכן החזקה בביטוי הסופי בהכרח תהיה גדולה מ- 1.5. התשובה היחידה שבה החזקה גדולה מ-1 היא תשובה (4).

---

14. תשובה (4) נכונה. שאלה 7 מתוך 20 בפרק.

כדי למצוא את גודלו של x, תחילה נפשט את הביטוי:

$$4^x \cdot 5^x \cdot 6^x = \sqrt{120}$$

$$(4 \cdot 5 \cdot 6)^x = \sqrt{120}$$

$$120^x = \sqrt{120}$$

שורש הוא למעשה חזקת $\frac{1}{2}$:

$$120^x = 120^{\frac{1}{2}}$$

הבסיסים זהים ולכן ניתן להשוות מעריכים:

$$x = \frac{1}{2}$$

---

15. תשובה (1) נכונה. שאלה 8 מתוך 20 בפרק.

תחילה, נפשט את הביטוי שאת ערכו התבקשנו למצוא:

$$2^x \cdot 2^y \cdot 2^z = 2^{x+y+z}$$

ידוע כי $x + y + z = 6$. נציב זאת בביטוי שלעיל:

$$2^{x+y+z} \quad \Rightarrow \quad 2^6 = 64$$

---

16. תשובה (1) נכונה. שאלה 9 מתוך 20 בפרק.

$\sqrt{72}$

נבטא את 72 כמכפלה של מספרים שהשורש שלהם ידוע לנו:

$\sqrt{36 \cdot 2} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$

---

17. תשובה (2) נכונה. שאלה 11 מתוך 20 בפרק.

נפשט את הביטוי במטרה ללמוד על הקשר בין a ל-b.

$(x^a)^b = x^{a+b} \quad \Rightarrow \quad x^{a \cdot b} = x^{a+b}$

הבסיסים זהים ולכן אנו יכולים להשוות מעריכים:

$a \cdot b = a + b$

---

18. תשובה (3) נכונה. שאלה 12 מתוך 20 בפרק.

תחילה, נמיר את השורש לחזקה:

$\sqrt[4]{3^6} = 3^{\frac{6}{4}} = 3^{\frac{3}{2}}$

כעת נמיר בחזרה לשורש:

$3^{\frac{3}{2}} = \left(\sqrt[2]{3}\right)^3 = \left(\sqrt{3}\right)^3$

מאחר שאין תשובה כזו, נמשיך לפשט את הביטוי:

$\left(\sqrt{3}\right)^3 = \left(\sqrt{3}\right)^2 \cdot \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$

---

19. תשובה (1) נכונה. שאלה 13 מתוך 20 בפרק.

$\sqrt{50x} = \sqrt{5}x$

נעלה את שני האגפים בריבוע:

$50x = 5x^2$

נחלק את שני האגפים ב-5:

$10x = x^2$

מאחר שנתון כי $x > 0$, ניתן לחלק ב-x, שכן הוא אינו שווה ל-0:

$10 = x$

---

20. תשובה (4) נכונה. שאלה 14 מתוך 20 בפרק.

נבדוק כל אחת מהטענות, ונראה מי צודק.

כדי לקבוע האם רותם צודק, נבצע הערכת סדר גודל וננסה לקבוע מה ערכו של הביטוי $\sqrt{15}+\sqrt{3}$.
איננו יודעים את ערכו של $\sqrt{15}$, אך נוכל לקבוע שהוא קטן במעט מ-4, זאת משום ש- $\sqrt{16}$ שווה ל-4 במדויק ו- $\sqrt{15}$ קטן ממנו. בנוגע ל- $\sqrt{3}$ אנו יודעים שערכו שווה בערך ל-1.7, אך גם כאן די לנו לקבוע שהוא קטן מ-2 (משום שהוא קטן מ-$\sqrt{4}$ שהוא שווה ל-2 בדיוק).
מכאן ש- $\sqrt{15}$ קטן מ-4, ו- $\sqrt{3}$ קטן מ-2, ולכן הסכום שלהם קטן מ-6. רותם צודק.

במקרה של תומר קשה לבצע הערכת סדר גודל כדי לקבוע האם הוא צודק, משום שאנו לא יודעים להעריך בכמה $\sqrt{5}$ גדול מ-2. לכן נצטרך להשתמש בשיטה אחרת. משום שאנו נדרשים לקבוע איזה מבין שני המספרים, המורכבים משורש, גדול יותר, נוכל לחשב את ערכו של כל מספר על ידי הכנסת הכופל לשורש:

$$5\sqrt{2}=\sqrt{25}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{25\cdot 2}=\sqrt{50}$$

$$3\sqrt{5}=\sqrt{9}\cdot\sqrt{5}=\sqrt{9\cdot 5}=\sqrt{45}$$

כמובן ש- $\sqrt{50}$ גדול מ- $\sqrt{45}$, ולכן נוכל לקבוע ש- $5\sqrt{2}$ גדול מ- $3\sqrt{5}$. תומר צודק.

מצאנו ששניהם צודקים, תשובה (4) נכונה.

חזקות ושורשים - תרגול שאלות מבחינות אמת

1. $\sqrt{19a} \cdot \sqrt{19b} = ?$

(1) $19ab$

(2) $2ab\sqrt{19}$

(3) $19\sqrt{ab}$

(4) 19^2ab

---

2. **כל** מספר x מקיים: $(x^a)^a = x^a \cdot x^a$

a יכול להיות -

(1) 1 (2) 2 (3) -1 (4) $\frac{1}{2}$

---

3. נתון: $1 < n$

$\frac{2^n}{2n} = ?$

(1) $\frac{1}{n}$

(2) 2^{n-2}

(3) $\frac{2^{n-1}}{n}$

(4) $\frac{2^{n-2}}{n}$

---

4. $\frac{6^x}{2^{x+1} \cdot 3^{x-1}} = ?$

(1) 1

(2) $2^{x-1} \cdot 3^{x+1}$

(3) $\frac{3}{2}$

(4) $\frac{3^x}{2^x}$

פתרתי ____________ שאלות ב ____________ דקות, ____________ תשובות נכונות

5. נתון: a ו-c הם מספרים שלמים, $0 < a < c$.

$a^c = c^a$

$c = ?$

(1) 5 (2) 6 (3) 3 (4) 4

---

6. שטח ריבוע הוא $\sqrt{3}$ סמ"ר.

מה אורך צלע הריבוע (בס"מ)?

(1) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

(2) $\frac{1}{3}$

(3) 3

(4) $3^{\frac{1}{4}}$

---

7. $\frac{\sqrt{8}+\sqrt{2}}{\sqrt{8}-\sqrt{2}} = ?$

(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4

---

8. $\sqrt{2\sqrt{2}} = ?$

(1) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (2) $2^{\frac{1}{2}}$ (3) $2^{\frac{3}{4}}$ (4) $\frac{1}{(\sqrt{2})^3}$

---

9. x ו-y הם שני מספרים שאינם שליליים.

איזה תנאי נוסף צריך להתקיים עבור x ו-y

כדי שהשוויון $\sqrt{x}+\sqrt{y} = \sqrt{x+y}$ יהיה נכון **תמיד**?

(1) $x - y = 0$

(2) $0 < x \cdot y$

(3) $x = 0$ או $y = 0$

(4) אין צורך בתנאים נוספים

פתרתי ____________ שאלות ב ____________ דקות, ____________ תשובות נכונות

.10 לכל n, הביטוי $2^n - 2^{n-1}$ שווה ל-

(1) 2^{-n}

(2) 2

(3) $2^{\frac{n}{2}}$

(4) 2^{n-1}

.11 נתון: $a^b = -1$

a שווה בהכרח ל-

(1) -1

(2) $-b$

(3) $1-b$

(4) $\sqrt{b}$

.12 איזה מהיחסים הבאים **אינו** שווה ליחס $\sqrt{2} : 2$?

(1) $\sqrt{2} : 1$ (2) $\sqrt{8} : 2$ (3) $4 : \sqrt{8}$ (4) $16 : \sqrt{16}$

.13 נתון: $0 < A < B$

$$\frac{A-B}{\sqrt{B+A}} \cdot \frac{A+B}{\sqrt{B-A}} = ?$$

(1) $B^2 - A^2$

(2) $\sqrt{B-A}$

(3) $A-B$

(4) $-\sqrt{B^2 - A^2}$

פתרתי ____________ שאלות ב ____________ דקות, ____________ תשובות נכונות

14. $\left(\frac{2^{2a}}{2^x}\right)^x = 2^{\left(a^2\right)}$

x בהכרח שווה ל-

(1) 2
(2) a
(3) $2a$
(4) a^2

---

15. נתון: $\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{2} = \left(\frac{3}{2}\right)^{2x}$

$x = ?$

(1) 1 (2) $\frac{1}{2}$ (3) $\frac{1}{3}$ (4) $\frac{1}{4}$

---

16. $\frac{36^3 \cdot 6^2}{3^9 \cdot 2^6} = ?$

(1) $\frac{1}{6}$ (2) $\frac{2}{6}$ (3) $\frac{2}{3}$ (4) $\frac{4}{3}$

---

17. נתון: y הוא מספר שלם. $0 < y , x$

$x^{2y} = x^y$

$y^x = ?$

(1) y
(2) $\frac{1}{y}$
(3) $\frac{1}{y^2}$
(4) y^2

---

18. נתון: $2\sqrt{x} = 4^{-3}$

$x = ?$

(1) 4^{-7}
(2) 4^{6}
(3) 4^{-6}
(4) 4^{7}

פתרתי __________ שאלות ב __________ דקות, __________ תשובות נכונות

19. $\left(\frac{3^7-3^6}{2}\right)^2 = ?$

(1) $\left(\frac{3}{2}\right)^2$ (2) 3^{24} (3) 3^{12} (4) $\frac{3^2}{2}$

---

20. נתון: $1<x$, $n \neq 0$

$$\frac{x^n - x^{\frac{n}{2}}}{x^{\frac{n}{2}} - 1} = ?$$

(1) $x^{\frac{n}{2}}$ (2) $x^{\frac{n}{2}} - 1$ (3) x^n (4) $x^n - 1$

פתרתי ____________ שאלות ב ____________ דקות, ____________ תשובות נכונות

תשובות

שאלה	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
תשובה	3	2	3	3	4	4	3	3	3	4

שאלה	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
תשובה	1	4	4	2	4	4	1	1	3	1

פתרתי 20 שאלות - ______________ נכונות, ______________ אחוזי הצלחה

1. תשובה (3) נכונה. שאלה 5 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – פתרון מתמטי
נפשט את הביטוי הנתון:

$$\sqrt{19a}\cdot\sqrt{19b}=\sqrt{19}\cdot\sqrt{19}\cdot\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=19\sqrt{ab}$$

דרך ב' – הצבת מספרים
עלינו לפשט את הביטוי הנתון. נציב ערכים עבור a ו-b, במטרה להפוך את הפישוט לנוח יותר.
נציב $a=1\ ,\ b=2$:

$$\sqrt{19a}\cdot\sqrt{19b}\quad\Rightarrow\quad\sqrt{19\cdot1}\cdot\sqrt{19\cdot2}=\sqrt{19}\cdot\sqrt{19}\cdot\sqrt{2}=19\cdot\sqrt{2}$$

כעת, נציב גם בתשובות $a=1\ ,\ b=2$, ונחפש תשובה השווה ל- $19\sqrt{2}$. נשים לב שמכיוון שהשתמשנו בהצבת מספרים, עלינו לפסול 3 תשובות בטרם נוכל לסמן תשובה נכונה.

(1) $19ab \quad\Rightarrow\quad 19\cdot1\cdot2=38 \quad\Rightarrow$ לא מתאים, התשובה נפסלת

(2) $2ab\sqrt{19} \quad\Rightarrow\quad 2\cdot1\cdot2\cdot\sqrt{19}=4\sqrt{19} \quad\Rightarrow$ לא מתאים, התשובה נפסלת

(3) $19\sqrt{ab} \quad\Rightarrow\quad 19\sqrt{1\cdot2}=19\sqrt{2} \quad\Rightarrow$ **מתאים**

(4) $19^2ab \quad\Rightarrow\quad 19^2\cdot1\cdot2=19^2\cdot2 \quad\Rightarrow$ לא מתאים, התשובה נפסלת

פסלנו 3 תשובות ועל כן תשובה (3) נכונה.

2. תשובה (2) נכונה. שאלה 5 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – פתרון מתמטי

$$(x^a)^a = x^a \cdot x^a$$

באגף השמאלי יש חזקה של חזקה, ועל כן נכפול חזקות:

$$\mathbf{x^{a^2}} = x^a \cdot x^a$$

באגף הימני יש כפל עם בסיסים זהים, ועל כן נחבר את החזקות:

$$x^{a^2} = x^{\mathbf{a+a}}$$
$$x^{a^2} = x^{\mathbf{2a}}$$

כאשר הבסיסים זהים, ניתן להשוות בין החזקות.

$$a^2 = 2a$$

אסור לצמצם ב-a מכיוון שלא הוגדר $a \neq 0$.
מכאן שלמשוואה יש שני פתרונות $a = 0$ או $a = 2$. תשובה (2) נכונה.

דרך ב' – הצבת תשובות

$$(x^a)^a = x^a \cdot x^a$$

ניתן להציב את הערכים המוצעים בתשובות במקום a. על מנת להפוך את החישובים לפשוטים יותר, נציב מספר כלשהו גם במקום x, ונפסול כל תשובה שעבורה המשוואה אינה מתקיימת. נציב לדוגמה $x = 2$ (הצבה של $x = 1$ לא תעזור לנו לפסול תשובות).

$$(2^a)^a = 2^a \cdot 2^a$$

<u>נבדוק את תשובה (1)</u>:
נציב $a = 1$ במשוואה ונקבל:

$$(2^1)^1 = 2^1 \cdot 2^1$$
$$2 \neq 4$$

פסוק שקר, התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (2)</u>:
נציב $a = 2$ במשוואה ונקבל:

$$(2^2)^2 = 2^2 \cdot 2^2$$
$$4^2 = 4 \cdot 4$$
$$16 = 16$$

פסוק אמת, **מתאים**.
מכיוון שנשאלנו מה יכול להיות a, ברגע שמצאנו תשובה אפשרית ניתן לסמן.

תשובה (2) נכונה.

3. תשובה (3) נכונה. שאלה 6 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – פתרון מתמטי

נפשט את הביטוי הנתון, כך שהוא יהיה דומה יותר לתשובות. נשים לב כי בתשובות המכנה הוא n בלבד (ולא 2n), או שהוא הצטמצם לחלוטין. לכן, נשאף לצמצם חלק מהמכנה או את כולו.

$$\frac{2^n}{2n}=\frac{2^n}{2^1\cdot n}=\frac{2^n\cdot 2^{-1}}{n}=\frac{2^{n-1}}{n}$$

דרך ב' – הצבת מספרים

על מנת לפשט את הביטוי, נציב ערך נוח עבור n. נתון כי $n > 1$, ולכן נציב $n = 2$:

$$\frac{2^n}{2n}\ \Rightarrow\ \frac{2^2}{2\cdot 2}=\frac{4}{4}=1$$

כעת, נציב גם בתשובות $n = 2$ ונחפש תשובה השווה ל-1. נשים לב שמכיוון שהשתמשנו בהצבת מספרים, עלינו לפסול 3 תשובות בטרם נוכל לסמן תשובה נכונה.

(1) $\frac{1}{n}\ \Rightarrow\ \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ לא מתאים, התשובה נפסלת

(2) $2^{n-2}\ \Rightarrow\ 2^{2-2}=2^0=1$ $\Rightarrow$ **מתאים**

(3) $\frac{2^{n-1}}{n}\ \Rightarrow\ \frac{2^{2-1}}{2}=\frac{2}{2}=1$ $\Rightarrow$ **מתאים**

(4) $\frac{2^{n-2}}{n}\ \Rightarrow\ \frac{2^{2-2}}{2}=\frac{2^0}{2}=\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ לא מתאים, התשובה נפסלת

נותרו שתי תשובות מתאימות, ולכן נערוך הצבה נוספת. נציב $n = 3$:

$$\frac{2^n}{2n}\ \Rightarrow\ \frac{2^3}{2\cdot 3}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$$

כעת, נציב גם בתשובות $n = 3$ ונחפש תשובה השווה ל- $\frac{4}{3}$.

(2) $2^{n-2}\ \Rightarrow\ 2^{3-2}=2^1=2$ $\Rightarrow$ לא מתאים, התשובה נפסלת

פסלנו 3 תשובות ועל כן תשובה (3) נכונה.

.4 תשובה (3) נכונה. שאלה 8 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – פתרון מתמטי

ראשית, כיוון שבמכנה יש שני גורמים – 2 ו-3, נשאף לפרק גם את המונה לגורמים האלה:

$$\frac{6^x}{2^{x+1}\cdot 3^{x-1}}=\frac{2^x\cdot 3^x}{2^{x+1}\cdot 3^{x-1}}$$

כעת, בהינתן בסיסים זהים ניתן לחסר את המעריכים:

$$\frac{2^x\cdot 3^x}{2^{x+1}\cdot 3^{x-1}}=2^{x-(x+1)}\cdot 3^{x-(x-1)}=2^{x-x-1}\cdot 3^{x-x+1}=2^{-1}\cdot 3^1$$

חזקה שלילית מורידה את המספר למכנה:

$$2^{-1}\cdot 3^1=\frac{3}{2}$$

דרך ב' – הצבת מספרים

בדרך כלל אנו מציבים את הספרות 0 או 1, אך ניתן להבחין בכך שהדבר יוביל לתשובות שאינן שונות כולן זו מזו, ולכן נציב $x=2$.

תחילה, נחשב את הערך המתקבל בהצבת $x=2$ בביטוי הנתון בשאלה:

$$\frac{6^2}{2^{2+1}\cdot 3^{2-1}}=\frac{36}{2^3\cdot 3^1}=\frac{36}{8\cdot 3}$$

$$\frac{36}{8\cdot 3}=\frac{36}{24}=\frac{3}{2}$$

כעת נציב $x=2$ בתשובות ונחפש תשובה השווה ל-$\frac{3}{2}$. נשים לב שמכיוון שהשתמשנו בהצבת מספר במקום הנעלם, עלינו לפסול 3 תשובות בטרם נוכל לסמן תשובה נכונה.

(1) 1 $\Rightarrow$ לא מתאים. התשובה נפסלת

(2) $2^{2-1}\cdot 3^{2+1}=2\cdot 3^3$ $\Rightarrow$ לא מתאים. התשובה נפסלת

(3) $\frac{3}{2}$ $\Rightarrow$ **מתאים.**

(4) $\frac{3^2}{2^2}=\frac{9}{4}$ $\Rightarrow$ לא מתאים. התשובה נפסלת

פסלנו 3 תשובות ולכן תשובה (3) נכונה.

5. תשובה (4) נכונה. שאלה 10 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – אובייקט

a ו-c הם מספרים שלמים גדולים מ-0 המקיימים:

$$a^c = c^a$$

ידוע לנו כי שני המספרים היחידים המקיימים זאת הם 2 ו-4.

$$2^4 = 4^2$$

לפיכך, c יכול להיות שווה ל-2 או ל-4. נתון כי $a < c$ ולכן c בהכרח שווה ל-4. שימו לב, ניתן לסמן את תשובה (4) גם בלי לבדוק זאת, מאחר ש-$c = 2$ לא מופיע בתשובות.

דרך ב' – הצבת התשובות

a ו-c הם מספרים שלמים, $0 < a < c$. עלינו למצוא את ערכו של c, כך ש-c ו-a יקיימו את המשוואה הנתונה, $a^c = c^a$.

נבדוק את התשובות. אנו יודעים ש-a בהכרח קטן מ-c. לכן, בבדיקת כל תשובה נציב את כל ערכי a האפשריים הקטנים מ-c, וכך נבדוק האם אכן קיים זוג מספרים a ו-c המקיים את המשוואה.

טיפ: בהצבת תשובות, כדאי להתחיל בתשובות הנוחות יותר. במקרה זה, התשובות הנוחות יותר יהיו התשובות שבהן מוצגים הערכים הקטנים ביותר עבור c. זאת, מפני שתשובות אלו יאפשרו לנו לבצע מספר קטן של הצבות עבור a.

<u>נבדוק את תשובה (3):</u> $c = 3$. כלומר, $a^3 = 3^a$.

נציב $a = 1$: $1^3 \stackrel{?}{=} 3^1 \Leftarrow 1 \neq 3$. לא מתאים.

נציב $a = 2$: $2^3 \stackrel{?}{=} 3^2 \Leftarrow 8 \neq 9$. לא מתאים.

התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (4):</u> $c = 4$. כלומר, $a^4 = 4^a$.

נציב $a = 1$: $1^4 \stackrel{?}{=} 4^1 \Leftarrow 1 \neq 4$. לא מתאים.

נציב $a = 2$: $2^4 \stackrel{?}{=} 4^2 \Leftarrow 16 = 16$. **מתאים.**

כלומר, c יכול להיות שווה ל-4, ובמקרה זה a יהיה שווה ל-2.

מצאנו פתרון מתאים ולכן **התשובה נכונה.**

טיפ: מכיוון שהצבנו את התשובות, ברגע שמצאנו תשובה נכונה אין צורך להמשיך לבדוק את שאר התשובות.

6. תשובה (4) נכונה. שאלה 10 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – פתרון מתמטי

שטח ריבוע הוא $\sqrt{3}$. נסמן את אורך הצלע ב-x.

$$x^2 = \sqrt{3}$$

נוציא שורש משני האגפים:

$$x = \sqrt{\sqrt{3}}$$

מכיוון שאין תשובה כזו, נפשט את הביטוי שמצאנו. לפי חוקי שורשים, במקרה של שורש של שורש, כופלים את מעריכי השורשים:

$$\sqrt{\sqrt{3}} = \sqrt[4]{3} = 3^{\frac{1}{4}}$$

דרך ב' – הצבת התשובות

שטח ריבוע הוא $\sqrt{3}$. נבדוק את התשובות ונחפש אורך צלע שמתאים לנתון זה.

טיפ: בהצבת תשובות, כדאי להתחיל בתשובות הנוחות יותר.

<u>נבדוק את תשובה (3):</u>

אורך הצלע הוא 3 ס"מ. נחשב את שטח הריבוע:

$$3^2 = 9$$

לא מתאים, התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (2):</u>

אורך הצלע הוא $\frac{1}{3}$ ס"מ. נחשב את שטח הריבוע:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

לא מתאים, התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (4):</u>

אורך הצלע הוא $3^{\frac{1}{4}}$ ס"מ. נחשב את שטח הריבוע:

$$\left(3^{\frac{1}{4}}\right)^2 = 3^{\frac{2}{4}} = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

מתאים, **תשובה נכונה.**

טיפ: מכיוון שהצבנו את התשובות, ברגע שמצאנו תשובה נכונה אין צורך להמשיך לבדוק את שאר התשובות, אך למען שלמות ההסבר נפסול את התשובה שנותרה.

<u>נבדוק את תשובה (1):</u>

אורך הצלע הוא $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ס"מ. נחשב את שטח הריבוע:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{1}{\left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{1}{3}$$

לא מתאים, התשובה נפסלת.

.7 תשובה (3) נכונה. שאלה 13 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – פתרון מתמטי
התבקשנו לקבוע מה ערכו של הביטוי הנתון. כדי לפשט אותו ולהגיע למספר שלם כלשהו, נשאף להעלים את השורש.

$$\frac{\sqrt{8}+\sqrt{2}}{\sqrt{8}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{4}\cdot\sqrt{2}+\sqrt{2}}{\sqrt{4}\cdot\sqrt{2}-\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 3$$

דרך ב' – הערכת סדר גודל
נעריך מה גודלו של הביטוי שלפנינו. ערכו של $\sqrt{8}$ קצת יותר קטן מ- $\sqrt{9}$. כלומר, ניתן להניח ש- $\sqrt{8}$ הוא כמעט 3.
ידוע לנו ש- $\sqrt{2}$ שווה בערך ל-1.4 . למען הנוחות, נניח ש- $\sqrt{2}$ שווה ל-1.5 .

נתמקד במונה: $\sqrt{8}+\sqrt{2}$ שווה בערך ל-4.5 (1.5 + 3).

כעת נעריך מה גודלו של המכנה: $\sqrt{8}-\sqrt{2}$ שווה בערך ל-1.5 (1.5 – 3).

כלומר, ערך הביטוי הוא בערך 3 $\left(\frac{4.5}{1.5}\right)$. תשובה (3) מתאימה ושאר התשובות רחוקות מספיק כדי שנוכל לפסול אותן.

.8 תשובה (3) נכונה. שאלה 14 מתוך 20 בפרק.

$$\sqrt{2\sqrt{2}} = \sqrt{\sqrt{2\cdot 2^2}} = \sqrt{\sqrt{2^3}} = \sqrt[4]{2^3} = 2^{\frac{3}{4}}$$

.9 תשובה (3) נכונה. שאלה 14 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – פתרון מתמטי
עלינו לקבוע באילו מקרים המשוואה הנתונה תהיה נכונה **תמיד**. נפשט אותה תחת ההנחה שהיא אכן נכונה, ונבדוק איזה תנאי נובע ממנה.

$$\sqrt{x}+\sqrt{y} = \sqrt{x+y}$$

תחילה, נעלה את שני האגפים בריבוע:

$$\left(\sqrt{x}\right)^2 + \left(\sqrt{y}\right)^2 + 2\cdot\sqrt{x}\cdot\sqrt{y} = \left(\sqrt{x+y}\right)^2$$

$$x+y+2\sqrt{xy} = x+y$$

נפחית (x + y) משני האגפים:

$$2\sqrt{xy} = 0$$

נחלק ב-2:

$$\sqrt{xy} = 0$$

נעלה בריבוע:

$$xy = 0$$

מהמשוואה שאליה הגענו ניתן להסיק כי $x = 0$ או $y = 0$.

דרך ב' – הצבת מספרים / הצבת תשובות

x ו-y הם מספרים לא שליליים. עלינו לקבוע איזה תנאי יהיה מספיק כדי שהמשוואה שלהלן תתקיים תמיד:

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{x + y}$$

נבדוק את התשובות, ובכל תשובה נציב ערכים נוחים עבור x ו-y. מאחר שהתנאים בתשובות צריכים להביא לכך שהמשוואה תתקיים **תמיד**, אם נמצא מקרה המקיים תנאי בתשובות אך לא מקיים את המשוואה, הרי שהתשובה שגויה וניתן לפסול אותה. נשים לב שמכיוון שאנו משתמשים בהצבת מספרים במקום הנעלמים, עלינו לפסול 3 תשובות בטרם נוכל לסמן תשובה נכונה.

<u>נבדוק את תשובה (1):</u> $x - y = 0$

נציב $x = y = 4$, ונבדוק אם המשוואה מתקיימת.

$$\sqrt{4} + \sqrt{4} \stackrel{?}{=} \sqrt{4 + 4}$$
$$2 + 2 \stackrel{?}{=} \sqrt{8}$$
$$4 \neq \sqrt{8}$$

לא מתאים, התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (2):</u> $0 < x \cdot y$

ההצבה שביצענו לעיל ($x = y = 4$) מתאימה לתנאי זה, וראינו שהיא לא מקיימת את המשוואה.
לא מתאים, התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (3):</u> $x = 0$ או $y = 0$

נציב $x = 0$ ו- $y = 4$, ונבדוק אם המשוואה מתקיימת.

$$\sqrt{0} + \sqrt{4} \stackrel{?}{=} \sqrt{0 + 4}$$
$$0 + 2 \stackrel{?}{=} \sqrt{4}$$
$$2 = 2$$

לא הצלחנו לפסול תשובה זו. **מתאים.**

<u>נבדוק את תשובה (4):</u> אין צורך בתנאים נוספים

משמעותה של טענה זו היא שאין זה משנה אילו שני מספרים נציב עבור x ו-y. כל עוד הם לא שליליים, התנאי יתקיים. ראינו שהדבר אינו נכון, שכן כאשר הצבנו $x = 4$, $y = 4$, המשוואה לא התקיימה. לכן, יש צורך בתנאי נוסף. התשובה נפסלת.

פסלנו 3 תשובות ועל כן תשובה (3) נכונה.

10. תשובה (4) נכונה. שאלה 14 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הצבת מספרים

נציב $n = 1$ ונמצא את ערכו של הביטוי הנתון:

$$2^n - 2^{n-1} \quad \Rightarrow \quad 2^1 - 2^{1-1} = 2 - 2^0 = 2 - 1 = 1$$

כעת, נציב גם בתשובות $n = 1$, ונחפש תשובה השווה ל-1. נשים לב שמכיוון שהשתמשנו בהצבת מספרים, עלינו לפסול 3 תשובות בטרם נוכל לסמן תשובה נכונה.

(1) $2^{-n} \quad \Rightarrow \quad 2^{-1} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow$ לא מתאים, התשובה נפסלת

(2) $2 \quad \Rightarrow$ לא מתאים, התשובה נפסלת

(3) $2^{\frac{n}{2}} \quad \Rightarrow \quad 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \quad \Rightarrow$ לא מתאים, התשובה נפסלת

טיפ: כיוון שפסלנו 3 תשובות, ניתן לסמן את תשובה (4) מבלי לבדוק אותה. למען שלמות ההסבר, נבדוק את נכונותה:

(4) $2^{n-1} \quad \Rightarrow \quad 2^{1-1} = 2^0 = 1 \quad \Rightarrow$ **מתאים**

דרך ב' – פתרון מתמטי

נפשט את הביטוי הנתון. בתשובות ישנן חזקות שבסיסן 2, ולכן נשאף להגיע לכך גם בביטוי הנתון. לשם כך, נבטא את החזקה 2^{n-1} באמצעות 2^n:

$$2^n - 2^{n-1} = 2^n - 2^n \cdot 2^{-1} = 2^n - 2^n \cdot \frac{1}{2}$$

כעת ניתן להוציא גורם משותף 2^n:

$$2^n - 2^n \cdot \frac{1}{2} = 2^n \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 2^n \cdot \frac{1}{2} = \frac{2^n}{2} = 2^{n-1}$$

דרך חישוב נוספת:

$$2^n - 2^{n-1} = 2^{n-1}(2 - 1) = 2^{n-1}$$

---

11. תשובה (1) נכונה. שאלה 14 מתוך 20 בפרק.

נתון: $a^b = -1$

כדי שמצב זה יתקיים, בסיס החזקה (a) חייב להיות (-1); אין שום מספר אחר שנעלה בחזקה כלשהי והתוצאה תהיה (-1). **תשובה (1) נכונה.** כמו כן, נשים לב שמעריך החזקה (b) חייב להיות אי-זוגי (שהרי כל מספר בחזקה זוגית יהפוך לחיובי).

---

12. תשובה (4) נכונה. שאלה 14 מתוך 20 בפרק.

דרך א'

ראשית, נבחן את התשובות המוצעות וננסה למצוא תשובה שבה יחס שיהיה לנו קל לחשב. ניתן לזהות כי בתשובה (4) ישנו שורש שאנו מכירים. נמצא את היחס בתשובה (4):

$$16:\sqrt{16}=16:4=4:1$$

כעת, בעזרת הערכת סדר גודל פשוטה, ניתן לזהות כי יחס זה אינו שווה ליחס $2:\sqrt{2}$ הנתון בשאלה (היחס בשאלה בוודאות אינו מספר שלם, וכן ערכו קטן בהרבה מ-1 : 4). משהבנו זאת, אין צורך לבדוק את שאר התשובות, וניתן לדעת שזו **התשובה הנכונה**.

למען שלמות ההסבר, נראה מדוע היחסים ביתר התשובות שווים ליחס המוצג בשאלה. לשם כך, נפשט תחילה יחס זה. נציג אותו כשבר:

$$2:\sqrt{2}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{1}$$

עתה, נפשט גם את היחסים בתשובות:

(1) $\sqrt{2}:1$ $\Rightarrow$ התשובה נפסלת.

(2) $\sqrt{8}:2=\frac{\sqrt{8}}{2}=\frac{\sqrt{4}\cdot\sqrt{2}}{2}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{1}$ $\Rightarrow$ התשובה נפסלת.

(3) $4:\sqrt{8}=\frac{4}{\sqrt{8}}=\frac{4}{\sqrt{4}\cdot\sqrt{2}}=\frac{4}{2\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}$ $\Rightarrow$ התשובה נפסלת (זהה ליחס בשאלה).

דרך ב' – העלאה בריבוע

הקושי בשאלה זו טמון בשורשים הקיימים בביטויים שלפנינו. נהפוך את השאלה לפשוטה יותר אם נעלה את כל היחסים הנתונים בריבוע. מותר לנו לעשות זאת משום שכאשר ישנם ביטויים השווים זה לזה, השוויון יישמר כל עוד נבצע את אותה הפעולה על שניהם. לכן, אם נעלה גם את היחס $2:\sqrt{2}$ בריבוע וגם את התשובות בריבוע, נוכל לפתור את השאלה בהתאם ליחסים החדשים שיתקבלו, שלפיהם יהיה לנו קל יותר לראות איזו מהתשובות מציגה יחס השונה מהיחס הנתון.

ראשית, נעלה את היחס הנתון בריבוע:

$$\left(2:\sqrt{2}\right)^2=4:2=2:1$$

כעת נעלה את היחסים בכל התשובות בריבוע גם כן, ונחפש תשובה שבה נקבל יחס השונה מ-1 : 2.

(1) $\left(\sqrt{2}:1\right)^2=2:1$ $\Rightarrow$ התשובה נפסלת.

(2) $\left(\sqrt{8}:2\right)^2=8:4=2:1$ $\Rightarrow$ התשובה נפסלת.

(3) $\left(4:\sqrt{8}\right)^2=16:8=2:1$ $\Rightarrow$ התשובה נפסלת.

טיפ: כיוון שפסלנו 3 תשובות, ניתן לסמן את תשובה (4) מבלי לבדוק אותה. למען שלמות ההסבר, נבדוק את נכונותה:

(4) $\left(16:\sqrt{16}\right)^2=16^2:16=16:1$ $\Rightarrow$ **תשובה נכונה**.

13. תשובה (4) נכונה. שאלה 16 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הצבת מספרים

אנו יכולים להציב מספרים במקום הנעלמים (בהתאם לנתון $0 < A < B$) הן בביטוי שבשאלה והן בתשובות, ולפסול כל תשובה השונה מן הביטוי המקורי. נציב $A = 1$, $B = 2$ בביטוי המקורי:

$$\frac{A-B}{\sqrt{B+A}}\cdot\frac{A+B}{\sqrt{B-A}} \Rightarrow \frac{1-2}{\sqrt{2+1}}\cdot\frac{1+2}{\sqrt{2-1}}=\frac{-1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{3}{\sqrt{1}}=\frac{-3}{\sqrt{3}}=\frac{-\sqrt{3}\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=-\sqrt{3}$$

כעת, נציב גם בתשובות $B = 2$, $A = 1$, ונחפש תשובה השווה ל-$-\sqrt{3}$. נשים לב שמכיוון שהשתמשנו בהצבת מספרים במקום הנעלמים, עלינו לפסול 3 תשובות בטרם נוכל לסמן תשובה נכונה.

(1) $B^2 - A^2 \Rightarrow 2^2 - 1^2 = 4 - 1 = 3 \Rightarrow$ לא מתאים, התשובה נפסלת

(2) $\sqrt{B-A} \Rightarrow \sqrt{2-1} = \sqrt{1} = 1 \Rightarrow$ לא מתאים, התשובה נפסלת

(3) $A - B = 1 - 2 = -1 \Rightarrow$ לא מתאים, התשובה נפסלת

טיפ: לאחר שפסלנו שלוש תשובות, ניתן לסמן את התשובה הרביעית ללא בדיקתה. נבדוק אותה למען שלמות ההסבר:

(4) $-\sqrt{B^2-A^2} = -\sqrt{2^2-1^2} = -\sqrt{4-1} = -\sqrt{3} \Rightarrow$ **מתאים, תשובה נכונה**

דרך ב' – פתרון מתמטי

ניתן לראות כי בתשובות אין שבר ולכן נשאף להביא את הביטוי המקורי למצב זה. תחילה נכפול בין המונים ובין המכנים:

$$\frac{A-B}{\sqrt{B+A}}\cdot\frac{A+B}{\sqrt{B-A}}=\frac{(A-B)\cdot(A+B)}{\sqrt{B+A}\cdot\sqrt{B-A}}$$

את המונה נפתח לפי נוסחת כפל מקוצר. במכנה אנו יכולים לאחד את מכפלת שני השורשים תחת שורש אחד:

$$\frac{(A-B)\cdot(A+B)}{\sqrt{B+A}\cdot\sqrt{B-A}}=\frac{A^2-B^2}{\sqrt{(B+A)\cdot(B-A)}}$$

כעת נפתח גם את הביטוי שבמכנה בעזרת נוסחת כפל מקוצר:

$$\frac{A^2-B^2}{\sqrt{(B+A)\cdot(B-A)}}=\frac{A^2-B^2}{\sqrt{B^2-A^2}}$$

כאמור, אנו שואפים להגיע לביטוי ללא שבר. לשם כך אנו צריכים לצמצם את המכנה ונעשה זאת באמצעות הפיכת המונה והמכנה לדומים. נוציא מינוס במונה:

$$\frac{A^2-B^2}{\sqrt{B^2-A^2}}=\frac{-(B^2-A^2)}{\sqrt{B^2-A^2}}$$

כעת יש לנו ביטויים דומים במונה ובמכנה וניתן לחסר בין החזקות שלהם:

$$\frac{-(B^2-A^2)}{\sqrt{B^2-A^2}}=\frac{-(B^2-A^2)^1}{(B^2-A^2)^{\frac{1}{2}}}=-(B^2-A^2)^{\frac{1}{2}}$$

חזקת חצי שווה לשורש:

$$-(B^2-A^2)^{\frac{1}{2}}=-\sqrt{B^2-A^2}$$

אפשר לסיים גם כך:

$$\frac{-(B^2-A^2)}{\sqrt{B^2-A^2}}=\frac{-\sqrt{B^2-A^2}\cdot\sqrt{B^2-A^2}}{\sqrt{B^2-A^2}}=-\sqrt{B^2-A^2}$$

14. תשובה (2) נכונה. שאלה 16 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – פתרון מתמטי

$$\left(\frac{2^{2a}}{2^{x}}\right)^{x} = 2^{(a^2)}$$

ראשית, נתמקד באגף השמאלי של המשוואה וננסה לפשטו. בחילוק, כאשר הבסיסים זהים עלינו לחסר חזקות. נעשה זאת בשבר שבסוגריים ונקבל:

$$(2^{2a-x})^{x} = 2^{(a^2)}$$

בחזקה של חזקה עלינו לכפול חזקות, ולכן:

$$2^{2ax-x^2} = 2^{a^2}$$

הצלחנו להגיע למשוואה מעריכית שבשני אגפיה בסיס זהה (2). כאשר הבסיסים זהים, ניתן להשוות את המעריכים:

$$2ax - x^2 = a^2$$

נעביר אגפים:

$$0 = a^2 + x^2 - 2ax$$

נזהה כי זוהי נוסחת הכפל המקוצר השנייה, ועל כן נכנס אותה:

$$0 = (a - x)^2$$

כדי שביטוי בריבוע יהיה שווה 0, על הביטוי להיות שווה ל-0 ($\sqrt{0} = 0$):

$$0 = a - x$$
$$x = a$$

דרך ב' – הצבת תשובות

נציב בכל פעם את אחד הערכים המוצעים בתשובות במקום x, ונבדוק מתי מתקבל פסוק אמת בהכרח.

טיפ: בהצבת תשובות, כדאי להתחיל בתשובות הנוחות יותר.

<u>נבדוק את תשובה (1)</u>: לפי תשובה זו x בהכרח שווה ל-2. נציב $x = 2$ במשוואה:

$$\left(\frac{2^{2a}}{2^{x}}\right)^{x} = 2^{(a^2)} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{2^{2a}}{2^{2}}\right)^{2} = 2^{(a^2)}$$

ראשית, נתמקד באגף השמאלי של המשוואה וננסה לפשטו. בחילוק, כאשר הבסיסים זהים עלינו לחסר חזקות. נעשה זאת בשבר שבסוגריים ונקבל:

$$(2^{2a-2})^{2} = 2^{(a^2)}$$

כבר בשלב זה ניתן לשים לב שלא נקבל ביטויים זהים בשני אגפי המשוואה, ולכן הפתרון שהצבנו אינו <u>בהכרח</u> נכון. אמנם יהיו ערכי a מסוימים שיקיימו משוואה זו, אך עלינו למצוא מתי המשוואה מתקיימת בהכרח, כלומר עבור כל a. התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (2)</u>: לפי תשובה זו x בהכרח שווה ל-a. נציב $x = a$ במשוואה:

$$\left(\frac{2^{2a}}{2^{x}}\right)^{x} = 2^{(a^2)} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{2^{2a}}{2^{a}}\right)^{a} = 2^{(a^2)}$$

ראשית, נתמקד באגף השמאלי של המשוואה וננסה לפשטו. בחילוק, כאשר הבסיסים זהים עלינו לחסר חזקות. נעשה זאת בשבר שבסוגריים ונקבל:

$$(2^{2a-a})^{2} = 2^{(a^2)}$$
$$(2^{a})^{2} = 2^{(a^2)}$$

בחזקה של חזקה עלינו לכפול חזקות, ולכן:

$$2^{a^2} = 2^{a^2}$$

הגענו לפסוק אמת; שני אגפי המשוואה זהים זה לזה, ועל כן המשוואה נכונה בהכרח, עבור כל a. **תשובה נכונה**.

15. תשובה (4) נכונה. שאלה 17 מתוך 20 בפרק.

כדי לפתור משוואה מעריכית, עלינו להביא לכך שהבסיסים בשני אגפי המשוואה יהיו שווים וכך נוכל להשוות בין החזקות.

$$\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{2}=\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} \quad\Rightarrow\quad \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}$$

נצמצם את השבר באגף שמאל ב-$\sqrt{2}$:

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} \quad\Rightarrow\quad \sqrt{\frac{3}{2}}=\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}$$

נהפוך את השורש באגף שמאל לחזקה:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}$$

הבסיסים בשני אגפי המשוואה שווים, ולכן ניתן להשוות בין החזקות:

$$\frac{1}{2}=2x$$

נחלק ב-2 כדי למצוא את x:

$$\frac{1}{4}=x$$

---

16. תשובה (4) נכונה. שאלה 18 מתוך 20 בפרק.

בכדי לפשט את הביטוי עלינו להשוות את הבסיסים השונים במונה ובמכנה.

תחילה, במונה, ניתן להפוך את הבסיס 36 ל- 6^2. לא נשכח להעלות את הביטוי 6^2 בחזקת 3:

$$\frac{\mathbf{36^3}\cdot 6^2}{3^9\cdot 2^6}=\frac{\mathbf{(6^2)^3}\cdot 6^2}{3^9\cdot 2^6}$$

חזקה של חזקה = כופלים חזקות:

$$\frac{\mathbf{(6^2)^3}\cdot 6^2}{3^9\cdot 2^6}=\frac{\mathbf{6^6}\cdot 6^2}{3^9\cdot 2^6}$$

במונה יש כפל בין שני מספרים בעלי בסיס זהה = מחברים חזקות:

$$\frac{\mathbf{6^6\cdot 6^2}}{3^9\cdot 2^6}=\frac{\mathbf{6^8}}{3^9\cdot 2^6}$$

המטרה שלנו היא להגיע לבסיסים זהים במונה ובמכנה. לכן, נפצל את הבסיס 6 לביטוי $(2\cdot 3)$:

$$\frac{\mathbf{6^8}}{3^9\cdot 2^6}=\frac{\mathbf{(2\cdot 3)^8}}{3^9\cdot 2^6}$$

מכפלה של מספרים המועלית בחזקה = כל מספר מועלה בחזקה:

$$\frac{\mathbf{(2\cdot 3)^8}}{3^9\cdot 2^6}=\frac{\mathbf{2^8\cdot 3^8}}{3^9\cdot 2^6}$$

כעת ניתן לצמצם איברים במונה ובמכנה:

$$\frac{2^8\cdot 3^8}{3^9\cdot 2^6}=\frac{2^2}{3}=\frac{4}{3}$$

התרגיל כולו:

$$\frac{36^3\cdot 6^2}{3^9\cdot 2^6}=\frac{(6^2)^3\cdot 6^2}{3^9\cdot 2^6}=\frac{6^6\cdot 6^2}{3^9\cdot 2^6}=\frac{6^8}{3^9\cdot 2^6}=\frac{2^8\cdot 3^8}{3^9\cdot 2^6}=\frac{2^2}{3}=\frac{4}{3}$$

---

17. תשובה (1) נכונה. שאלה 19 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הבנה
נבחן את המשוואה הנתונה, כדי להבין מה ערכי הנעלמים.

$x^{2y} = x^y$

המשוואה תתקיים אם המעריכים שווים. כלומר, אם $2y = y$. נמצא את ערכו של y במקרה זה:

$2y = y$
$y = 0$

נשים לב כי נתון $x , y > 0$. לפיכך, פתרון זה אינו מתאים. משמע, המעריכים אינם שווים.
לכן, כדי שהמשוואה תתקיים, בסיסי החזקות צריכים להיות 0 או 1, שכן אלו הם המספרים היחידים שנשארים זהים, ללא כל תלות בערך החזקה. כאמור, $x > 0$ ולכן $x = 1$.

מצאנו ש- $x = 1$, ולכן $y^x = y^1 = y$, כפי שכתוב בתשובה (1).

דרך ב' – פתרון מתמטי
נתונה המשוואה:

$x^{2y} = x^y$

כדי לפשט את המשוואה נחלק את שני האגפים ב- x^y. נתון ששני הנעלמים חיוביים ומכאן ש- $x^y \neq 0$, מה שמתיר לנו לחלק את המשוואה בביטוי זה:

$\frac{x^{2y}}{x^y} = 1$

$x^{2y-y} = 1$

$x^y = 1$

זהו אובייקט שאנו מכירים והוא מתקיים בשלושה מצבים:

$x = 1$
$y = 0$ וגם $x \neq 0$
$x = -1$ וגם y זוגי

נתון כי $x , y > 0$, ולכן שתי האופציות התחתונות מתבטלות ואנו נשארים עם האופציה העליונה בלבד, כלומר: $x = 1$.

מצאנו ש- $x = 1$, ולכן $y^x = y^1 = y$, כפי שכתוב בתשובה (1).

---

18. תשובה (1) נכונה. שאלה 19 מתוך 20 בפרק.

נתונה לנו משוואה עם שורש. כדי לפתורה, נעלה את המשוואה בריבוע על מנת להיפטר מהשורש.

$2\sqrt{x} = 4^{-3} \quad /(\ )^2$
$4x = (4^{-3})^2$
$4x = 4^{-6} \quad /:4$
$x = \frac{4^{-6}}{4^1}$
$x = 4^{-7}$

---

19. תשובה (3) נכונה. שאלה 20 מתוך 20 בפרק.

עלינו לפשט את הביטוי הנתון. תחילה, נוציא גורם משותף במונה:

$$\left(\frac{3^7-3^6}{2}\right)^2 = \left(\frac{3^6\cdot(3-1)}{2}\right)^2 = \left(\frac{3^6\cdot 2}{2}\right)^2 = (3^6)^2 = 3^{6\cdot 2} = 3^{12}$$

---

20. תשובה (1) נכונה. שאלה 20 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הצבת מספרים

נציב לדוגמה: $x=2$, $n=2$. נחשב את ערכו של הביטוי בהצבה זו:

$$\frac{x^n-x^{\frac{n}{2}}}{x^{\frac{n}{2}}-1} = \frac{2^2-2^{\frac{2}{2}}}{2^{\frac{2}{2}}-1} = \frac{4-2^1}{2^1-1} = \frac{2}{1} = 2$$

כעת, נציב $x=2$, $n=2$ גם בתשובות, ונחפש תשובה השווה ל-2. נשים לב שמכיוון שהשתמשנו בהצבת מספרים, עלינו לפסול 3 תשובות בטרם נוכל לסמן תשובה נכונה.

(1) $x^{\frac{n}{2}} \Rightarrow 2^{\frac{2}{2}} = 2^1 = 2 \quad \Rightarrow$ **מתאים**.

(2) $x^{\frac{n}{2}}-1 \Rightarrow 2^{\frac{2}{2}}-1 = 2-1 = 1 \quad \Rightarrow$ לא מתאים, התשובה נפסלת.

(3) $x^n \Rightarrow 2^2 = 4 \quad \Rightarrow$ לא מתאים, התשובה נפסלת.

(4) $x^n-1 \Rightarrow 2^2-1 = 4-1 = 3 \quad \Rightarrow$ לא מתאים, התשובה נפסלת.

פסלנו 3 תשובות, ולכן תשובה (1) נכונה.

דרך ב' – פתרון מתמטי

נשים לב שניתן להוציא גורם משותף במונה:

$$\frac{x^n-x^{\frac{n}{2}}}{x^{\frac{n}{2}}-1} = \frac{x^{\frac{n}{2}}\left(x^{\frac{n}{2}}-1\right)}{x^{\frac{n}{2}}-1}$$

נצמצם ב-$\left(x^{\frac{n}{2}}-1\right)$:

$$\frac{x^{\frac{n}{2}}\left(x^{\frac{n}{2}}-1\right)}{x^{\frac{n}{2}}-1} = x^{\frac{n}{2}}$$

אי-שוויונות

אי-שוויון הוא כמו משוואה, אולם בניגוד למשוואה, בה שני האגפים שווים זה לזה, באי-שוויון אין זה כך בהכרח. במקום סימן ה-"שווה" במשוואה, באי-שוויון יכולים להיות מספר סימנים אחרים:

$A < B$ ← A קטן מ-B

$A > B$ ← A גדול מ-B

$A \le B$ ← A קטן מ-B <u>או</u> שווה ל-B

$B \le A$ ← A גדול מ-B <u>או</u> שווה ל-B

כפל במינוס

הדרך לפתור אי-שוויון היא בדיוק כמו משוואה, ומותר לנו לבצע על האגפים שלו את כל הפעולות שאנו מבצעים במשוואה, למעט כפל וחילוק במספר שלילי.
באי-שוויון, כאשר מבצעים פעולות של כפל וחילוק במספר שלילי, צריך להפוך את סימן האי-שוויון. לדוגמה:

$$-10 < -6 \quad \Rightarrow \quad 5 > 3$$

שימו לב שכאשר חילקנו ב-(-2) הפכנו את סימן האי-שוויון.
בפסיכומטרי, מומלץ לא לעשות זאת, ותמיד להעביר את הנעלם לאגף בו הוא יהיה חיובי.

דוגמה:

נתון: $5 + x < 13 + 3x$

עבור אילו ערכי x האי-שוויון מתקיים?

פתרון - נעביר את הנעלם לאגף ימין, שם הוא יהיה חיובי:

$$5 + x < 13 + 3x \quad \Rightarrow \quad -8 < 2x \quad \Rightarrow \quad -4 < x$$

אי-שוויון כפול

אי-שוויון כפול הוא אי-שוויון שיש בו יותר מסימן אי-שוויון אחד - שני אי-שוויונים שאחד האגפים שלהם משותף. כאשר נתון אי-שוויון כפול, או נתונים שני אי-שוויונים, נפתור כל אחד מהם בנפרד, ולבסוף נמצא את תחום ההגדרה המשותף של שניהם.

דוגמה:

נתון: $3x - 8 < 2x + 3 < 5x - 12$

עבור אילו ערכי x האי-שוויון מתקיים?

פתרון -

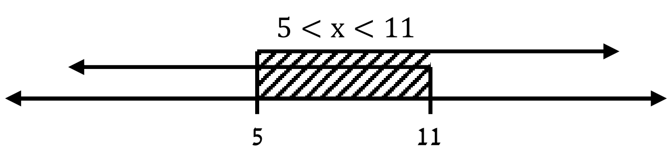
נחלק את האי-שוויון לשניים, ונפתור כל אחד מהם בנפרד:

$$3x - 8 < 2x + 3 \quad \Rightarrow \quad x < 11$$

$$2x + 3 < 5x - 12 \quad \Rightarrow \quad 15 < 3x \quad \Rightarrow \quad 5 < x$$

התחום המשותף לשני התחומים שמצאנו הוא: $5 < x < 11$

נראה זאת על ציר המספרים:



אין סוף פתרונות

ייתכן מצב בו כל x יקיים את האי-שוויון. במצב זה, תחום ההגדרה של x הוא כל המספרים - לא משנה איזה x נציב, האי-שוויון תמיד יהיה נכון.

דוגמה:

נתון: $4(3-2x)-5<9-8x$

עבור אילו ערכי x האי-שוויון מתקיים?

פתרון -

נפתח סוגריים:

$$12-8x-5<9-8x \quad \Rightarrow \quad 7<9$$

מצאנו כי 7 קטן מ-9. האי-שוויון הזה מתקיים תמיד, ללא קשר לערך של x, ולכן x יכול לקבל כל ערך.

אין פתרון

ייתכן מצב בו אף ערך של x אינו מקיים את האי-שוויון. במצב זה, תחום ההגדרה של x הוא קבוצה ריקה, המסומנת גם כך: ∅ - לא משנה איזה x נציב, האי-שוויון לעולם לא יהיה נכון.

דוגמה:

נתון: $2x+36<15+5x<35$

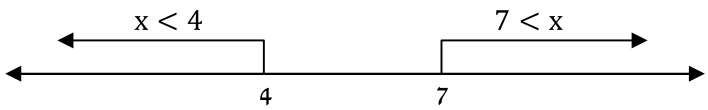
עבור אילו ערכי x האי-שוויון מתקיים?

פתרון -

נחלק את האי-שוויון לשניים, ונפתור כל אחד מהם בנפרד:

$$2x+36<15+5x \quad \Rightarrow \quad 21<3x \quad \Rightarrow \quad 7<x$$
$$15+5x<35 \quad \Rightarrow \quad 5x<20 \quad \Rightarrow \quad x<4$$

ניתן לראות כי אין חפיפה בין התחומים של שני אי-השוויונות:



$$x=\emptyset$$

ניסוי וטעייה

חלק משאלות האי-שוויונים בבחינה נפתרות בקלות על ידי הצבת תשובות או מספרים.

דוגמה:

x הוא מספר שלם שעבורו מתקיים $x^4<20<x^5$.

x = ?

(1) -2 (2) 2 (3) 3 (4) -3

פתרון -

הדרך המהירה היא פשוט להציב את התשובות ולבדוק איזו מהן מקיימת את האי-שוויון. ניתן לפסול מיד את התשובות השליליות שכן בחזקת 5 נקבל מספר שלילי והוא לא יכול להיות גדול מ-20.

נציב את תשובה (2):

$$2^4<20<2^5 \quad \Rightarrow \quad 16<20<32$$

שילוב משוואה עם אי-שוויון

בשאלות אלו ניתן לבודד נעלם מהמשוואה ולהציבו באי-שוויון.

דוגמה:

נתון: $x + y = z$

$x < z < y$

איזו מהטענות הבאות נכונה בהכרח?

(1) $x \cdot y < 0$ (2) $x \cdot y = 0$ (3) $0 < z$ (4) $z < 0$

פתרון - נציב את z בתוך האי-שוויון:

$$x < z < y \quad \Rightarrow \quad x < x + y < y$$

נפצל את האי-שוויון לשניים:

$$1)\ x < x + y \quad \Rightarrow \quad 0 < y$$

$$2)\ x + y < y \quad \Rightarrow \quad x < 0$$

קיבלנו ש-y חיובי ו-x שלילי, ולכן תשובה (1) נכונה.

שרשור אי-שוויונים

כאשר נתונים שני אי-שוויונים עם אגף משותף, ניתן לשרשר אותם אחד לשני ואף לבטל את הגורם המקשר (האגף המשותף).

דוגמה:

נתון: $x < y + 1$

$2y - 1 < x$

מכאן נובע בהכרח ש-

(1) $x < y$ (2) $2 < y$ (3) $y < 2$ (4) $y < x$

פתרון - נשרשר את האי-שוויונים:

$$2y - 1 < x < y + 1 \quad \Rightarrow \quad 2y - 1 < y + 1 \quad \Rightarrow \quad y < 2$$

בניית אי-שוויון

במבחן, אי-שוויון יכול להופיע כתרגיל בפני עצמו, או כבעיה מילולית בה אנו צריכים לבנות את האי-שוויון.

דוגמה:

ליוחנן 50 שקלים באמצעותם ביקש לקנות בקבוקי שתייה לו ולחבריו. המוכר אמר לו כי הסכום שיש ברשותו יספיק לו לקניית 4 בקבוקים, אולם אינו מספיק לקניית 5 בקבוקים.

מה יכול להיות מחיר בקבוק?

פתרון -

נסמן את מחיר הבקבוק כ-B, ונתאר זאת בעזרת אי-שוויון.

50 השקלים מספיקים לרכישת 4 בקבוקים, ולכן מחיר 4 בקבוקים נמוך מ-50 או שווה ל-50:

$$4B \le 50 \quad \Rightarrow \quad B \le 12.5$$

50 השקלים אינם מספיקים לרכישת 5 בקבוקים, ולכן מחיר 5 בקבוקים גבוה מ-50:

$$50 < 5B \quad \Rightarrow \quad 10 < B$$

נאחד את שני התחומים:

$$10 < B \le 12.5$$

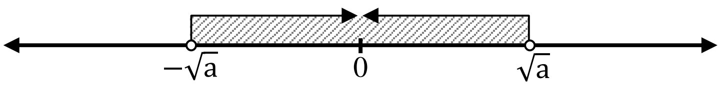
מחיר בקבוק גבוה מ-10 שקלים ונמוך או שווה ל-12.5 שקלים.

אי-שוויון ממעלה שנייה

כאשר נתון אי-שוויון עם נעלם במעלה שנייה, נבדוק האם הנעלם נמצא באגף הגדול או באגף הקטן של האי-שוויון.

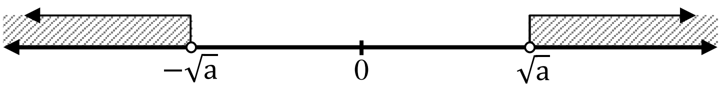
כאשר הנעלם באגף הקטן ($x^2 < a$), התחום שלו יהיה תחום סגור -

בין השורש החיובי לשלילי:



כאשר הנעלם באגף הגדול ($a < x^2$), התחום שלו יהיה תחום פתוח -

גדול מהשורש החיובי או קטן מהשורש השלילי:



דוגמה:

$$\frac{5x^2-3}{3} < \frac{2x^2+10}{2}$$

איזו מהטענות הבאות נכונה בנוגע ל-x?

(1) $9 < x$ (2) $x < -9$ (3) $3 < x$ (4) $-3 < x < 3$

פתרון - נפשט את האי-שוויון כמו משוואה:

$$2(5x^2-3) < 3(2x^2+10) \quad \Rightarrow \quad 10x^2-6 < 6x^2+30$$
$$4x^2 < 36 \quad \Rightarrow \quad x^2 < 9$$

כעת עלינו להבין כי x יכול להיות גם חיובי וגם שלילי (לדוגמה, גם 2 וגם 2- מקיימים את האי-שוויון).

לכן, נפתור את האי-שוויון באמצעות "**שיטת המראה**":

נפתור את האי-שוויון תחת ההנחה ש-x חיובי:

$x^2 < 9 \;\rightarrow\; 0 < x < 3$

כעת, על מנת לקבל את הטווח של x כאשר הוא שלילי, כל שעלינו לעשות הוא להסתכל על תמונת המראה של הטווח שקבלנו, משמע:

$-3 < x < 0$

לכן, הטווח הסופי הוא האיחוד של שני הטווחים שקיבלנו, משמע $-3 < x < 3$

סימן האי-שוויון בבחינה כמעט תמיד יופיע בכיוון הבא: " < "

(בדיוק כמו בציר המספרים - המספרים מימין גדולים יותר)

תרגול שאלות מבחינות אמת

1. נתון: m הוא מספר שלם קטן מאפס.
$m = x + y - 5$

$(x + y)$ הוא בהכרח מספר ______.

(1) שלם קטן מ-5
(2) אי-זוגי
(3) שלם המתחלק ב-5 ללא שארית
(4) גדול מ-5

---

2. נתון: x הוא מספר שלם.
$2x + 3 < 0$
$x^2 < 8$

$x = ?$

(1) 1 (2) -2 (3) -3 (4) 0

---

3. x הוא מספר שלם.
נתון: $x^2 < 16$
$2x + 4 < 0$

$x = ?$

(1) 1
(2) 2
(3) -3
(4) -8

---

4. x הוא מספר **שלם**, שעבורו מתקיים $x^3 < x^2 < 4$.

$x = ?$

(1) 1
(2) -2
(3) -1
(4) 0

פתרתי ____________ שאלות ב ____________ דקות, ____________ תשובות נכונות

.5 נתון: $4 < x < 5$

איזה מהאי-שוויונות הבאים נכון **בהכרח**?

(1) $x + 4 < 2x$

(2) $x + 5 < 2x$

(3) $9 < 2x$

(4) $10 < 2x$

.6 נתון: $y < x$, $z < x$, $w < y$

איזה מהאי-שוויונים הבאים **לא ייתכן**?

(1) $y < z$

(2) $z < y$

(3) $z < w$

(4) $x < w$

.7 נתון האי-שוויון: $x - 2 < 5$

כמה ערכי x שלמים וגדולים מ-0 מקיימים אותו?

(1) 10

(2) 5

(3) 3

(4) 6

.8 נתון האי-שוויון: $-3x^2 \leq -27$

איזה מערכי x הבאים **אינו** מקיים את האי-שוויון?

(1) -1

(2) -5

(3) 3

(4) 100

פתרתי ____________ שאלות ב ____________ דקות, ____________ תשובות נכונות

9. נתון: $a+2<\frac{a}{2}$

איזו מהטענות הבאות נכונה?

(1) $0<a<2$
(2) $2<a$
(3) $-4<a<0$
(4) $a<-4$

---

10. נתון: $0<x<1$
$4y=3x$

איזה מן האי-שוויונים הבאים נכון?

(1) $y<0$
(2) $1<y$
(3) $3<y^2$
(4) $y^2<1$

---

11. a ו-b הם מספרים שלמים וחיוביים.

נתון: $a+b=21$
$b<a$

מכאן נובע **בהכרח** ש-

(1) $14<a$
(2) $a<20$
(3) $b<11$
(4) $7<b$

---

12. נתון: $2y<x<-2y$

איזו מהטענות הבאות נכונה?

(1) $y<0$
(2) $y=0$
(3) $0<y<1$
(4) $1<y$

פתרתי ___________ שאלות ב ___________ דקות, ___________ תשובות נכונות

13. נתון: $0 < x - y$
$x + y < 0$

איזו מהטענות הבאות נכונה בהכרח?

(1) $0 < x$
(2) $x < 0$
(3) $0 < y$
(4) $y < 0$

---

14. נתון: $3x + 2y = 0$
$2 < x$

מכאן נובע **בהכרח** ש-

(1) $y < -3$
(2) $-6 < y < -2$
(3) $5 < y$
(4) $2 < y < 6$

---

15. נתון: $0 < 2x - 4x^2$

מהנתון נובע בהכרח ש-

(1) $x < -\frac{1}{2}$
(2) $-\frac{1}{2} < x < 0$
(3) $0 < x < \frac{1}{2}$
(4) $\frac{1}{2} < x$

---

16. נתון: $x < 0$
$7 < x^2 - 9 < 16$

איזו מהטענות הבאות נכונה בנוגע ל-x?

(1) אין x המקיים את הנתונים
(2) $x < -5$
(3) $-3 < x$
(4) $-5 < x < -4$

---

17. נתון: $0 < \frac{2+n}{2-n}$ $(n\neq 2)$

איזה מן הביטויים הבאים הוא התחום **המדויק** שבו יכול n להימצא?

(1) $0 < n$

(2) $-2 < n < 0$

(3) $-2 < n < 2$

(4) $2 < n$

---

18. נתון: $0 < x$

$$\frac{1}{3} < \frac{x}{x+1} < \frac{2}{3}$$

מה התחום המדויק שבו x יכול להימצא?

(1) $0 < x < 1$

(2) $\frac{1}{2} < x < 2$

(3) $\frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}$

(4) $\frac{4}{3} < x < \frac{9}{2}$

---

19. נתון: $x^2 \cdot y^2 = (x \cdot y - 1)^2$

$1 < x$

איזו מהטענות הבאות נכונה **בהכרח**?

(1) $0 < y < \frac{1}{2}$

(2) $\frac{1}{4} < y$

(3) $y < -1$

(4) $2 < y$

פתרתי ____________ שאלות ב ____________ דקות, ____________ תשובות נכונות

20. נתון: $y^2 \cdot x + y^2 \cdot z < (x+z)^2$

$x + z = y$

איזה מן המספרים הבאים y **אינו יכול** להיות?

(1) 1

(2) $\frac{1}{2}$

(3) $-\frac{1}{2}$

(4) -1

תשובות

שאלה	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
תשובה	1	2	3	3	1	4	4	1	4	4

שאלה	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
תשובה	3	1	4	1	3	4	3	2	1	1

פתרתי 20 שאלות - ____________ נכונות, ____________ אחוזי הצלחה

1. תשובה (1) נכונה. שאלה 1 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – פתרון מתמטי

$m = x + y - 5$

נתון ש-m הוא מספר שלם קטן מאפס, ולכן ערכו של האגף השמאלי של המשוואה צריך להיות קטן מ-0. נכתוב זאת בכתיב אלגברי:

$x + y - 5 < 0$

אנו נשאלים על ערכו של הביטוי $(x + y)$, ועל כן נבודד אותו:

$x + y < 5$

הגענו לכך שערכו של הביטוי בהכרח קטן מ-5.

דרך ב' – הבנה

$m = x + y - 5$

נתון ש-m הוא מספר שלם קטן מ-0. כלומר, כאשר מחסרים 5 מהביטוי $(x + y)$, מתקבל מספר שלם שלילי. מכאן אנו יכולים להבין שהמספר בביטוי חייב להיות שלם (רק כך תתקבל תוצאה שלמה), אשר ערכו קטן מ-5 (רק כך תתקבל תוצאה שלילית).

דרך ג' – הצבת מספרים

נתון ש-m הוא מספר שלם קטן מאפס. על מנת להקל על פתרון השאלה, נציב מספר המקיים את הנתון, לדוגמה $m = -1$.

$m = x + y - 5 \Rightarrow -1 = x + y - 5$

אנו נשאלים באשר לערכו של הביטוי $(x + y)$, ועל כן נבודד אותו במשוואה.

$-1 + 5 = x + y$

$4 = x + y$

מצאנו ש-4 הוא ערך אפשרי לביטוי $(x + y)$. כעת נפסול כל תשובה שאינה תואמת פתרון זה.

(1) 4 אכן שלם קטן מ-5. **מתאים**.

(2) 4 אינו אי-זוגי. התשובה נפסלת.

(3) 4 אינו מתחלק ב-5 ללא שארית. התשובה נפסלת.

(4) 4 אינו גדול מ-5. התשובה נפסלת.

פסלנו 3 תשובות, ולכן תשובה (1) נכונה.

.2 תשובה (2) נכונה. שאלה 1 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הצבת התשובות

x הוא מספר שלם, ועלינו למצוא את ערכו בעזרת שני האי-שוויונות הנתונים. כדי להקל על הפתרון נציב את ערכי ה-x האפשריים ונחפש ערך אשר מקיים את שני האי-שוויונות.

<u>נבדוק את תשובה (1):</u>

$2 \cdot 1 + 3 < 0 \quad \Rightarrow \quad 5 < 0$

אין צורך לבדוק את האי-שוויון השני, מפני שהאי-שוויון הראשון לא מתקיים.
לא מתאים, התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (2):</u>

$2 \cdot (-2) + 3 < 0 \quad \Rightarrow \quad -4 + 3 < 0 \quad \Rightarrow \quad -1 < 0$

$(-2)^2 < 8 \quad \Rightarrow \quad 4 < 8$

מתאים, תשובה נכונה.

טיפ: מכיוון שהצבנו את התשובות, ברגע שמצאנו תשובה נכונה אין צורך להמשיך לבדוק את שאר התשובות, אך למען שלמות ההסבר נפסול אותן:

<u>נבדוק את תשובה (3):</u>

$2 \cdot (-3) + 3 < 0 \quad \Rightarrow \quad -6 + 3 < 0 \quad \Rightarrow \quad -3 < 0$

$(-3)^2 < 8 \quad \Rightarrow \quad 9 < 8$

לא מתאים, התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (4):</u>

$2 \cdot 0 + 3 < 0 \quad \Rightarrow \quad 3 < 0$

אין צורך לבדוק את האי-שוויון השני, מפני שהאי-שוויון הראשון לא מתקיים.
לא מתאים, התשובה נפסלת.

דרך ב' – פתרון מתמטי

בשאלה נתונים שני אי-שוויונות. נפתור את כל אחד מהאי-שוויונות, ונמצא את התחום המשותף לשניהם.

נתחיל לפתור את האי-שוויון הראשון:

$2x + 3 < 0$

נעביר אגפים ונחלק ב-2:

$x < -1\frac{1}{2}$

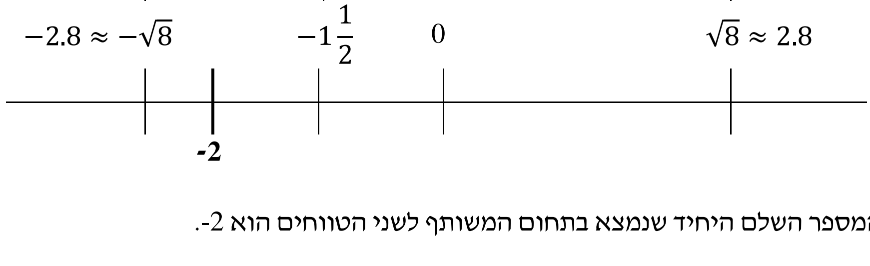
עתה נפתור את האי-שוויון השני:

$x^2 < 8$

נוציא שורש לאי-שוויון ונשתמש בשיטת המראה:

$-\sqrt{8} < x < \sqrt{8}$

נציב את שני התחומים שמצאנו על ציר המספרים ונחפש את התחום המשותף לשניהם:



מצאנו שהמספר השלם היחיד שנמצא בתחום המשותף לשני הטווחים הוא 2-.

3. תשובה (3) נכונה. שאלה 2 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הצבת תשובות
כדי לפתור את השאלה, נציב את התשובות ונחפש תשובה המקיימת את שני הנתונים.

<u>נבדוק את תשובה (1)</u>:

$1^2 < 16$
$1 < 16$

אי-השוויון מתקיים. נבדוק האם גם המשוואה מתקיימת בהצבה זו:

$2 \cdot 1 + 4 < 0$
$6 < 0$

התשובה מקיימת את אי-השוויון, אך אינה מקיימת את המשוואה. התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (2)</u>:
בעקבות פסילת תשובה (1), ניתן להסיק כי הצבה של מספר חיובי אינה יכולה לקיים את המשוואה השנייה, שלפיה התוצאה של הגדלת x (באמצעות הכפלתו ב-2 והוספת 4) תהיה שלילית. לא ניתן להגדיל מספר חיובי ולהגיע לתוצאה שלילית ולכן התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (3)</u>:

$(-3)^2 < 16$
$9 < 16$

אי-השוויון מתקיים. נבדוק האם גם המשוואה מתקיימת בהצבה זו:

$2 \cdot (-3) + 4 < 0$
$-6 + 4 < 0$
$-2 < 0$

התשובה מקיימת את שני הנתונים. **תשובה נכונה.**

טיפ: מכיוון שהצבנו את התשובות, אין צורך להמשיך לבדוק את תשובה (4), אך למען שלמות ההסבר נפסול אותה.

<u>נבדוק את תשובה (4)</u>:

$(-8)^2 < 16$
$64 < 16$

התשובה אינה מקיימת את אי-השוויון הראשון. התשובה נפסלת.

דרך ב' – חישוב אלגברי
נפתור את אי-השוויון הראשון – כדי לפתור אי-שוויון ממעלה שנייה, נשתמש ב"שיטת המראה":
ראשית, נפתור תחת ההנחה ש-x חיובי:

$x^2 < 16$
$0 < x < 4$

כעת, על מנת לקבל את הטווח של x כאשר הוא שלילי, כל שעלינו לעשות הוא להסתכל על תמונת המראה של הטווח שקיבלנו, משמע:

$-4 < x < 0$

לכן, הטווח הסופי הוא האיחוד של שני הטווחים שקיבלנו:

$-4 < x < 4$

נפתור את אי-השוויון השני:

$2x + 4 < 0$
$2x < -4$
$x < -2$

התשובה היחידה שמקיימת את שני אי-השוויונות היא תשובה (3).

4. תשובה (3) נכונה. שאלה 2 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הצבת התשובות

עלינו למצוא את ערך x המקיים את האי-שוויון. נציב את הערכים המוצגים בתשובות, ונחפש ערך מתאים.

(1) $1^3 < 1^2 < 4 \quad \Rightarrow \quad 1 < 1 < 4 \quad \Rightarrow$ לא מתאים, התשובה נפסלת

(2) $(-2)^3 < (-2)^2 < 4 \quad \Rightarrow \quad -8 < 4 < 4 \quad \Rightarrow$ לא מתאים, התשובה נפסלת

(3) $(-1)^3 < (-1)^2 < 4 \quad \Rightarrow \quad -1 < 1 < 4 \quad \Rightarrow$ **מתאים**

טיפ: מכיוון שהצבנו את התשובות, ברגע שמצאנו תשובה נכונה אין צורך להמשיך לבדוק את שאר התשובות, אך למען שלמות ההסבר נפסול את תשובה (4):

(4) $0^3 < 0^2 < 4 \quad \Rightarrow \quad 0 < 0 < 4 \quad \Rightarrow$ לא מתאים, התשובה נפסלת

דרך ב' – הבנה

ידוע כי x הוא מספר שלם. נתבונן באגף האמצעי והשמאלי של האי-שוויון הנתון:

$$x^3 < x^2$$

מכיוון ש-x שלם, הוא בהכרח שלילי, שכן מספר <u>חיובי שלם</u> בחזקת 3 תמיד יהיה גדול יותר מאותו מספר בחזקת 2 או שווה לו. כלומר: $x < 0$. בשלב זה ניתן לפסול את תשובות (1) ו-(4).

כעת נתבונן באגף האמצעי והימני של האי-שוויון:

$$x^2 < 4$$

כדי שהאי-שוויון יתקיים, ערכו המוחלט של x צריך להיות קטן מ-2, שכן אם הוא יהיה גדול מ-2 או שווה לו, x^2 יהיה גדול מ-4 או שווה לו.

כאמור, x שלילי ולכן כדי שערכו המוחלט יהיה קטן מ-2, x צריך להיות גדול מ-2-. כלומר: $-2 < x$. תשובה (2) נפסלת.

המספר השלם היחיד שנמצא בטווח $-2 < x < 0$ הוא 1- . תשובה (3) נכונה.

5. תשובה (1) נכונה. שאלה 3 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – פתרון מתמטי

בתשובות ישנם אי-שוויונות, נסדר אותם ונבדוק מי מתקיים בהכרח בתחום הנתון $4 < x < 5$.

<u>נבדוק את תשובה (1)</u>:

$x + 4 < 2x$

$4 < x$

כל המספרים בתחום $4 < x < 5$ אכן מקיימים גם את האי-שוויון $4 < x$. **תשובה נכונה**.

טיפ: ברגע שמצאנו תשובה נכונה אין צורך להמשיך לבדוק את שאר התשובות, אך למען שלמות ההסבר נפסול אותן:

<u>נבדוק את תשובה (2)</u>:

$x + 5 < 2x$

$5 < x$

התשובה אינה נכונה, שכן בתחום הנתון $x < 5$ – התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (3)</u>:

$9 < 2x$

$4.5 < x$

תשובה זו אינה נכונה בהכרח. x בהכרח גדול מ-4 אך לא בהכרח גדול מ-4.5 (x יכול להיות לדוגמה 4.2 לפי התחום הנתון בשאלה, ומספר זה אינו מקיים את האי-שוויון הזה). התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (4)</u>:

$10 < 2x$

$5 < x$

התשובה אינה נכונה, שכן בתחום הנתון $x < 5$ – התשובה נפסלת.

דרך ב' – הצבת מספרים

נתון: $4 < x < 5$. נציב מספר בתחום, לדוגמה $x = 4.5$, ונפסול כל תשובה שאינה מתקיימת בהצבה זו.

<u>נבדוק את תשובה (1)</u>:

$4.5 + 4 < 2 \cdot 4.5$

$8.5 < 9$

פסוק אמת, **מתאים**.

<u>נבדוק את תשובה (2)</u>:

$4.5 + 5 < 2 \cdot 4.5$

$9.5 < 9$

פסוק שקר, התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (3)</u>:

$9 < 2 \cdot 4.5$

$9 < 9$

פסוק שקר, התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (4)</u>:

$10 < 2 \cdot 4.5$

$10 < 9$

פסוק שקר, התשובה נפסלת.

פסלנו 3 תשובות, ולכן תשובה (1) נכונה.

6. תשובה (4) נכונה. שאלה 3 מתוך 20 בפרק.

דרך א – פתרון מתמטי
נבדוק את התשובות ונחפש תשובה אשר סותרת את אחד מהאי-שוויונות הנתונים או את שילובם.

<u>נבדוק את תשובה (1):</u> $y < z$
אין נתון הקושר ישירות בין y ל-z, אולם ידוע לנו ששניהם קטנים מ-x ($y < x$, $z < x$). אין לנו יכולת להשוות בין y ל-z ולקבוע האם אחד גדול מהשני, ולכן הטענה אפשרית. נפסל.

<u>נבדוק את תשובה (2):</u> $z < y$
כאמור לעיל, אין לנו יכולת להשוות בין y ל-z ולקבוע האם אחד גדול מהשני, ולכן הטענה אפשרית. נפסל.

<u>נבדוק את תשובה (3):</u> $z < w$
נתון כי $y < x$ וכן כי $w < y$. לכן, $w < x$. ידוע כי $z < x$. משמע, z ו-w שניהם קטנים מ-x, אולם אין לנו יכולת לקבוע האם אחד גדול מהשני, ולכן הטענה אפשרית. נפסל.

טיפ: כיוון שפסלנו 3 תשובות, ניתן לסמן את תשובה (4) מבלי לבדוק אותה. למען שלמות ההסבר, נבדוק את נכונותה:

<u>נבדוק את תשובה (4):</u> $x < w$
כאמור לעיל, $y < x$ וכן $w < y$ ולכן $w < x$. הטענה סותרת את הנתונים ולכן אינה נכונה, **תשובה נכונה.**

דרך ב' – הצבת מספרים
עלינו לקבוע איזה מהאי-שוויונות שבתשובות לא ייתכן. תחילה, נציב ערכים עבור הנעלמים בהתאם לנתונים.

נציב: $w = 1$
$w < y$ ולכן נציב: $y = 2$
$y < x$ ולכן נציב: $x = 3$
$z < x$ ולכן נציב: $z = 0$

כעת, נציב גם בתשובות $w = 1$, $y = 2$, $x = 3$, $z = 0$, ונחפש תשובה אשר הטענה המוצגת בה **אינה נכונה.** נשים לב שמכיוון שהשתמשנו בהצבת מספרים, עלינו לפסול 3 תשובות בטרם נוכל לסמן תשובה נכונה.

(1) $y < z \Rightarrow 2 < 0 \Rightarrow$ טענה לא נכונה, **מתאים**

(2) $z < y \Rightarrow 0 < 2 \Rightarrow$ טענה נכונה, התשובה נפסלת

(3) $z < w \Rightarrow 0 < 1 \Rightarrow$ טענה נכונה, התשובה נפסלת

(4) $x < w \Rightarrow 3 < 1 \Rightarrow$ טענה לא נכונה, **מתאים**

נותרו 2 תשובות מתאימות. כדי לפסול אחת מהן, נבצע הצבה נוספת. נתמקד בתשובות וננסה למצוא הצבה שתפסול אותן.

בתשובה (1) נערכת השוואה בין y ל-z ולכן ננסה לשנות את z ולמצוא ערך שעבורו הטענה דווקא כן תתקיים.
הצבנו לעיל $x = 3$. ידוע כי $z < x$, הפעם נציב כי ערכו של z הוא 2.5:

(1) $y < z \Rightarrow 2 < 2.5 \Rightarrow$ טענה נכונה, התשובה נפסלת

פסלנו 3 תשובות ועל כן תשובה (4) נכונה.

7. תשובה (4) נכונה. שאלה 4 מתוך 20 בפרק.

עלינו למצוא כמה ערכי x שלמים וגדולים מ-0 מקיימים את האי-שוויון הנתון. תחילה, נפשט אותו:

$$x-2<5$$

נסדר אגפים:

$$x<7$$

ערכי ה-x המתאימים הם: 1 , 2 , 3 , 4 , 5 ו-6. בסך הכול, 6 ערכים מקיימים את האי-שוויון.

---

8. תשובה (1) נכונה. שאלה 6 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הצבת התשובות
מאחר שנראה כי האי-שוויון אינו נוח לפישוט, נציב את התשובות ונחפש תשובה שאינה מקיימת את האי-שוויון:

(1) $-3(-1)^2 \le -27$
$-3 \le -27$ $\Rightarrow$ האי-שוויון אינו מתקיים, **תשובה נכונה.**

טיפ: מכיוון שהצבנו את התשובות, ברגע שמצאנו תשובה נכונה אין צורך להמשיך לבדוק את שאר התשובות, אך למען שלמות ההסבר נפסול אותן:

(2) $-3(-5)^2 \le -27$
$-75 \le -27$ $\Rightarrow$ האי-שוויון מתקיים, התשובה נפסלת.

(3) $-3(3)^2 \le -27$
$-27 \le -27$ $\Rightarrow$ האי-שוויון מתקיים, התשובה נפסלת.

(4) $-3(100)^2 \le -27$
$-30{,}000 \le -27$ $\Rightarrow$ האי-שוויון מתקיים, התשובה נפסלת.

דרך ב' – פתרון מתמטי
נפשט את האי-שוויון כדי להבין מה הטווח האפשרי עבור ערכי x ובהתאם לכך לקבוע איזו תשובה אינה מקיימת את האי-שוויון.

$$-3x^2 \le -27$$

ראשית, נחלק את שני אגפי האי-שוויון ב-(-3). נזכור שכאשר אנו מחלקים במספר שלילי, עלינו להפוך את הסימן.

$$x^2 \ge 9$$

ניתן גם להגיע למצב זה בדרך אחרת. אם אנו מעוניינים להימנע מחלוקת האי-שוויון במספר שלילי, ניתן להעביר אגפים כך שהמקדם של x יהיה חיובי:

$$-3x^2 \le -27 \quad \Rightarrow \quad 27 \le 3x^2$$

נחלק ב-3:

$$9 \le x^2$$

כעת, נפתור באמצעות "שיטת המראה". ראשית, נפתור תחת ההנחה ש-x חיובי. נוציא שורש:

$$x^2 \ge 9 \quad \Rightarrow \quad x \ge 3$$

כעת, על מנת לקבל את הטווח של x כאשר הוא שלילי, כל שעלינו לעשות הוא להסתכל על תמונת המראה של הטווח שקיבלנו, משמע:

$$x \le -3$$

לכן, זהו הטווח הסופי: $x \ge 3$ או $x \le -3$.
התשובה היחידה שאינה נמצאת בטווח זה היא תשובה (1) ועל כן זו התשובה הנכונה.

---

9. תשובה (4) נכונה. שאלה 7 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – פתרון מתמטי

נסדר את האי-שוויון על מנת לבודד את a:

$$a + 2 < \frac{a}{2} \qquad /\cdot 2$$

$$2a + 4 < a$$

נעביר אגפים:

$$a < -4$$

דרך ב' – הצבת תשובות

בתשובות מוצגים לנו טווחים אפשריים לנעלם a, ועלינו להבין איזה מטווחים אלו מקיים את האי-שוויון. אנו יכולים לפתור שאלה זו על ידי עבודה עם התשובות; אנו יכולים להציב בכל פעם מספר המקיים טווח מסוים, לראות האם הוא מקיים את האי-שוויון, ובהתאם לדעת האם הטווח מתאים או לא.

<u>נבדוק את תשובה (1)</u>: לפי תשובה $0 < a < 2$. נציב באי-שוויון $a = 1$ (אחד המספרים בטווח):

$$1 + 2 < \frac{1}{2}$$

$$3 < \frac{1}{2}$$

קיבלנו פסוק שקר, ולכן $a = 1$ אינו פתרון של האי-שוויון. מכאן שהטווח אינו מתאים, ולכן התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (2)</u>: לפי תשובה $a > 2$. נציב באי-שוויון $a = 4$ (אחד המספרים בטווח):

$$4 + 2 < \frac{4}{2}$$

$$6 < 2$$

קיבלנו פסוק שקר, ולכן $a = 4$ אינו פתרון של האי-שוויון. מכאן שהטווח אינו מתאים, ולכן התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (3)</u>: לפי תשובה $-4 < a < 0$. נציב באי-שוויון $a = -2$ (אחד המספרים בטווח):

$$-2 + 2 < \frac{-2}{2}$$

$$0 < -1$$

קיבלנו פסוק שקר, ולכן $a = -2$ אינו פתרון של האי-שוויון. מכאן שהטווח אינו מתאים, ולכן התשובה נפסלת.

טיפ: כיוון שפסלנו 3 תשובות, ניתן לסמן את תשובה (4) מבלי לבדוק אותה. למען שלמות ההסבר, נבדוק את נכונותה:

<u>נבדוק את תשובה (3)</u>: לפי תשובה $a < -4$. נציב באי-שוויון $a = -6$ (אחד המספרים בטווח):

$$-6 + 2 < \frac{-6}{2}$$

$$-4 < -3$$

קיבלנו פסוק אמת, ועל כן הטווח אפשרי.

10. תשובה (4) נכונה. שאלה 8 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – פתרון מתמטי

לפנינו אי-שוויון ומשוואה, מהם עלינו ללמוד על ערכו של y. לשם כך, נשאף להיפטר מ-x ע"י בידודו מהמשוואה הנתונה והצבתו באי-שוויון:

$$4y = 3x$$

$$\frac{4}{3}y = x$$

עתה נציב את ה-x שמצאנו באי-שוויון:

$$0 < \frac{4}{3}y < 1$$

כאשר אנו רוצים לפתור אי-שוויון כפול בו הנעלם נמצא רק באיבר האמצעי, נוכל לבצע את הפעולות הרצויות באופן מיידי על כל האגפים. לפיכך, נחלק את כל האגפים ב-$\frac{4}{3}$ (המקדם של y).

$$0 < y < \frac{3}{4}$$

עתה נבדוק איזו תשובה מתאימה. תשובות (1) ו-(2) נפסלות מייד משום ש-y אינו קטן מ-0 והוא אינו גדול מ-1. כדי לקבוע מה גודלו של y^2, נעלה את הטווח שקיבלנו בריבוע-

$$0 < y^2 < \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

$$0 < y^2 < \frac{9}{16}$$

מצאנו ש-y^2 הוא שבר פשוט חיובי הקטן מ-$\frac{9}{16}$ ולכן בהכרח קטן מ-1. תשובה (4) מתאימה.

דרך ב' – הצבת מספרים

נציב מספר נוח עבור x ונבדוק מה ערכו של y. ניתן לפסול כל אי-שוויון בתשובות שלא יתקיים עבור ערך y זה.

הטווח בו x צריך להימצא הוא $0 < x < 1$, נציב $x = \frac{1}{3}$:

$$4y = 3x \quad \Rightarrow \quad 4y = 3 \cdot \frac{1}{3} = 1$$

$$y = \frac{1}{4}$$

כעת, נציב גם בתשובות $y = \frac{1}{4}$, ונחפש אי-שוויון מתאים. נשים לב שמכיוון שהשתמשנו בהצבת מספרים, עלינו לפסול 3 תשובות בטרם נוכל לסמן תשובה נכונה.

(1) $y < 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{4} < 0 \quad \Rightarrow$ לא מתאים, התשובה נפסלת

(2) $1 < y \quad \Rightarrow \quad 1 < \frac{1}{4} \quad \Rightarrow$ לא מתאים, התשובה נפסלת

(3) $3 < y^2 \quad \Rightarrow \quad 3 < \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 3 < \frac{1}{16} \quad \Rightarrow$ לא מתאים, התשובה נפסלת

טיפ: כיוון שפסלנו 3 תשובות, ניתן לסמן את תשובה (4) מבלי לבדוק אותה. למען שלמות ההסבר, נבדוק את נכונותה:

(4) $y^2 < 1 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{1}{4}\right)^2 < 1 = \frac{1}{16} < 1 \quad \Rightarrow$ **מתאים, תשובה נכונה**

11. תשובה (3) נכונה. שאלה 8 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הבנה

ע"פ הנתון ידוע כי הסכום של a ו-b שווה ל-21, וידוע כי $b < a$. אם שני הנעלמים היו שווים זה לזה, כל אחד מהם היה שווה למחצית מ-21, כלומר 10.5. אך מכיוון ש-a גדול מ-b, a צריך להיות גדול ממחצית הסכום ו-b צריך להיות קטן ממחצית הסכום. לפיכך, b יהיה לכל היותר 10 (נתון כי המספרים שלמים), ולכן תשובה (3) מתאימה: $b < 11$.

דרך ב' – פתרון מתמטי

כאשר יש לנו שילוב של משוואה ואי-שוויון, נבודד את אחד הנעלמים במשוואה ונציבו באי-שוויון.

$$a + b = 21$$
$$a = 21 - b$$

נציב את הערך של a שמצאנו במקום הנעלם באי-שוויון:

$$b < a$$
$$b < 21 - b$$
$$2b < 21$$
$$b < 10.5$$

לפיכך ניתן לקבוע כי $b < 11$ (נתון שהמספרים שלמים).

דרך ג' – הצבת תשובות

ננסה להציב מספרים במקום הנעלמים המקיימים את הנתונים וכך לפסול תשובות שאינן מתאימות:

פסילת תשובה (1): $a = 11$, $b = 10$. ההצבה הנ"ל מקיימת את הנתונים (הסכום הוא 21 ו-a גדול מ-b), ולכן a אינו בהכרח גדול מ-14. התשובה נפסלת.

פסילת תשובות (2) ו-(4): $a = 20$, $b = 1$. ההצבה הנ"ל מקיימת את הנתונים (הסכום הוא 21 ו-a גדול מ-b). לכן, הוכחנו כי a אינו בהכרח קטן מ-20 (במקרה הזה הוא שווה ל-20) ו-b אינו בהכרח גדול מ-7. התשובות נפסלות.

פסלנו 3 תשובות ועל כן תשובה (3) נכונה (ואכן אין שום הצבה שתפריך אותה).

12. תשובה (1) נכונה. שאלה 8 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – פתרון מתמטי

עלינו לקבוע איזו טענה באשר ל-y נכונה. נתון אי-שוויון הקושר בין y ל-x. x אינו רלוונטי מפני שאין נתונים לגביו, ולכן נתמקד בשני האגפים הקיצוניים של האי-שוויון:

$2y < x < -2y \quad \Rightarrow \quad 2y < -2y$

נסדר אגפים:

$4y < 0$

נחלק ב-4:

$y < 0$

דרך ב' – הצבת תשובות / הצבת מספרים

עלינו לקבוע איזו טענה נכונה. נבדוק את התשובות, ובכל תשובה נציב ערך y המתאים לנתון המוצג בה. אם הערך לא יקיים את הנתון, ניתן לפסול את התשובה. מכיוון שכל תשובה מייצגת תחום מספרים שונה, ברגע שנמצא תשובה המקיימת את הנתון, היא התשובה הנכונה.

<u>נבדוק את תשובה (1):</u> $y < 0$, נציב: $y = -1$:

$2 \cdot (-1) < x < -2 \cdot (-1) \quad \Rightarrow \quad -2 < x < 2$

הנתון מתקיים, **תשובה נכונה**.

טיפ: מכיוון שהצבנו את התשובות, ברגע שמצאנו תשובה נכונה אין צורך להמשיך לבדוק את שאר התשובות, אך למען שלמות ההסבר נפסול אותן:

<u>נבדוק את תשובה (2):</u> $y = 0$:

$2 \cdot 0 < x < -2 \cdot 0 \quad \Rightarrow \quad 0 < x < 0$

הנתון לא מתקיים, התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (3):</u> $0 < y < 1$, נציב: $y = \frac{1}{2}$:

$2 \cdot \frac{1}{2} < x < -2 \cdot \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad 1 < x < -1$

הנתון לא מתקיים, התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (4):</u> $1 < y$, נציב: $y = 2$:

$2 \cdot 2 < x < -2 \cdot 2 \quad \Rightarrow \quad 4 < x < -4$

הנתון לא מתקיים, התשובה נפסלת.

13. תשובה (4) נכונה. שאלה 10 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – פתרון מתמטי

כאשר נתונים שני אי-שוויונים עם אגף משותף, ניתן לשרשר אותם אחד לשני ואף לבטל את הגורם המקשר (האגף המשותף).

$0 < x - y$

$x + y < 0$

$\Downarrow$

$x + y < 0 < x - y$

$\Downarrow$

$x + y < x - y$

כעת, נעביר אגפים ונקבל:

$2y < 0$

נחלק ב-2:

$y < 0$

דרך ב' – הבנה

לפי התשובות עלינו לקבוע מה סימנו של אחד המשתנים.

נתבונן באי השוויון הראשון: $0 < x - y$

מאי שוויון זה ניתן להסיק כי x גדול מ-y. זאת, מאחר שכדי שהפרש יהיה חיובי, יש לחסר מספר קטן ממספר גדול.

כעת נתמקד באי השוויון השני: $x + y < 0$

נבחן את האפשרויות. אם x חיובי, y צריך להיות שלילי כדי שסכומם יהיה שלילי. אם x שלילי, y יהיה שלילי מפני שהוא קטן מ-x (לפי מה שהסקנו מאי השוויון הראשון). כך או כך, y שלילי, בעוד ש-x יכול להיות שלילי או חיובי.

---

14. תשובה (1) נכונה. שאלה 11 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – פתרון מתמטי

לפנינו אי-שוויון ומשוואה, מהם עלינו ללמוד על ערכו של y. לשם כך, נשאף להיפטר מ-x ע"י בידודו מהמשוואה והצבתו באי-שוויון.

$3x + 2y = 0$

$3x = -2y$

$x = \frac{-2y}{3}$

עתה נציב את ערך ה-x שביטאנו באי-שוויון:

$2 < \frac{-2y}{3}$

$6 < -2y$

עתה עלינו לחלק את האי-שוויון ב-2-. אך, כאשר מחלקים / כופלים אי-שוויון באיבר שלילי, צריך להחליף את כיוון הסימן. כדי להימנע מבלבולים מיותרים, ניתן להעביר את כל אחד מהאגפים לצד השני, וכך נוכל לשמור על כיוון הסימן:

$2y < -6$

נחלק את האי-שוויון ב-2:

$y < -3$

דרך ב' – הצבת מספרים

נציב מספר נוח עבור x ונבדוק מה ערכו של y. ניתן לפסול כל אי-שוויון בתשובות שלא יתקיים עבור ערך y זה.

הטווח בו x צריך להימצא הוא $2 < x$, נציב $x = 3$:

$$3x + 2y = 0 \quad \Rightarrow \quad 3 \cdot 3 + 2y = 0$$

$$2y = -9$$

$$y = -4\frac{1}{2}$$

כעת, נציב גם בתשובות $y = -4\frac{1}{2}$, ונחפש אי-שוויון מתאים. נשים לב שמכיוון שהשתמשנו בהצבת מספרים, עלינו לפסול 3 תשובות בטרם נוכל לסמן תשובה נכונה.

(1) $y < -3 \quad \Rightarrow \quad -4\frac{1}{2} < -3 \quad \Rightarrow$ **מתאים**

(2) $-6 < y < -2 \quad \Rightarrow \quad -6 < -4\frac{1}{2} < -2 \quad \Rightarrow$ **מתאים**

(3) $5 < y \quad \Rightarrow \quad 5 < -4\frac{1}{2} \quad \Rightarrow$ לא מתאים, התשובה נפסלת

(3) $2 < y < 6 \quad \Rightarrow \quad 2 < -4\frac{1}{2} < 6 \quad \Rightarrow$ לא מתאים, התשובה נפסלת

נערוך הצבה נוספת במטרה לפסול את אחת התשובות שנותרו. נציב $x = 4$:

$$3x + 2y = 0 \quad \Rightarrow \quad 3 \cdot 4 + 2y = 0$$

$$2y = -12$$

$$y = -6$$

ניתן לפסול את תשובה (2) שאינה מכילה ערך זה.

פסלנו 3 תשובות ועל כן תשובה (1) נכונה.

דרך ג' – הבנה

לפנינו אי-שוויון ומשוואה, מהם עלינו ללמוד על ערכו של y. לשם כך, נבודד את y במשוואה הנתונה:

$$3x + 2y = 0$$

$$2y = -3x$$

$$y = \frac{-3}{2}x$$

נתון: $2 < x$. אילו x היה שווה בדיוק ל-2, ערך y היה 3-. אולם ידוע ש-x גדול מ-2 ולכן מכפלתו ב- $\frac{-3}{2}$ תהיה קטנה מ-3-. זאת מפני שככל ש-x יגדל, כך y יקטן. ניתן לערוך הצבות נוחות עבור x כדי להבין זאת. למשל:

$$x = 4 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{-3}{2} \cdot 4 = -6$$

$$x = 40 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{-3}{2} \cdot 40 = -60$$

כאמור, מכפלתו של x ב- $\frac{-3}{2}$ קטנה מ-3-. כלומר, $y < -3$.

15. תשובה (3) נכונה. שאלה 14 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הצבת התשובות

מאחר שהטווחים שבתשובות לא חופפים (בכל תשובה יש טווח מספרים שונה), נוכל להציב ערך x הנמצא בטווחים הללו ולבדוק את התשובות. אם נמצא ערך x מתאים המקיים את האי-שוויון, התשובה המכילה אותו בהכרח נכונה. באותו אופן, אם ערך ה-x שהצבנו לא מקיים את האי-שוויון, התשובה תיפסל, שכן אינה נובעת בהכרח מהנתון. כדי להקל על ההצבה, נפשט מעט את האי-שוויון כדי להקל על החישובים:

$$0 < 2x - 4x^2$$

נחלק ב-2:

$$0 < x - 2x^2$$

נסדר אגפים:

$$2x^2 < x$$

עתה נציב האי-שוויון שמצאנו את הערכים שבתשובות.

<u>נבדוק את תשובה (1):</u> $x < -\frac{1}{2}$, נציב $x = -1$:

$$2 \cdot (-1)^2 < -1 \quad \Rightarrow \quad 2 < -1$$

הנתון לא מתקיים, התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (2):</u> $-\frac{1}{2} < x < 0$, נציב $x = -\frac{1}{4}$:

$$2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^2 < -\frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot \frac{1}{16} < -\frac{1}{4}$$

אין צורך להשלים את החישוב מפני שאגף שמאל חיובי, ולכן לא ייתכן שהוא קטן ממספר שלילי.
הנתון לא מתקיים, התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (3):</u> $0 < x < \frac{1}{2}$, נציב $x = \frac{1}{4}$:

$$2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 < \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot \frac{1}{16} < \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{8} < \frac{1}{4}$$

הנתון מתקיים, **תשובה נכונה**.

כאמור, אין צורך לפסול 3 תשובות. למען שלמות ההסבר נפסול את תשובה (4):

<u>נבדוק את תשובה (4):</u> $\frac{1}{2} < x$, נציב $x = 1$:

$$2 \cdot 1^2 < 1 \quad \Rightarrow \quad 2 < 1$$

הנתון לא מתקיים, התשובה נפסלת.

דרך ב' – פתרון מתמטי

כדי למצוא באיזה טווח מבין הטווחים שבתשובות נמצא x, נתחיל לפתור את האי-שוויון:

$$0 < 2x - 4x^2$$

נחלק ב-2:

$$0 < x - 2x^2$$

נסדר אגפים:

$$2x^2 < x$$

מצאנו ש-x כופל כול אחד מהאגפים ולכן כדאי לנו לצמצם אותו. <u>אך</u>, מותר לחלק ב-x רק בתנאי שהוא שונה מ-0 (הרי אסור לחלק ב-0) ורק בתנאי שאנו יודעים האם הוא חיובי או שלילי, זאת משום שחלוקה באיבר שלילי באי-שוויון מחייבת הפיכת הסימן.

לכן, עלינו להבין שני דברים. תחילה, נבין ש-x לא יכול להיות שווה ל-0 אחרת שני האגפים של האי-שוויון מתאפסים ונקבל $0 > 0$ וזה כמובן תוצאה שגויה. שנית, עלינו להבין מהו סימנו של x. נביט באגף השמאלי: $2x^2$. x^2 הוא איבר חיובי משום שהוא עולה בחזקה זוגית (הראנו כבר שהוא שונה מ-0). כמו כן, 2 הוא גם כן חיובי. על כן, כל האגף השמאלי הוא חיובי. האגף הימני (x) גדול מהאגף השמאלי ולכן גם הוא חיובי $\Leftarrow$ $0 < x$.

לאחר שהוכחנו ש-x חיובי, נוכל לחלק בו בלי להתייחס לסימן:

$$2x < 1$$

נחלק ב-2:

$$x < \frac{1}{2}$$

מצאנו בהבנה כי $x > 0$, ולאחר מכן כי $x < \frac{1}{2}$, ולכן התחום המדויק של x הוא:

$$0 < x < \frac{1}{2}$$

---

16. תשובה (4) נכונה. שאלה 15 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – פתרון מתמטי

ראשית, נפשט את אי-השוויון. נזכור כי באי-שוויון כפול, שהנעלם מצוי רק באיברו האמצעי, ניתן לפתור ללא פירוק אלא ע"י ביצוע שרשרת הפעולות על שלושת האיברים.

$$7 < x^2 - 9 < 16 \quad /+9$$
$$16 < x^2 < 25$$

על מנת לפתור אי-שוויון ממעלה שנייה, נפתור תחת ההנחה ש-x חיובי:

$$16 < x^2 < 25 \;/\sqrt{}$$
$$4 < x < 5$$

בנוסף, עלינו לזכור כי ייתכן ש-x שלילי. לכן, סמטרית, x יכול להיות גם בטווח הבא (תמונת המראה של הטווח שקיבלנו כאשר x חיובי):

$$-5 < x < -4$$

כעת, משום שיש נתון נוסף, שלפיו $x < 0$, עלינו להתייחס רק לטווח השלילי של x. כלומר, רק הטווח $-5 < x < -4$ מקיים את שני הנתונים, כפי שכתוב בתשובה (4).

דרך ב' – הצבת תשובות

על מנת לבדוק את נכונותה של כל אחת מהתשובות, נציב במקום x מספר אשר נמצא בטווח המוצג בתשובה ונבדוק האם הוא מקיים את שני הנתונים. אך ראשית, נפשט את אי-השוויון.

$$7 < x^2 - 9 < 16 \quad /+9$$
$$16 < x^2 < 25$$

<u>תשובה (2):</u> נציב $x = -10$, או לחילופין כל מספר אחר הנמצא בטווח $x < -5$, ונבדוק האם מתקבל פסוק אמת:

$$16 < 100 < 25$$

התקבל פסוק שקר, ועל כן הטווח המוצג בתשובה (2) איננו מקיים את הנתונים.

<u>תשובה (3):</u> נציב $x = -2$, ונבדוק האם מתקבל פסוק אמת:

$$16 < 4 < 25$$

התקבל פסוק שקר, ועל כן הטווח המוצג בתשובה (3) איננו מקיים את הנתונים.

<u>תשובה (4):</u> נציב $x = -4.5$, ונבדוק האם מתקבל פסוק אמת:

$$16 < (-4.5)^2 < 25$$

אין צורך לחשב, מכיוון ש-(-4) בריבוע שווה 16 ו-(-5) בריבוע שווה 25, ניתן להסיק שכל מספר בטווח המוצג יהיה בין 16 ל-25.

---

17. תשובה (3) נכונה. שאלה 15 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הצבת מספרים

ניתן להציב מספר נוח במקום n, אשר נמצא בתוך חלק מהתחומים המוצעים בתשובות. נבחן עבור מספר זה האם אי-השוויון מתקיים ונפסול תשובות בהתאם. במידת הצורך, נבצע הצבות נוספות עד נפסול 3 תשובות ונישאר עם תשובה אחת מתאימה.

נתחיל מההצבה הפשוטה ביותר – $n = 0$:

$$0 < \frac{2+0}{2-0}$$
$$0 < 1$$

אי-השוויון מתקיים, כלומר 0 אמור להיות בתחום של התשובה הנכונה. זאת, מפני שאנו נשאלים מה התחום המדויק בו n יכול להימצא, ועל כן התחום המדויק בהכרח יכלול כל n שמקיים את אי השוויון. נפסול כל תשובה שהתחום המוצג בה אינו כולל את המספר 0. תשובות (1), (2) ו-(4) נפסלות, ועל כן תשובה (3) נכונה.

דרך ב' – פתרון מתמטי

חלוקה של שני איברים תהיה חיובית רק אם שניהם חיוביים או שניהם שליליים. נבחן את שתי האפשרויות:

שני האיברים חיוביים:

$2 + n > 0$ וגם $2 - n > 0$

$n > -2$ וגם $2 > n$

כלומר: $-2 < n < 2$

טרם בדקנו את האפשרות השנייה, אולם אין תשובה נוספת מלבד (3) המכילה את התחום ולכן אין צורך להמשיך ולבדוק. נעשה זאת למען שלמות ההסבר.

שני האיברים שליליים:

$2 + n < 0$ וגם $2 - n < 0$

$n < -2$ וגם $2 < n$

n לא יכול להיות גם קטן מ- 2- וגם גדול מ-2 ולכן אין פתרון במקרה זה. האפשרות היחידה שמקיימת את אי השוויון היא הראשונה.

18. תשובה (2) נכונה. שאלה 16 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – פתרון מתמטי

לפנינו אי-שוויון בעל 3 אגפים, ועלינו למצוא מה התחום המדויק עבור x. כדי לפשט את האי-שוויון, נפרק אותו לשני אי-שוויונות. תחילה, נפשט את האגף האמצעי והשמאלי:

$$\frac{1}{3} < \frac{x}{x+1}$$

נתון ש-x חיובי ומכאן ש- $x + 1$ חיובי. לכן ניתן ליצור מכנה משותף:

$$x + 1 < 3x$$

נסדר אגפים:

$$1 < 2x$$

נחלק ב-2:

$$\frac{1}{2} < x$$

בשלב זה ניתן לסמן את תשובה (2), מפני שנשאלנו מה התחום <u>המדויק</u> שבו x יכול להימצא, ולכן לא ייתכן שתשובה אחרת תתאים.

למען שלמות ההסבר, נפשט גם את האגף הימני ואמצעי:

$$\frac{x}{x+1} < \frac{2}{3}$$

כאמור, $x + 1$ חיובי ולכן ניתן ליצור מכנה משותף:

$$3x < 2 \cdot (x + 1)$$

נפתח סוגריים:

$$3x < 2x + 2$$

נסדר אגפים:

$$x < 2$$

לסיכום, הטווח המדויק של x הוא: $\frac{1}{2} < x < 2$

דרך ב' – הברקה / הצבת מספרים

נבחן את הביטוי שנמצא במרכז האי-שוויון- $\frac{x}{x+1}$. נראה שבביטוי זה המכנה גדול ב-1 מהמונה. כמו כן, הביטוי הזה נמצא בין $\frac{1}{3}$ ל-$\frac{2}{3}$. ניתן לזהות את השבר $\frac{1}{2}$ שעומד בשני התנאים הללו – המכנה שלו גדול ב-1 מהמונה, והוא נמצא בטווח המדובר. לכן, $\frac{1}{2}$ הוא דוגמה לשבר המקיים את הנתון.

עם ההבנה הזו אנו יכולים לבדוק את התשובות. אם $\frac{1}{2} = \frac{x}{x+1}$, אזי $x = 1$.

נבדוק איזו תשובה מכילה את 1 בתחום שלה ונפסול כול תשובה אחרת (כאמור, $x = 1$ מקיים את הנתון ולכן ערך זה צריך להופיע בתחום המדויק של x.

1 נמצא רק בתחום של תשובה (2) ולכן ניתן לפסול את יתר התשובות.

19. תשובה (1) נכונה. שאלה 17 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הצבת מספרים

ואנו נשאלים לגבי טווח ערכיו של y. לכן, אנו יכולים להציב מספר במקום x, למצוא את y בהתאם להצבה שעשינו ולפסול תשובות בהתאם. נתון לנו ש-$x > 1$, ולכן נציב לדוגמה $x = 2$.

$$x^2 \cdot y^2 = (x \cdot y - 1)^2$$
$$2^2 \cdot y^2 = (2y - 1)^2$$

נפתח סוגריים באגף הימני באמצעות נוסחת כפל מקוצר:

$$4y^2 = 4y^2 + 1 - 4y$$
$$4y = 1$$
$$y = \frac{1}{4}$$

מצאנו כי אחד מערכיו האפשריים של y הוא $\frac{1}{4}$, ולכן ערך זה צריך להיות בטווח של התשובה הנכונה. נבחן את התשובות ונפסול כל תשובה שהטווח המוצג בה אינו כולל ערך זה.

(1) $0 < y < \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{4}$ בטווח. **מתאים.**

(2) $\frac{1}{4} < y$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{4}$ אינו בטווח. התשובה נפסלת.

(3) $y < -1$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{4}$ אינו בטווח. התשובה נפסלת.

(4) $2 < y$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{4}$ אינו בטווח. התשובה נפסלת.

פסלנו 3 תשובות, ולכן תשובה (1) נכונה.

דרך ב' – פתרון מתמטי

$$x^2 \cdot y^2 = (x \cdot y - 1)^2$$

תחילה נפתח סוגריים באגף הימני באמצעות נוסחת כפל מקוצר:

$$x^2 \cdot y^2 = x^2 \cdot y^2 + 1 - 2xy$$
$$0 = -2xy + 1$$
$$2xy = 1$$

כדי להבין באיזה טווח y יימצא, נבודד אותו:

$$2xy = 1$$
$$y = \frac{1}{2x}$$

כעת, מכיוון שידוע ש-$x > 1$, $2x$ בהכרח גדול מ-2. אם המכנה בביטוי שלעיל גדול מ-2, השבר כולו יהיה קטן מ-$\frac{1}{2}$.
בנוסף, גם המונה וגם המכנה של השבר הם מספרים חיוביים, ולכן y גם הוא חיובי. לסיכום: $0 < y < \frac{1}{2}$.

דרך ג' – פתרון מתמטי נוסף

כדי לשלב בין אי-שוויון למשוואה, תחילה עלינו לבודד במשוואה את הנעלם שמופיע באי-שוויון (x) ולהציב במקומו את מה שהתקבל במשוואה.

$$x^2 \cdot y^2 = (x \cdot y - 1)^2$$

נפתח סוגריים באגף הימני באמצעות נוסחת כפל מקוצר:

$$x^2 \cdot y^2 = x^2 \cdot y^2 + 1 - 2xy$$

נכנס איברים דומים:

$$0 = 1 - 2xy$$
$$2xy = 1$$
$$x = \frac{1}{2y}$$

כעת, נציב $\frac{1}{2y}$ במקום x באי-שוויון:

$$1 < \frac{1}{2y}$$

כעת, על מנת ליצור מכנה משותף ולבודד את y עלינו לכפול ב-2y את האי-שוויון. במצבים כאלו, עלינו קודם לבדוק האם ניתן לדעת אם ביטוי זה הוא חיובי או שלילי (שהרי אם מדובר בביטוי שלילי עלינו להפוך סימן).

ניתן להבין שעל מנת שהשבר יהיה גדול מ-1, ערכו של השבר $\frac{1}{2y}$ צריך להיות חיובי. משום שהמונה חיובי, ניתן לקבוע שגם המכנה חיובי (אם המכנה היה מספר שלילי, ערכו של השבר היה שלילי, ולא ייתכן שערכו היה גדול מ-1). לכן, $2y > 0$, וניתן להכפיל את אי-השוויון ב-2y מבלי לשנות את הסימן.

$$2y < 1$$
$$y < \frac{1}{2}$$

לטווח זה נוספת המסקנה שאליה הגענו קודם – מצאנו ש-$2y > 0$, ועל כן גם $y > 0$. נאחד את שני טווחים אלו ונקבל: $0 < y < \frac{1}{2}$.

20. תשובה (1) נכונה. שאלה 18 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – פתרון מתמטי

נפשט את הנתונים במטרה להבין אילו ערכי y אפשריים:

$$y^2 \cdot x + y^2 \cdot z < (x+z)^2$$

נוציא y^2 כגורם משותף באגף שמאל:

$$y^2 \cdot (x+z) < (x+z)^2$$

נתון:

$$x + z = y$$

נציב ערך זה באי-שוויון שלעיל:

$$y^2 \cdot (x+z) < (x+z)^2 \quad \Rightarrow \quad y^2 \cdot y < y^2$$

$$y^3 < y^2$$

y^2 אינו שלילי, וכן אינו שווה ל-0 (שכן עבור 0 האי-שוויון שגוי), ולכן ניתן לחלק את שני האגפים ב- y^2:

$$y < 1$$

התשובה היחידה שלא מקיימת אי-שוויון זה היא תשובה (1).

דרך ב' – הבנה

מהפישוט שלעיל הגענו לאי-שוויון: $y^3 < y^2$

האי-שוויון לא מתקיים עבור מספרים חיוביים גדולים מ-1 ($1 < y$), שכן כל מספר חיובי (גדול מ-1) בחזקת 3 יהיה **גדול** מאותו מספר בחזקת 2. בשלב זה ניתן לסמן את תשובה (1), אולם למען שלמות ההסבר, נבחן את יתר האפשרויות.

האי-שוויון מתקיים עבור מספרים שליליים ($y < 0$), מאחר שעבורם y^3 הוא שלילי, ואילו y^2 הוא חיובי. תשובות (3) ו-(4) מתאימות ל-y ולכן הן נפסלות.

כעת נותר לנו לבחון את השברים החיוביים ($0 < y < 1$). עבורם האי-שוויון מתקיים, מפני שכפל בשבר פשוט מקטין את המספר. אילו נכפול את y בעצמו 3 פעמים, התוצאה תהיה קטנה יותר מאשר מכפלת y בעצמו פעמיים בלבד. תשובה (2) מתאימה ל-y ולכן היא נפסלת.

דרך ג' – הצבת התשובות

נתונים אי-שוויון ומשוואה הקושרים בין x, y ו-z. עלינו לקבוע איזה מהמספרים הבאים **לא יכול** להיות y. מאחר שנראה מסובך למדי לפשט את הנתונים, נציב את התשובות ונחפש ערך שלא מקיים אותם.

טיפ: בהצבת תשובות, כדאי להתחיל בתשובות הנוחות יותר.

<u>נבדוק את תשובה (1):</u> $y = 1$

$$x + z = y \quad \Rightarrow \quad x + z = 1$$

$$y^2 \cdot x + y^2 \cdot z < (x+z)^2 \quad \Rightarrow \quad 1^2 \cdot x + 1^2 \cdot z < (x+z)^2$$
$$x + z < (x+z)^2 \quad \Rightarrow \quad 1 < 1^2$$

לא נכון, **תשובה נכונה.**

טיפ: מכיוון שהצבנו את התשובות, ברגע שמצאנו תשובה נכונה אין צורך להמשיך לבדוק את שאר התשובות.

ערך מוחלט

ערך מוחלט מציין את המרחק של מספר מסוים מ-0 על ציר המספרים. מאחר שמרחק אינו יכול להיות שלילי, ערך מוחלט תמיד יהיה הערך החיובי של המספר, והוא מסומן כך:

ערך מוחלט של x ← $|x|$

- הערך המוחלט של מספר חיובי הוא המספר עצמו.
- הערך המוחלט של מספר שלילי הוא המספר הנגדי לו (אותו מספר, אבל חיובי).
- הערך המוחלט של אפס הוא אפס.

דוגמאות:

$$|8| = 8 \quad ; \quad |-3| = 3 \quad ; \quad \left|-\frac{2}{7}\right| = \frac{2}{7} \quad ; \quad |0| = 0$$

אם בתוך הערך המוחלט יש ביטוי, הערך של כל הביטוי יהיה חיובי, ולא הערך של כל אחד מהמספרים או המרכיבים של הביטוי.

דוגמה:

דרך נכונה: $|4 + (-7)| \Rightarrow |4 - 7| \Rightarrow |-3| = 3$

דרך לא נכונה: $|4 + (-7)| \nRightarrow |4 + (+7)|$

כללים

$\mathbf{0 \le |x|}$

מאחר שהערך המוחלט מייצג מרחק, הוא תמיד יהיה גדול מאפס או שווה לאפס. ערך מוחלט אינו יכול להיות שלילי.

$\mathbf{|ab| = |a| \cdot |b|}$

המכפלה של שני מספרים תמיד תהיה זהה, אולם הסימן שלה יכול להשתנות, בהתאם לסימן של המספרים עצמם (חיובי או שלילי). התוצאה בערך מוחלט תמיד תהיה חיובית.

$\mathbf{|a + b| \le |a| + |b|}$

הסכום של שני מספרים יכול להיות שווה לסכום הערכים המוחלטים שלהם, או קטן ממנו.

אם a ו-b **שווי** סימן: $|a + b| = |a| + |b|$

אם a ו-b **שוני** סימן: $|a + b| < |a| + |b|$

דוגמה:

$|(-2) + (-5)| = |-2| + |-5| \quad \Rightarrow \quad |-7| = 2 + 5$

$|(-2) + 5| < |-2| + |5| \quad \Rightarrow \quad |3| < 2 + 5$

שאלות הבנה

רוב השאלות בנושא ערך מוחלט בבחינה הן שאלות הבנה, שדורשות פחות חישובים ויותר הבנה והסקת מסקנות לגבי ערכי המשתנים.

דוגמה:

נתון: $x \cdot y < 0$
$x < |x|$

איזו מהטענות הבאות נכונה בהכרח?

(1) $|y| < |x|$ (2) $|y| = y$ (3) $y < 0$ (4) $\left|\frac{x}{y}\right| < 1$

פתרון -

המכפלה $x \cdot y$ היא שלילית, ולכן x ו-y חייבים להיות שוני סימן. מכיוון שהערך המוחלט של x גדול מ-x, x חייב להיות שלילי (אם הוא היה חיובי הם היו שווים), ולכן y הוא חיובי.
בהתאם לכך, תשובה (2) נכונה.

$x < |x|$	$\Leftarrow$	**x שלילי**
$x = |x|$	$\Leftarrow$	**x חיובי או 0**
$|x| < x$	$\Leftarrow$	**לא ייתכן**

ערך מוחלט במשוואות

כאשר נתונה משוואה עם ערך מוחלט, הדרך לפתור אותה היא פשוט לחלק ל-2 מצבים:

1) אגף שמאל שווה לאגף ימין
2) אגף שמאל שווה למינוס אגף ימין

דוגמה:

נתון: $|x+4| = 9$
$x = ?$

פתרון - נבדוק את שתי האפשרויות:

שמאל שווה לימין: $x + 4 = 9 \quad \Rightarrow \quad x = 5$

שמאל שווה למינוס ימין: $x + 4 = -9 \quad \Rightarrow \quad x = -13$

מצאנו שני ערכים של x שמקיימים את המשוואה: 5 ו- (-13).

ערך מוחלט באי-שוויון

כאשר נתון אי-שוויון עם ערך מוחלט, הדרך לפתור אותו היא כמו במשוואה - לחלק ל-2 מצבים :

1) כאשר הביטוי בערך המוחלט קטן מהביטוי באגף השני.
2) כאשר הביטוי בערך המוחלט גדול מהביטוי באגף השני.

דוגמה 1:

נתון : $|x+4| < 7$

$x = ?$

פתרון -

על-מנת שהביטוי בערך המוחלט יהיה קטן מ-7, הערך שלו חייב להיות בין 7 ל- (-7) - באופן זה, המרחק מאפס (אותו מציין הערך המוחלט) יהיה קטן מ-7 יחידות :

$$-7 < x+4 < 7 \quad \Rightarrow \quad -11 < x < 3$$

דוגמה 2:

נתון : $5 < |x+2|$

$x = ?$

פתרון -

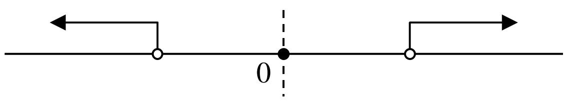
על-מנת שהביטוי בערך המוחלט יהיה גדול מ-5, הערך שלו חייב להיות גדול מ-5, או קטן מ- (-5) - באופן זה, המרחק מאפס (אותו מציין הערך המוחלט) יהיה גדול מ-5 יחידות :

$5 < x+2$ או $x+2 < -5$

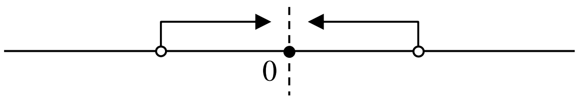
$3 < x$ או $x < -7$

התחום של הנעלם על ציר המספרים תמיד סימטרי משני צידי האפס -

כאשר הערך המוחלט באגף "הגדול" של האי-שוויון



כאשר הערך המוחלט באגף "הקטן" של האי-שוויון



ניסוי וטעייה

בחלק גדול מהשאלות המופיעות בבחינה, יהיה קל ומהיר יותר לבדוק את התשובות על ידי הצבתן או הצבת מספרים בהתאם לנתוני השאלה, ולמצוא את התשובה הנכונה כמעט ללא חישוב.

דוגמה:

נתון : $x < 0$

$$2 + \frac{2x}{|x|} = ?$$

(1) 1 (2) 0 (3) $-x$ (4) $1 - x$

פתרון -

נציב מספר במקום x ונבדוק את התשובות. נציב : $x = -3$

$$2 + \frac{2x}{|x|} = 2 + \frac{2 \cdot (-3)}{|-3|} = 2 + \frac{-6}{3} = 2 - 2 = 0$$

קיבלנו כי הביטוי שווה ל-0. ניתן לפסול את תשובות 2, 3 ו-4, ולכן אין צורך להציב מספר נוסף - תשובה (2) נכונה.

תרגול שאלות מבחינות אמת

1. נתון: $|a+b|=|a-b|$, $b\neq 0$

$a=?$

(1) $-b$

(2) $\frac{-b}{2}$

(3) 0

(4) $2b$

---

2. נתון: $|x+1|<|x-1|$

איזה מן המספרים הבאים מקיים את האי-שוויון הנתון?

(1) 1

(2) -2

(3) 0

(4) $\frac{1}{2}$

---

3. נתון: $a<0$

$0<b$

$|a\cdot b|=?$

(1) $b\cdot|a|$

(2) $a\cdot|b|$

(3) $a\cdot b$

(4) $-b\cdot|a|$

---

4. נתון: $|x+y|=|x-y|$

$x\cdot y=?$

(1) 1

(2) 2

(3) 0

(4) אי-אפשר לדעת על פי הנתון

פתרתי ______________ שאלות ב ______________ דקות, ______________ תשובות נכונות

5. a הוא מספר שלילי.

נתון: $|a| + 3 = b$

$6 < b$

מה הטווח המדויק של a?

(1) $a < -3$

(2) $a < -9$

(3) $-3 < a < 0$

(4) $-9 < a < 0$

---

6. נתון: $a^n \neq |a|^n$, n הוא מספר שלם.

מהנתון אפשר להסיק ש-

(1) $a < 0$ ו-$n < 0$

(2) $a < 0$ ו-n הוא מספר אי-זוגי

(3) $0 < a$ או n הוא מספר זוגי

(4) $0 < a$ או $n < 0$

---

7. נתון: $|x| = |y|$, $x < -1$

איזו מן האפשרויות הבאות נכונה בהכרח?

(1) $1 < y^2$

(2) $-1 < y$

(3) $x + y = 0$

(4) $\frac{x}{y} = 1$

---

8. נתונות המשוואות: $|x| \neq x$

$|-3x| \neq -3x$

$x = ?$

(1) 0

(2) $\frac{1}{3}$

(3) $-\frac{1}{3}$

(4) שום מספר x אינו מקיים את המשוואות

פתרתי ____________ שאלות ב ____________ דקות, ____________ תשובות נכונות

.9 נתון: $(a-b)^2 < 1$

איזו מן הטענות הבאות נכונה בהכרח?

(1) $|a-b| < 1$
(2) $1 < |a-b|$
(3) $(a+b)^2 < 1$
(4) $1 < (a+b)^2$

.10 נתון: $|2x+3| = -2x-3$, $|4x+6| = 10$

$x = ?$

(1) 1
(2) -1
(3) -4
(4) 4

.11 נתון: $A \cdot B < 0$

$\frac{A}{B} < \frac{B}{A}$

מה נכון בהכרח?

(1) $|B| < |A|$
(2) $B < 0 < A$
(3) $0 < A + B$
(4) $A + B < 0$

.12 נתון: $|x+y| = x-y$, $x \neq y$

איזו מהטענות הבאות נכונה **בהכרח**?

(1) $x < 0$ וגם $y < 0$
(2) $x = 0$ או $y = 0$
(3) $x = -y$
(4) המצב הנתון נכון לכל x ו-y

פתרתי ____________ שאלות ב ____________ דקות, ____________ תשובות נכונות

13. נתון: x הוא מספר שלם.

$$|x+8|<3$$

כמה ערכי x שונים מקיימים את הנתונים?

(1) 5 (2) 6 (3) 3 (4) 4

---

14. באיזה מהמצבים הבאים **לא בהכרח** מתקיים השוויון

$|a|+|b|=|a+b|$?

(1) a ו-b הם מספרים חיוביים
(2) a ו-b הם מספרים שליליים
(3) a ו-b הם מספרים שלמים
(4) $a=0$ או $b=0$

---

15. נתון: $a<b<|a\cdot b\cdot c|<c$

איזו מהטענות הבאות נכונה בהכרח?

(1) $|a\cdot b|<1$ (2) $1<c$ (3) $|a|<|c|$ (4) $a<0$

פתרתי ____________ שאלות ב ____________ דקות, ____________ תשובות נכונות

תשובות

שאלה	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
תשובה	3	2	1	3	1	2	1	4	1	3

שאלה	11	12	13	14	15
תשובה	1	2	1	3	1

פתרתי 15 שאלות - ______________ נכונות, ______________ אחוזי הצלחה

.1 תשובה (3) נכונה. שאלה 1 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – פתרון מתמטי
משמעות המשוואה הנתונה היא שהביטויים שבתוך הערכים המוחלטים הם שווים או נגדיים.

תחילה, נניח שהביטויים שווים:

$|a + b| = |a - b| \quad \Rightarrow \quad a + b = a - b$

נסדר אגפים:

$a - a + b + b = 0$

$2b = 0 \quad \Rightarrow \quad b = 0$

נתון ש- 0 b ולכן פתרון זה שגוי.

נניח שהביטויים נגדיים:

$|a + b| = |a - b| \quad \Rightarrow \quad a + b = -(a - b)$

$a + b = -a + b$

נסדר אגפים:

$a + a + b - b = 0$

$2a = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0$

טיפ: האובייקט הנ"ל יחסית נפוץ בבחינה וכדאי לזכור ולהכיר אותו. כאשר נתון כי $|x + y| = |x - y|$ משמע שלפחות אחד הנעלמים שווה ל-0.

דרך ב' – פתרון מתמטי נוסף
כדי לבטל את הערך המוחלט, ניתן להעלות את אגפי המשוואה בחזקת 2. זאת משום שחזקה זוגית גם כן הופכת את המספר שבתוכה לחיובי (או משאירה אותו 0).

$|a + b| = |a - b| \quad \Rightarrow \quad (a + b)^2 = (a - b)^2$

נפתח את הסוגריים לפי נוסחאות הכפל המקוצר:

$a^2 + b^2 + 2ab = a^2 + b^2 - 2ab$

נעביר אגפים:

$4ab = 0$

נחלק ב-4:

$ab = 0$

נתון ש- $b \neq 0$, לכן נוכל לחלק את המשוואה ב-b:

$a = 0$

דרך ג' – הצבת התשובות
עלינו למצוא את ערכו של a. נציב את התשובות ונחפש תשובה המקיימת את המשוואה. כלומר, נחפש תשובה המביאה לפסוק אמת המתקיים עברו כל ערך של b.

טיפ: בהצבת תשובות, כדאי להתחיל בתשובות הנוחות יותר.

<u>נבדוק את תשובה (3):</u> $a = 0$

$$|a + b| = |a - b| \quad \Rightarrow \quad |b| \stackrel{?}{=} |-b|$$

המשוואה מתקיימת ולכן זו **התשובה הנכונה.**

טיפ: מכיוון שהצבנו את התשובות, ברגע שמצאנו תשובה נכונה אין צורך להמשיך לבדוק את שאר התשובות.

---

2. תשובה (2) נכונה. שאלה 2 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – ניסוי וטעייה / הצבת התשובות
נשאלנו איזה מספר מקיים את האי-שוויון הנתון, ולכן נציב את התשובות ונחפש מספר מתאים.

<u>נבדוק את תשובה (1):</u> $x = 1$

$$|1 + 1| < |1 - 1| \quad \Rightarrow \quad |2| < |0| \quad \Rightarrow \quad 2 < 0$$

לא מתאים, התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (2):</u> $x = -2$

$$|-2 + 1| < |-2 - 1| \quad \Rightarrow \quad |-1| < |-3| \quad \Rightarrow \quad 1 < 3$$

מתאים, **תשובה נכונה.**

טיפ: מכיוון שהצבנו את התשובות, ברגע שמצאנו תשובה נכונה אין צורך להמשיך לבדוק את שאר התשובות, אך למען שלמות ההסבר נפסול אותן:

<u>נבדוק את תשובה (3):</u> $x = 0$

$$|0 + 1| < |0 - 1| \quad \Rightarrow \quad |1| < |-1| \quad \Rightarrow \quad 1 < 1$$

לא מתאים, התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (4):</u> $x = \frac{1}{2}$

$$\left|\frac{1}{2} + 1\right| < \left|\frac{1}{2} - 1\right| \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{3}{2}\right| < \left|-\frac{1}{2}\right| \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{2} < \frac{1}{2}$$

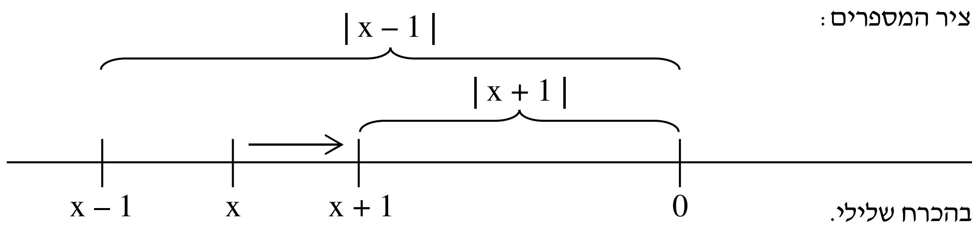
לא מתאים, התשובה נפסלת.

<u>שימו לב,</u> זוהי דוגמה מצוינת לשאלה שהפתרון המתמטי שלה מורכב מאוד, ולעומתו, פתרון בשיטות פסיכומטריות הוא פשוט ומהיר.

דרך ב' – הבנה
ערך מוחלט של מספר שווה למרחקו של המספר מ-0 על ציר המספרים. נתון:

$$|x + 1| < |x - 1|$$

כלומר, אילו <u>נוסיף</u> 1 ל-x, מרחקו מ-0 יהיה קטן יותר מאשר אילו <u>נפחית</u> ממנו 1. במילים אחרות, אילו נזיז את x ימינה על ציר המספרים (נוסיף לו 1), הוא יהיה קרוב יותר ל-0 מאשר אילו נזיז אותו שמאלה (נפחית ממנו 1).
נתאר זאת על ציר המספרים:



לפיכך, x הוא בהכרח שלילי.

.3 תשובה (1) נכונה. שאלה 2 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הבנה

נתון ש-a שלילי וש-b חיובי. הביטוי עליו אנו נשאלים הוא מכפלתם בערך מוחלט. ביטוי זה אינו שווה ל-0 ולפיכך הוא בהכרח חיובי. כעת נבדוק את התשובות ונפסול כל תשובה שאינה חיובית:

מתאים. $\Rightarrow$ (1) $b \cdot |a| \;\Rightarrow\; + \cdot +$
b חיובי, ערכו המוחלט של a חיובי. כלומר, הביטוי כולו חיובי.

לא מתאים, התשובה נפסלת. $\Rightarrow$ (2) $a \cdot |b| \;\Rightarrow\; - \cdot +$
a שלילי, ערכו המוחלט של b חיובי. כלומר, הביטוי כולו שלילי.

לא מתאים, התשובה נפסלת. $\Rightarrow$ (3) $a \cdot b \;\Rightarrow\; - \cdot +$
a שלילי, b חיובי. כלומר, הביטוי כולו שלילי.

לא מתאים, התשובה נפסלת. $\Rightarrow$ (4) $-b \cdot |a| \;\Rightarrow\; - \cdot +$
-b שלילי, ערכו המוחלט של a חיובי. כלומר, הביטוי כולו שלילי.

דרך ב' – הצבת מספרים

נתון ש-a שלילי וש-b חיובי. נציב $a = -1$, $b = 1$.

$$|a \cdot b| = |-1 \cdot 1| = |-1| = 1$$

כעת, נציב גם בתשובות $a = -1$ ו- $b = 1$, ונחפש תשובה השווה ל-1. נשים לב שמכיוון שהשתמשנו בהצבת מספרים במקום הנעלמים, עלינו לפסול 3 תשובות בטרם נוכל לסמן תשובה נכונה.

מתאים. $\Rightarrow$ (1) $b \cdot |a| = 1 \cdot |-1| = 1 \cdot 1 = 1$

לא מתאים, התשובה נפסלת. $\Rightarrow$ (2) $a \cdot |b| = -1 \cdot |1| = -1 \cdot 1 = -1$

לא מתאים, התשובה נפסלת. $\Rightarrow$ (3) $a \cdot b = -1 \cdot 1 = -1$

לא מתאים, התשובה נפסלת. $\Rightarrow$ (4) $-b \cdot |a| = -1 \cdot |-1| = -1 \cdot 1 = -1$

פסלנו 3 תשובות, ועל כן תשובה (1) נכונה.

4. תשובה (3) נכונה. שאלה 7 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – פתרון מתמטי
משמעות המשוואה הנתונה היא שהביטויים שבתוך הערכים המוחלטים הם שווים או נגדיים.

תחילה, נניח שהביטויים שווים:

$$|x+y| = |x-y| \quad \Rightarrow \quad x+y = x-y$$

נסדר אגפים:

$$x - x + y + y = 0$$

$$2y = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0$$

כעת, נניח שהם נגדיים:

$$|x+y| = |x-y| \quad \Rightarrow \quad x+y = -(x-y)$$

$$x + y = -x + y$$

נסדר אגפים:

$$x + x + y - y = 0$$

$$2x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

כלומר, $x = 0$ או $y = 0$. לכן, המכפלה של x ו-y תמיד תהיה 0.

טיפ: האובייקט הנ"ל יחסית נפוץ בבחינה וכדאי לזכור ולהכיר אותו. כאשר נתון כי $|x+y| = |x-y|$ משמע שלפחות אחד הנעלמים שווה ל-0.

דרך ב' – פתרון מתמטי נוסף
הפעולה אותה מבצע ערך מוחלט היא הפיכת האיבר שבתוכו לחיובי (או להשאירו 0).
כדי לחקות פעולה זו, ולבטל את הערך המוחלט, ניתן להעלות את אגפי המשוואה בחזקת 2. זאת משום שחזקה זוגית גם כן הופכת את המספר שבתוכה לחיובי (או משאירה אותו 0). באופן זה החזקה מבצעת את פעולת הערך המוחלט וניתן לפתור את המשוואה כרגיל.

$$|x+y| = |x-y| \quad \Rightarrow \quad (x+y)^2 = (x-y)^2$$

נפתח את הסוגריים לפי נוסחאות הכפל המקוצר:

$$x^2 + y^2 + 2xy = x^2 + y^2 - 2xy$$

נעביר אגפים:

$$4xy = 0$$

נחלק ב-4:

$$xy = 0$$

דרך ג' – הברקה
יש מי שמזהה שאילו אחד הנעלמים היה מתאפס, אזי השוויון היה נשמר.
למשל אם $x = 0$, נקבל:

$$|y| = |-y|$$

באותו אופן, אם $y = 0$, נקבל:

$$|x| = |x|$$

מכאן, אם השוויון מתקיים כאשר אחד הנעלמים שווה ל-0, אז מכפלת הנעלמים שווה ל-0.

5. תשובה (1) נכונה. שאלה 7 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – פתרון מתמטי

נתון ש-b שווה ל- $|a| + 3$ נציב זאת באי-השוויון הנתון:

$$6 < |a| + 3$$
$$3 < |a|$$

מכאן שישנם שני מצבים $a > 3$ או $a < -3$. מכיוון שנתון ש-a שלילי אז בהכרח $a < -3$.

דרך ב' – הצבת מספרים

נתון ש-b גדול מ-6. נציב מספר המתאים לטווח, למשל b=7. כעת נמצא את ערכו של a בהתאם למשוואה הנתונה:

$$|a| + 3 = 7$$
$$|a| = 4$$

מצאנו שהערך המוחלט של a שווה ל-4. כיוון שנתון ש-a שלילי, $a = -4$.
בהתאם לתוצאה זו, ניתן לפסול את תשובות (2) ו-(3).

כיוון שעדיין נותרו 2 תשובות, נבצע הצבה נוספת. כדי שנוכל לפסול אחת מהן, נשתדל להציב ערך רחוק מ-7, למשל b=20.

$$|a| + 3 = 20$$
$$|a| = 17$$

כאמור, כיוון שידוע ש-a שלילי, ניתן להסיק כי $a = -17$.
נפסול את תשובה (4).

פסלנו 3 תשובות, ועל כן **תשובה (1) נכונה**.

---

6. תשובה (2) נכונה. שאלה 8 מתוך 20 בפרק.

שאלת הבנה. עלינו לקבוע מה ניתן להסיק מהנתון: $a^n \neq |a|^n$, n הוא מספר שלם.
בשתי התשובות הראשונות נטען כי a שלילי ובשתיים האחרונות נטען ש-a חיובי. לפיכך, תחילה נתמקד בטענה זו. הביטויים $|a|^n$ ו-a^n צריכים להיות שונים זה מזה. מכיוון שהמעריכים שלהם זהים, הבסיסים צריכים להיות שונים. כלומר, a צריך להיות שונה מהערך המוחלט שלו. לפיכך, a הוא שלילי. תשובות (3) ו-(4) נפסלות.

ההבדל בין שתי התשובות שנותרו, תשובה (1) ותשובה (2), הוא התנאי באשר ל-n. לפיכך, נבחן את תכונותיו.

טיפ: כשבתשובות מוצגות מספר תכונות אשר אחת מהן היא זוגיות – מומלץ להתחיל בבדיקתה, כיוון שבדרך כלל זו התשובה הנכונה.

כאמור, הסקנו ש-a שלילי. אילו n היה זוגי, הביטוי שבאגף שמאל היה חיובי, וכך גם הביטוי באגף ימין. כלומר, במקרה זה הביטויים שווים. לפיכך, על n להיות אי-זוגי. תשובה (2) נכונה.

---

7. תשובה (1) נכונה. שאלה 11 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הבנה

נתון: $|x| = |y|$, $x < -1$

אם הערך המוחלט של x שווה לערך המוחלט של y, משמעות הדבר היא ש-x ו-y הם מספרים זהים או מספרים נגדיים, לדוגמה 7 ו-(7-). עם הבנה זו, נבדוק את התשובות:

<u>נבדוק את תשובה (1):</u> $1 < y^2$

נתון: $x < -1$, ולכן אם x ו-y שווים גם $y < -1$. במקרה זה, y^2 יהיה גדול מ-1.

אם x ו-y נגדיים: $y > 1$. גם במקרה זה, y^2 יהיה גדול מ-1.

תשובה נכונה.

טיפ: מכיוון שבדקנו את התשובות, ברגע שמצאנו תשובה נכונה אין צורך להמשיך לבדוק את שאר התשובות, אך למען שלמות ההסבר נפסול אותן:

<u>נבדוק את תשובה (2):</u> $-1 < y$

כאמור, ייתכן ש-y שווה ל-x. במקרה זה, y דווקא קטן מ- 1- ולא גדול ממנו. התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (3):</u> $x + y = 0$

x + y יהיה שווה ל-0 אם הם נגדיים, אולם הם יכולים להיות שווים ובמצב זה סכומם לא יהיה 0. נפסל.

<u>נבדוק את תשובה (4):</u> $\frac{x}{y} = 1$

המנה של x ו-y תהיה שווה 1 אם הם שווים, אולם אם הם נגדיים תוצאת החילוק שלהם תהיה 1-. נפסל.

דרך ב' – הצבת מספרים

נתון: $|x| = |y|$, $x < -1$

נציב: $x = -2$. במקרה זה ישנם שני ערכים אפשריים עבור y: $y = -2$, $y = 2$.

תחילה, נציב בתשובות $x = -2$ ו-$y = -2$, ונפסול כל תשובה שאינה מתקיימת בהצבה זו. נשים לב שמכיוון שהשתמשנו בהצבת מספרים במקום הנעלמים, עלינו לפסול 3 תשובות בטרם נוכל לסמן תשובה נכונה.

(1)	$1 < y^2 \Rightarrow 1 < (-2)^2$ $1 < 4$	$\Rightarrow$	**מתאים**
(2)	$-1 < y \Rightarrow -1 < -2$	$\Rightarrow$	לא מתאים, התשובה נפסלת
(3)	$x + y = 0 \Rightarrow (-2) + (-2) \stackrel{?}{=} 0$ $-4 \neq 0$	$\Rightarrow$	לא מתאים, התשובה נפסלת
(4)	$\frac{x}{y} = 1 \Rightarrow \frac{-2}{-2} \stackrel{?}{=} 1$ $1 = 1$	$\Rightarrow$	**מתאים**

כעת, נציב $x = -2$ ו-$y = 2$ בתשובות שנותרו:

(1)	$1 < y^2 \Rightarrow 1 < (2)^2$ $1 < 4$	$\Rightarrow$	**מתאים**
(4)	$\frac{x}{y} = 1 \Rightarrow \frac{-2}{2} \stackrel{?}{=} 1$ $-1 \neq 1$	$\Rightarrow$	לא מתאים, התשובה נפסלת

פסלנו 3 תשובות ועל כן תשובה (1) נכונה.

8. תשובה (4) נכונה. שאלה 13 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הבנה

עלינו למצוא את ערכו של x. תחילה, נתמקד באי-שוויון הראשון:

$$|x| \neq x$$

אילו x היה חיובי או 0, הוא היה שווה לערך המוחלט שלו. מאחר שלפי האי-שוויון הנתון x לא שווה לערך המוחלט שלו, הרי ש-x שלילי.

כעת נתבונן באי-שוויון השני:

$$|-3x| \neq -3x$$

הגדלים של שני האגפים שווים, אולם ייתכן כי סימניהם שונים. האגף הימני הוא חיובי, שכן קבענו כי x שלילי, ומכפלתם של שני מספרים שליליים היא חיובית. גם האגף השמאלי הוא חיובי, מפני שזהו ערך מוחלט. לפיכך, האגפים **שווים** זה לזה, והאי-שוויון שגוי. כלומר, לא קיים x המקיים את שני האי-שוויונות. תשובה (4) נכונה.

דרך ב' – הצבת התשובות

עלינו למצוא את ערך x על סמך האי-שוויונות הנתונים. נציב את ערכי x שבתשובות, ונחפש ערך המקיים את הנתונים.

נבדוק את תשובה (1): $x = 0$

$$|0| \neq 0$$

האי-שוויון הראשון לא מתקיים ולכן אין צורך לבדוק את השני. התשובה נפסלת.

נבדוק את תשובה (2): $x = \frac{1}{3}$

$$\left|\frac{1}{3}\right| \neq \frac{1}{3}$$

האי-שוויון הראשון לא מתקיים ולכן אין צורך לבדוק את השני. התשובה נפסלת.

נבדוק את תשובה (3): $x = -\frac{1}{3}$

$$\left|-\frac{1}{3}\right| \neq -\frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{3} \neq -\frac{1}{3}$$

האי-שוויון הראשון מתקיים. נבדוק את האי-שוויון השני:

$$\left|-3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)\right| \neq -3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$|1| \neq 1$$

האי-שוויון השני לא מתקיים. התשובה נפסלת.

פסלנו 3 תשובות ולכן תשובה (4) נכונה.

9. תשובה (1) נכונה. שאלה 13 מתוך 20 בפרק.

כידוע, ערך מוחלט מתנהג באופן דומה מאוד לחזקה זוגית. לפיכך, מה שנכון עבור חזקה זוגית, נכון גם עבור ערך מוחלט.

מכאן, שבשאלה הנ״ל, אם כאשר הביטוי (a – b) קטן מ-1 כאשר הוא עולה בחזקה זוגית, אזי הוא יהיה גם קטן מ-1 בערך מוחלט.
מצורף ההסבר המתמטי לתכונה זו בהקשר לשאלה הנתונה:

כל מספר בריבוע הוא חיובי או שווה ל-0. לפיכך: $0 \leq (a-b)^2 < 1$.
כלומר, הביטוי $(a-b)^2$ צריך להיות שבר חיובי או שווה ל-0.

אם הביטוי $(a-b)^2$ שווה ל-0, הרי ש- (a – b) שווה ל-0, וערכו המוחלט שווה ל-0. ניתן לפסול את תשובה (2), שכן הטענה המוצגת בה אינה בהכרח נכונה.

אם הביטוי $(a-b)^2$ הוא שבר חיובי, הרי ש- (a – b) גם הוא שבר. זאת מפני ששורש של שבר הוא תמיד שבר (כל שבר בריבוע הוא שבר). נשים לב כי הביטוי (a – b) יכול להיות חיובי או שלילי, שכן העלאתו בריבוע תהפוך אותו לחיובי כך או כך. משמע, (a – b) הוא <u>שבר חיובי או שלילי</u>. לכן, הערך המוחלט של הביטוי יהיה קטן מ-1 וגדול מ-0. נסכם:

$$0 \leq |a-b| < 1$$

לכן, תשובה (1) נכונה.

---

10. תשובה (3) נכונה. שאלה 15 מתוך 20 בפרק.

דרך א׳ – הצבת התשובות
עלינו למצוא את ערך x באמצעות שתי המשוואות הנתונות. נציב את ערכי x המוצגים בתשובות, ונחפש תשובה מתאימה.

טיפ: בהצבת תשובות, כדאי להתחיל בתשובות הנוחות יותר.

<u>נבדוק את תשובה (1):</u> $x = 1$
נציב במשוואה הראשונה:

$$|2 \cdot 1 + 3| \stackrel{?}{=} -2 \cdot 1 - 3$$

ניתן לפסול את התשובה כבר כעת, שכן האגף הימני שלילי, ולכן לא ייתכן שהוא שווה לערך מוחלט של מספר כלשהו. המשוואה הראשונה לא מתקיימת ולכן אין צורך לבדוק את השנייה. התשובה נפסלת. בנוסף ניתן להבין שכל מספר חיובי לא יתאים ולכן גם תשובה (4) נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (2):</u> $x = -1$
נציב במשוואה הראשונה:

$$|2 \cdot (-1) + 3| \stackrel{?}{=} -2 \cdot (-1) - 3$$

$$|-2 + 3| \stackrel{?}{=} 2 - 3$$

$$|1| \neq -1$$

המשוואה הראשונה לא מתקיימת ולכן אין צורך לבדוק את השנייה. התשובה נפסלת.

טיפ: כיוון שפסלנו 3 תשובות, ניתן לסמן את התשובה האחרונה מבלי לבדוק אותה. למען שלמות ההסבר, נבדוק את נכונותה:

<u>נבדוק את תשובה (3)</u>: $x = -4$

נציב במשוואה הראשונה:

$$|2 \cdot (-4) + 3| \stackrel{?}{=} -2 \cdot (-4) - 3$$

$$|-8 + 3| \stackrel{?}{=} 8 - 3$$

$$|-5| = 5$$

נציב במשוואה השנייה:

$$|4 \cdot (-4) + 6| \stackrel{?}{=} 10$$

$$|-16 + 6| \stackrel{?}{=} 10$$

$$|-10| = 10$$

שתי המשוואות מתקיימות, **תשובה נכונה.**

דרך ב' – הבנה / פתרון מתמטי

עלינו למצוא את ערכו של x. תחילה, נתמקד במשוואה הראשונה.

$$|2x + 3| = -2x - 3$$

כידוע, ערך מוחלט תמיד גדול או שווה ל-0. לפיכך, האגף הימני של המשוואה צריך להיות חיובי או שווה ל-0. ננסה ללמוד על ערכו של x מהבנה זו. אילו x היה חיובי, הביטוי שבאגף ימין בהכרח היה שלילי (שכן במקרה זה, $-2x$ היה שלילי, וכך גם $-2x - 3$). לפיכך, ניתן לפסול את תשובות (1) ו-(4).

כעת, כדי לבחור אחת משתי התשובות הנותרות מומלץ להציב אותן במשוואה הראשונה (כפי שעשינו בדרך א'), ולקבוע איזה ערך מביא לכך שהמשוואה מתקיימת. לחלופין, ניתן לפשט את המשוואה השנייה. כידוע, כאשר נתונה משוואה עם ערך מוחלט, המשמעות היא שהאגפים שווים או נגדיים.

נניח שהם שווים:

$$|4x + 6| = 10 \quad \Rightarrow \quad 4x + 6 = 10$$

נסדר אגפים:

$$4x = 4$$

נחלק ב-4:

$$x = 1$$

כאמור, לא ייתכן ש-x חיובי. נמשיך בפישוט.
כעת נניח שהביטויים נגדיים:

$$|4x + 6| = 10 \quad \Rightarrow \quad 4x + 6 = -10$$

נסדר אגפים:

$$4x = -16$$

נחלק ב-4:

$$x = -4$$

תשובה (3) נכונה.

11. תשובה (1) נכונה. שאלה 15 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הבנה
בשאלות מסוג זה עלינו להתייחס לכל נתון ולהסיק מסקנות:
$A \cdot B < 0$ מצב זה יתאפשר רק כאשר אחד מהמספרים שלילי והאחר חיובי.
$\frac{A}{B} < \frac{B}{A}$ נכפול ב-AB כדי לבטל את המכנה אך נזכור שהמכפלה שלילית (לפי הנתון הראשון) ולכן עלינו להפוך את סימן אי-השוויון.

$A^2 > B^2$

כפי שלמדנו חזקה זוגית ≈ לערך מוחלט ואם $A^2 > B^2$ אז $|B| < |A|$

תשובה (1) נכונה.

דרך ב' – הצבה בתשובות
נבחר מספרים שמקיימים את הנתונים במטרה לפסול 3 תשובות. לדוגמה $A = 3, B = -1$.
אכן מתקיים:

$$\frac{3}{-1} < \frac{-1}{3}$$
$$-3 < -\frac{1}{3}$$

נבדוק תשובות:

(1) $|3| < |-1|$ ⇐ $1 < 3$ פסוק אמת, לא ניתן לפסול בשלב זה את התשובה.
(2) $-1 < 0 < 3$ פסוק אמת, לא ניתן לפסול בשלב זה את התשובה.
(3) $0 < -1 + 3$ ⇐ $0 < 2$ פסוק אמת, לא ניתן לפסול בשלב זה את התשובה.
(4) $3 + (-1) < 0$ ⇐ $2 < 0$ פסוק שקר, תשובה נפסלת.

הצלחנו לפסול תשובה אחת בלבד. נשנה הצבה: $A = -3, B = 1$. אכן מתקיים:

$$\frac{-3}{1} < \frac{1}{-3}$$
$$-3 < -\frac{1}{3}$$

(1) $|-3| < |1|$ ⇐ $1 < 3$ פסוק אמת, לא ניתן לפסול בשלב זה את התשובה.
(2) $1 < 0 < -3$ ⇐ פסוק שקר, תשובה נפסלת.
(3) $0 < 1 + (-3)$ ⇐ פסוק שקר, תשובה נפסלת.

התשובה היחידה שלא נפסלה היא תשובה (1), וניתן לסמנה.

12. תשובה (2) נכונה. שאלה 17 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – פתרון מתמטי
לפנינו משוואה עם ערך מוחלט. משמעותה היא שהביטוי שבתוך הערך המוחלט שווה או נגדי לביטוי באגף ימין.

תחילה, נניח שהביטויים שווים:

$$|x + y| = x - y \quad \Rightarrow \quad x + y = x - y$$

נסדר אגפים:

$$x - x + y + y = 0$$

$$2y = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0$$

כעת, נניח שהם נגדיים:

$$|x + y| = x - y \quad \Rightarrow \quad x + y = -(x - y)$$

$$x + y = -x + y$$

נסדר אגפים:

$$x + x + y - y = 0$$

$$2x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

כלומר, $x = 0$ או $y = 0$. תשובה (2) נכונה.

טיפ: האובייקט הנ"ל יחסית נפוץ בבחינה וכדאי לזכור ולהכיר אותו. כאשר נתון כי $|x - y| = |x + y|$ משמע שלפחות אחד הנעלמים שווה ל-0.

דרך ב' – פתרון מתמטי נוסף
הפעולה אותה מבצע ערך מוחלט היא הפיכת האיבר שבתוכו לחיובי (או להשאירו 0).
כדי לחקות פעולה זו, ולבטל את הערך המוחלט, ניתן להעלות את אגפי המשוואה בחזקת 2. זאת משום שחזקה זוגית גם כן הופכת את המספר שבתוכה לחיובי (או משאירה אותו 0). באופן זה החזקה מבצעת את פעולת הערך המוחלט וניתן לפתור את המשוואה כרגיל.

$$|x + y| = x - y \quad \Rightarrow \quad (x + y)^2 = (x - y)^2$$

נפתח את הסוגריים לפי נוסחאות הכפל המקוצר:

$$x^2 + y^2 + 2xy = x^2 + y^2 - 2xy$$

נעביר אגפים:

$$4xy = 0$$

נחלק ב-4:

$$xy = 0$$

אם מכפלה של שני איברים שווה 0, אזי אחד האיברים שווה ל-0. דהיינו $x = 0$, או $y = 0$.

.13 תשובה (1) נכונה. שאלה 18 מתוך 20 בפרק.

של מנת שהביטוי בערך המוחלט יהיה קטן מ-3, הערך שלו חייב להיות בין 3 ל-(-3), לפי שיטת המראה (באופן זה, המרחק מאפס, אותו מציין הערך המוחלט, יהיה קטן מ-3 יחידות:

$$-3 < x + 8 < 3$$

כעת, משום שהנעלם קיים רק באגף האמצעי, ניתן לבודד אותו על ידי עשיית פעולות מתמטיות על שלושת האגפים. במקרה הזה, לדוגמה, על מנת להישאר רק עם x, נחסר 8 משלושת האגפים:

$$-11 < x < -5$$

נתון כי x הוא מספר שלם, ועל כן המספרים המקיימים את אי-השוויון הם:

(-6), (-7), (-8), (-9), (-10) $\Leftarrow$ ישנם 5 ערכים המקיימים את הנתונים, ועל כן **תשובה (1) נכונה.**

טיפ: ניתן לקצר את תהליך הפתרון בעזרת ההבנה שלמעשה אין באמת צורך למצוא את הערכים המדויקים של x, אלא למצוא רק את מספר הערכים המקיימים את אי-השוויון. ניתן לזהות באי-השוויון ההתחלתי שלערך של הביטוי באגף האמצעי $(x + 8)$ קיימים 5 פתרונות אפשריים: 2 ,1 ,0 ,(-1), (-2), ועל כן גם ל-x ישנם 5 פתרונות – לכל אחד מהפתרונות הרצויים ישנו x אחר שיאפשר להגיע אליו.

.14 תשובה (3) נכונה. שאלה 18 מתוך 20 בפרק.

אנו מכירים את האובייקט: $|a + b| \leq |a| + |b|$. במצב המתואר, סכומם של שני האיברים הנמצאים בערך מוחלט קטן או שווה לסכומם של כל אחד משני האיברים בערך מוחלט בנפרד. הסכום שלהם יהיה קטן אם ורק אם הנעלמים הם שוני סימן. בכל מצב אחר יתקיים שוויון בין שני האגפים – כאשר הנעלמים הם שווי סימן (שניהם חיוביים או שניהם שליליים), או כאשר לפחות אחד מהם הוא 0.
בשאלה זו אנו מתבקשים לקבוע מתי לא בהכרח מתקיים שוויון בין האגפים. כאמור, המצב היחידי שבו השוויון אינו מתקיים הוא כאשר האיברים הם שוני סימן. לפיכך, תשובה (3), שבה נאמר כי המספרים הם שלמים, מאפשרת מצב שבו הם שוני סימן.

ניתן לראות זאת גם בדוגמה מספרית: נציב $a = 1$ ו-$b = -1$, ונקבל:

$$|1| + |-1| \stackrel{?}{=} |1 + (-1)|$$
$$1 + 1 \stackrel{?}{=} |1 - 1|$$
$$2 \neq 0$$

---

15. תשובה (1) נכונה. שאלה 20 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הבנה
נסתכל על האי-שוויון ונחפש בו רמזים:

$$a < b < |a \cdot b \cdot c| < c$$

תחילה, ניתן לדעת שהגורם $|a \cdot b \cdot c|$ אינו מספר שלילי, שהרי כל מספר בערך מוחלט לעולם יהיה חיובי או 0.
כעת, לפי הנתון: $|a \cdot b \cdot c| < c$, אנו יכולים להסיק ש-c הוא חיובי בהכרח, שהרי הוא גדול יותר ממספר בערך מוחלט (גם אם $|a \cdot b \cdot c| = 0$, האופציה הקטנה ביותר שאפשרית, עדיין c, שגדול ממנו, יהיה מספר חיובי – גדול מ-0).

לאחר שהבנו זאת, עלינו לשים לב לדבר נוסף: לקחנו את c, כפלנו אותו בגורם $a \cdot b$, ו<u>הערך המוחלט</u> שלו קטן.
ננסה להבין מתי הדבר קורה. ראשית, אין זה משנה אם הביטוי $a \cdot b$ הוא חיובי או שלילי, שכן הוא נמצא בערך מוחלט, ובכל מקרה יהפוך לחיובי. בכך ניתן לפסול את תשובה (4).
מתי, אם כן, הערך המוחלט של מספר יקטן? מצב זה מתרחש כאשר כופלים את המספר ב-0 או בשבר הקטן מ-1 (וכאמור, אין זה משנה אם השבר חיובי או שלילי) – כלומר במספרים שערכם המוחלט קטן מ-1.

נציב, לדוגמה, $c = 6$ ונראה מה קורה לערכו המוחלט כאשר אנו כופלים אותו בגורמים שונים:

$$|0 \cdot 6| < 6 \quad \Rightarrow \quad |0| < 6 \quad \Rightarrow \quad 0 < 6$$
$$\left|\tfrac{1}{2} \cdot 6\right| < 6 \quad \Rightarrow \quad |3| < 6 \quad \Rightarrow \quad 3 < 6$$
$$\left|\left(-\tfrac{1}{2}\right) \cdot 6\right| < 6 \quad \Rightarrow \quad |-3| < 6 \quad \Rightarrow \quad 3 < 6$$

בהצבות שעשינו עד כה במקום הגורם $a \cdot b$, ראינו כי ערכו של המספר אכן קטן כאשר מכפילים אותו בשבר או ב-0. לעומת זאת, כאשר נכפול את הגורם החיובי c במספרים שערכם המוחלט גדול מ-1, הדבר יגדיל את ערכו המוחלט ולא יקטינו, לדוגמה:

$$|(-2) \cdot 6| < 6 \quad \Rightarrow \quad |-12| < 6 \Rightarrow \quad 12 \nless 6$$
$$|2 \cdot 6| < 6 \quad \Rightarrow \quad |12| < 6 \quad \Rightarrow \quad 12 \nless 6$$

הבנו כי הערך המוחלט של $a \cdot b$ חייב להיות קטן מ-1. תשובה (1) נכונה.

דרך ב' – אלגברה
נבחן חלק ספציפי באי-שוויון:

$$|a \cdot b \cdot c| < c$$

תחילה, ניתן לדעת שהגורם $|a \cdot b \cdot c|$ אינו מספר שלילי, שהרי כל מספר בערך מוחלט לעולם יהיה חיובי או 0.
כעת, לפי הנתון: $|a \cdot b \cdot c| < c$, אנו יכולים להסיק ש-c הוא חיובי בהכרח, שהרי הוא גדול יותר ממספר בערך מוחלט. לכן, אנו יכולים לקבוע שלערך המוחלט אין השפעה על הגורם c, ושאין זה משנה אם הוא יהיה בתוך או מחוץ לערך המוחלט. משום שישנה פעולת כפל בין האיברים, ניתן לכתוב זאת כך:

$$|a \cdot b| \cdot c < c$$

כמו כן, כיוון שאנחנו יודעים ש-c הוא חיובי, מותר לנו לחלק בו את שני האגפים מבלי להפוך סימן. נחלק ב-c ונקבל:

$$|a \cdot b| < 1$$

מספרים ראשוניים

מספר ראשוני - מספר טבעי (חיובי ושלם) הגדול מ-1, שלא ניתן להציג אותו כמכפלה של שני מספרים טבעיים הקטנים ממנו, או איך שלימדו אתכם בביה"ס - מספר שמתחלק רק בעצמו וב-1. מספר ראשוני הוא בעצם מספר שלא מתחלק בכלום. לדוגמה:

2, 3, 5, 7, 11, 13...

1 אינו מספר ראשוני - אין לו שני מחלקים, לא ניתן "לפרק" אותו.

2 הוא מספר ראשוני (הזוגי היחיד) - ניתן להציג אותו כ- $(2 \cdot 1)$.

היכרות עם מספרים ראשוניים

חלק גדול מהשאלות בנושא מספרים ראשוניים בבחינה נפתרות פשוט על ידי הכרת המספרים הראשוניים - בלי כל חישוב.

דוגמה:

x ו-y הם מספרים שלמים **שאינם** ראשוניים, כך ש- $x < 15 < y$.

בין x למספר 15 יש **שני** מספרים ראשוניים (לא כולל x). בין המספר 15 ל-y יש **שני** מספרים ראשוניים (לא כולל y).

מה הערך **הקטן** ביותר האפשרי של המכפלה $x \cdot y$?

(1) 100 (2) 120 (3) 150 (4) 160

פתרון -

נבדוק מהם המספרים הראשוניים הגדולים וקטנים מ-15:

$6, \boxed{7}, 8, 9, 10, \boxed{11}, 12, \boxed{13}, 14, \underline{\mathbf{15}}, 16, \boxed{17}, 18, \boxed{19}, 20, 21\ldots$

כדי שהמכפלה תהיה הקטנה ביותר, עלינו לקחת את המספרים הקטנים ביותר שניתן. ה-x הקטן ביותר האפשרי הוא 8. מספר נמוך יותר יכלול בטווח גם את 7, ונקבל 3 מספרים ראשוניים (או יותר).

ה-y הקטן ביותר האפשרי הוא 20. המכפלה: $8 \cdot 20 = 160$

חשוב להכיר <u>בעל-פה</u> את כל המספרים הראשוניים עד 40:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37.

המספר הראשוני הדו-ספרתי הגדול ביותר: 97

הצבת מספרים

גם בנושא זה ניתן לפתור שאלות רבות פשוט על ידי הצבה.

דוגמה:

ידוע כי x הוא מספר ראשוני, וכי x^3 הוא מספר דו-ספרתי.

מה המקסימום של 5x?

(1) 15 (2) 20 (3) 25 (4) 35

פתרון -

המספר הראשוני הגדול ביותר שעומד בתנאים הוא 3, ולכן התשובה הנכונה היא תשובה (1). (המספר "הבא בתור" הוא 5, אולם 5^3 אינו דו-ספרתי ולכן אינו עומד בתנאי השאלה).

גורמים / מחלקים

גורם/מחלק - גורם (או מחלק) של מספר כלשהו הוא מספר אשר ניתן לחלק בו את המספר המקורי ללא שארית, לדוגמה:

20 מתחלק ב-4, ולכן 4 הוא גורם/מחלק של 20.

30 מתחלק ב-6, ולכן 6 הוא גורם/מחלק של 30.
המחלקים של מספר בעצם "נמצאים" בתוכו, הם מרכיבים אותו.

גורם ראשוני - מחלק שהוא מספר ראשוני.
כל מספר מתחלק בכל הגורמים הראשוניים שלו, ובכל הצירופים השונים של הגורמים הראשוניים שלו.
לדוגמה: $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$, ולכן, 12 מתחלק בהכרח ב- 2, 3, 4 (מכפלה של $2 \cdot 2$), ב-6 (מכפלה של $2 \cdot 3$) וכמובן ב-12 (מכפלה של $2 \cdot 2 \cdot 3$).

המספרים הראשוניים הם בעצם "אבני הבניין" של המספרים. בעזרת המספרים הראשוניים אנחנו "בונים" מספרים אחרים שאינם ראשוניים.
באמצעות המספר 1 לא ניתן להרכיב מספרים אחרים, וזו הסיבה שהוא אינו מספר ראשוני - הוא לא "אבן בניין" של מספרים.
כל מספר שאינו ראשוני מורכב ממכפלה של גורמים ראשוניים, לדוגמה:

$$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$$

דוגמה:
נתון: $x = 2 \cdot 5^3 \cdot 6^2$

איזה מהמספרים הבאים **אינו** מחלק של x ?

(1) 10 (2) 15 (3) 30 (4) 35

פתרון -
על מנת למצוא מי **אינו** מחלק של x, נבדוק לאיזה מהמספרים בתשובות יש גורם ראשוני שלא נמצא ב-x:

$10 \Leftarrow 2 \cdot 5$ - שניהם נמצאים ב-x.

$15 \Leftarrow 5 \cdot 3$ - שניהם נמצאים ב-x.

$30 \Leftarrow 5 \cdot 3 \cdot 2$ - שלושתם נמצאים ב-x (ה-3 "נמצא" בתוך 6).

$35 \Leftarrow 7 \cdot 5$ - 7 לא נמצא ב-x ולכן זו התשובה הנכונה.

המחלק הגדול ביותר

דוגמה:
a, b, c ו-d הם מספרים ראשוניים השונים זה מזה.
נתון: $x = a^2 \cdot b \cdot c^3 \cdot d$

$$y = a \cdot c^2 \cdot d^3$$

מה המחלק המשותף הגדול ביותר של x ו-y?

(1) $a \cdot c \cdot d$ (2) $a \cdot c^2 \cdot d$

(3) $a^2 \cdot b \cdot c^3 \cdot d^3$ (4) $a \cdot b \cdot c \cdot d$

פתרון -
המחלק המשותף הגדול ביותר של x ו-y מורכב מהגורמים הראשוניים שנמצאים גם ב-x וגם ב-y: $a \cdot c^2 \cdot d$.
בפועל, הפעולה שבצענו היא בעצם הוצאת גורם משותף משני המספרים. המילה "מחלק" היא פשוט מילה נרדפת למילה "גורם", ולכן "מחלק משותף" זה פשוט "גורם משותף".

<u>המחלק המשותף</u> הגדול ביותר של <u>שני מספרים</u> מורכב מכל הגורמים הראשוניים שנמצאים בשני המספרים (כמו הוצאת גורם משותף)

דוגמה:

נתון מספר שמתחלק ללא שארית גם ב-9 וגם ב-12.
מה המחלק הוודאי הגדול ביותר של המספר?

(1) 36 (2) 12 (3) 54 (4) 108

פתרון -

המחלק הודאי הגדול ביותר הוא המספר הגדול ביותר שניתן לחלק בו את המספר המקורי ללא שארית. מחלק של מספר חייב להיות מורכב מהגורמים הראשוניים של המספר. המחלק הוודאי הגדול ביותר מורכב בעצם מהמספר הגדול ביותר של גורמים ראשוניים שאנו יודעים בוודאות שקיימים במספר.

המספר הנתון מתחלק גם ב-9 וגם ב-12, ולכן הוא חייב לכלול את הגורמים הראשוניים שנמצאים בכל אחד מהמספרים.

נפרק את 9 ואת 12 לגורמים הראשוניים שלהם:

$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$ $9 = 3 \cdot 3$

המספר חייב לכלול בתוכו את הגורמים הראשוניים שמצאנו.

שימו לב! אמנם הגורם 3 מופיע גם ב-9 וגם ב-12, אולם הוא אינו חייב להופיע פעמיים במספר עצמו. ייתכן שהוא מופיע במספר פעם אחת בלבד והוא משותף ל-9 ול-12, ולכן יש "לספור" אותו פעם אחת בלבד:

מספר

↙ ↘

9 **12**

↙ ↘ ↙ ↓ ↘

3 **3** **2** **2**

המספר הגדול ביותר שמחלק בוודאות גם את 9 וגם את 12 צריך להיות כזה שמכיל בתוכו את כל הגורמים הראשוניים **השונים** שנמצאים בשני המספרים: $3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 36$

<u>המחלק הוודאי</u> הגדול ביותר של <u>מספר מסוים</u>

מורכב מכל הגורמים הראשוניים השונים שידוע לנו שנמצאים בו

פירוק והרכבת מספרים

בשאלות אלו יהיה עלינו לפרק מספרים לגורמים הראשוניים שלהם או להרכיב מספרים חדשים מגורמים ראשוניים.

דוגמה:

x הוא מספר בן 4 ספרות (לאו דווקא שונות) מתוך הספרות 1-4. מה מהבאים **אינה** יכולה להיות מכפלת הספרות של x?

(1) 6 (2) 36 (3) 81 (4) 40

פתרון -

נפרק את המספרים שבתשובות ונבדוק למי מהם יש גורם ראשוני שאינו מתוך הספרות 1-4:

$6 \Leftarrow 3 \cdot 2$ - המספר יכול להיות מורכב מהספרות 1,1,2,3.

$36 \Leftarrow 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2$ - המספר יכול להיות מורכב מגורמים אלה.

$81 \Leftarrow 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ - המספר יכול להיות מורכב מגורמים אלה.

$40 \Leftarrow 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ - הגורם 5 לא נמצא במספר ולכן לא אפשרי.

דוגמה:

x ו-y הם מספרים חיוביים שלמים.

נתון: $x \cdot y = 24 \qquad (x, y \neq 1)$

$A = |x - y|$

מה ההפרש בין הערך המקסימלי של A לערך המינימלי של A?

(1) 5 (2) 2 (3) 8 (4) 4

פתרון -

נבדוק מהם הערכים האפשריים עבור x ו-y:

x		y				
2	$\cdot$	12	=	24	$\Rightarrow$	A = 10
3	$\cdot$	8	=	24	$\Rightarrow$	A = 5
4	$\cdot$	6	=	24	$\Rightarrow$	A = 2

ההפרש בין הערך המקסימלי של A לערך המינימלי של A הוא 8.

דוגמה:

מה סכום כל המספרים שניתן להגיע אליהם על ידי מכפלה של שניים או יותר מהמספרים הבאים: 2, 3 ו-5?

(1) 10 (2) 45 (3) 30 (4) 61

פתרון -

ניצור את כל המספרים שניתן על ידי מכפלות של המספרים הנתונים:

$$2 \cdot 3 = 6 \quad , \quad 2 \cdot 5 = 10 \quad , \quad 3 \cdot 5 = 15 \quad , \quad 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$$

נחבר את המספרים שקיבלנו: $6 + 10 + 15 + 30 = 61$

דוגמה:

ידוע כי x^2 הוא מספר ראשוני. לפיכך, x הוא מספר -

(1) אי-זוגי (2) זוגי (3) ראשוני (4) לא שלם

פתרון -

מכיוון ש- x^2 הוא מספר ראשוני, הוא אינו מורכב מאף מספר אחר, ולכן גם אינו מתחלק באף מספר, פרט לעצמו ול-1. לכן, x (שהוא בעצם השורש של x^2), לא יכול להיות מספר שלם. תשובה (4) נכונה.

ראשוני בריבוע

בבחינה ישנן מידי פעם שאלות שמתבססות על ההבנה של ראשוני בריבוע. בעקרון, ניתן לחלק את רוב המספרים בצורה סימטרית. למשל:

$10 = 1 \cdot 10$ ***או*** $10 \cdot 1$

$10 = 2 \cdot 5$ ***או*** $5 \cdot 2$

$10 \Rightarrow 1, 2, 5, 10$

$12 = 1 \cdot 12$ ***או*** $12 \cdot 1$

$12 = 2 \cdot 6$ ***או*** $6 \cdot 2$

$12 = 3 \cdot 4$ ***או*** $4 \cdot 3$

$12 \Rightarrow 1, 2, 3, 4, 6, 12$

כאשר מעלים מספר **ראשוני** בריבוע, המספר שמתקבל אינו מתחלק בצורה "סימטרית", היות שהוא מתחלק רק בעצמו, ב-1 ובמספר הראשוני שהעלינו בריבוע - שהוא השורש שלו. למשל:

$9 = 1 \cdot 9$ ***או*** $9 \cdot 1$

$9 = 3 \cdot 3$

$9 \Rightarrow 1, 3, 9$

$25 = 1 \cdot 25$ ***או*** $25 \cdot 1$

$25 = 5 \cdot 5$

$25 \Rightarrow 1, 5, 25$

הבנה זו של ראשוני בריבוע יכולה לעזור לכם בבחינה בשאלות העוסקות בניואנס זה. במקום לחשוב ולהתחיל להציב, תוכלו לפתור שאלות אלה בשניות ספורות.

דוגמה:

x הוא מספר שלם וחיובי שיש לו בדיוק 3 מחלקים שונים (כולל 1 וכולל עצמו).

נתון: $A = \sqrt{x}$

כמה מחלקים שונים יש ל-A (כולל 1 וכולל עצמו)?

(1) 1 (2) 2 (3) x (4) 0

פתרון -

מכיוון של-x יש בדיוק 3 מחלקים הרי שהוא חייב להיות ריבוע של מספר ראשוני. A הוא השורש של x ולכן A הוא מספר ראשוני. מספר ראשוני מתחלק רק בעצמו וב-1, ולכן תשובה (2) נכונה.

כאשר פותרים שאלות בהצבת מספרים, חשוב לשים לב למספר 2, שהוא המספר הראשוני הזוגי היחיד

תרגול שאלות מבחינות אמת

1. לאיזה מן המספרים הבאים מספר המחלקים השונים הגדול ביותר?

(1) 17
(2) 42
(3) 57
(4) 95

---

2. a ו-b הם מספרים ראשוניים הקטנים מ-10, $b < a$.
$a - b$ שווה לכל היותר ל-

(1) 5
(2) 2
(3) 3
(4) 4

---

3. במחשבון התקלקלו כל המקשים חוץ מהמקש של פעולת הכפל,
מקשי הספרות 3 ו-5, ומקש השוויון.

איזה מן המספרים הבאים **אי-אפשר** לקבל בעקבות סדרת פעולות במחשבון זה?

(1) 25
(2) 27
(3) 50
(4) 75

---

4. מה הסכום של המספר הדו-ספרתי הראשוני הקטן ביותר והמספר הדו-ספרתי הראשוני הגדול ביותר?

(1) 110
(2) 108
(3) 107
(4) 104

פתרתי __________ שאלות ב __________ דקות, __________ תשובות נכונות

5. בין המספר 24 למספר x יש בדיוק שני מספרים ראשוניים.

איזה מהמספרים הבאים **אינו** יכול להיות x?

(1) 32
(2) 34
(3) 36
(4) 38

---

6. נתון: $x = a \cdot b^2 \cdot c^3$

a, b ו-c הם מספרים שלמים, חיוביים **ושונים** זה מזה.

איזה מן המספרים הבאים **אינו** יכול להיות x?

(1) 18
(2) 35
(3) 72
(4) 108

---

7. a הוא מספר ראשוני חד-ספרתי.
b הוא מספר ראשוני דו-ספרתי קטן מ-50.
נתון: $x = a \cdot b$

מה הטווח המדויק של x?

(1) $147 \le x \le 441$
(2) $22 \le x \le 147$
(3) $22 \le x \le 329$
(4) $147 \le x \le 329$

---

8. a, b ו-c הם מספרים ראשוניים השונים זה מזה.
נתון: $M = a^3 \cdot b^2 \cdot c$
$N = a \cdot b^2 \cdot c^3$

מה המחלק המשותף הגדול ביותר של M ו-N?

(1) $a \cdot b \cdot c$
(2) $a \cdot b^2 \cdot c$
(3) $a^3 \cdot b^2 \cdot c^3$
(4) $a^4 \cdot b^4 \cdot c^4$

פתרתי ______________ שאלות ב ______________ דקות, ______________ תשובות נכונות

9. נתון: $x = 2^3 \cdot 3^3$

איזה מהמספרים הבאים מחלק את x ללא שארית?

(1) 16
(2) 25
(3) 48
(4) 54

---

10. p ו-q הם שני מספרים **ראשוניים** שונים זה מזה.

איזה מן המספרים הבאים **אינו** יכול להיות ההפרש בין p ל-q?

(1) 10
(2) 9
(3) 8
(4) 7

---

11. מספר מוגדר "מעניין" אם סכום כל המספרים הראשוניים מ-2 (כולל) ועד לאותו מספר (כולל) הוא **ראשוני**.

איזה מהמספרים הבאים הוא מספר מעניין?

(1) 11
(2) 6
(3) 3
(4) 5

---

12. a ו-b הם מספרים שלמים.
נתון: $a \cdot b = 50$

$a - b$ **לא** יכול להיות שווה ל-

(1) 5
(2) 15
(3) 23
(4) 49

פתרתי ______________ שאלות ב ______________ דקות, ______________ תשובות נכונות

13. A ו-B הם מספרים ראשוניים, $1 < A < B$.

$A + B$ גם הוא מספר ראשוני.

מה מהבאים מתקיים **בהכרח**?

(1) $A + B = 17$

(2) $A = 2$

(3) $A + 9 < B$

(4) לא קיימים מספרים ראשוניים כאלה

---

14. נתון: $1 < x$

x^2 הוא מספר ראשוני.

x הוא בהכרח -

(1) אי-זוגי

(2) זוגי

(3) לא שלם

(4) קטן מ-10

---

15. a הוא מספר שלם וחיובי.

מספר המחלקים החיוביים השונים של a (כולל 1 ו-a) הוא אי-זוגי.

איזו מן הטענות הבאות נכונה בהכרח?

(1) a הוא מספר ראשוני

(2) a הוא מספר אי-זוגי

(3) $\sqrt{a}$ הוא מספר שלם

(4) $\sqrt{a}$ הוא מספר אי-זוגי

---

16. אודי כתב 5 משפטים. במשפט הראשון 13 מילים, ובכל משפט שלאחר מכן, מספר המילים הוא המספר הראשוני המינימלי הגדול ממספר המילים שבמשפט הקודם.

כמה מילים כתב אודי במשפט האחרון?

(1) 23

(2) 27

(3) 29

(4) 31

---

17. נתון: n הוא מספר שלם חיובי.

$\frac{n}{12}$ הוא שבר מצומצם שערכו קטן מ-1.

כמה ערכי n שונים מקיימים את הנתונים?

(1) 1
(2) 2
(3) 5
(4) 4

---

18. x הוא מספר חיובי. ל-x בדיוק שלושה מחלקים שונים (כולל 1 ו-x עצמו).

$\sqrt{x}$ הוא בהכרח מספר -

(1) ראשוני (2) זוגי (3) שמתחלק ב-3 (4) שאינו שלם

---

19. n הוא מספר שלם וחיובי. ל-n^2 יש מחַלק גדול מ-n ושונה מ-n^2 עצמו.

מה הערך **הקטן** ביותר האפשרי של n?

(1) 5
(2) 2
(3) 3
(4) 4

---

20. בועז: "כל מספר המתחלק ב-6 וב-10 ללא שארית מתחלק גם ב-60".
בתיה: "כל מספר המתחלק ב-6 וב-10 ללא שארית מתחלק גם ב-30".

איזו מהטענות הבאות נכונה?

(1) רק בועז צודק
(2) רק בתיה צודקת
(3) גם בועז וגם בתיה צודקים
(4) גם בועז וגם בתיה טועים

תשובות

שאלה	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
תשובה	2	1	3	2	4	2	3	2	4	4

שאלה	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
תשובה	3	2	2	3	3	3	4	1	4	2

פתרתי 20 שאלות - ______________ נכונות, ______________ אחוזי הצלחה

1. תשובה (2) נכונה. שאלה 1 מתוך 20 בפרק.

עלינו להבין שלמספר המורכב ממספר הגורמים הראשוניים הגדול ביותר יהיה את מספר המחלקים השונים הגדול ביותר. נפרק את המספרים ונמצא את הגורמים הראשוניים של כל אחד מהם:

<u>נבדוק את תשובה (1)</u>: 17
17 הוא מספר ראשוני.

<u>נבדוק את תשובה (2)</u>: 42
42 מורכב מ-3 גורמים ראשוניים $\Leftarrow 2 \cdot 3 \cdot 7$

<u>נבדוק את תשובה (3)</u>: 57
57 מורכב מ-2 גורמים ראשוניים $\Leftarrow 3 \cdot 19$

<u>נבדוק את תשובה (4)</u>: 95
95 מורכב מ-2 גורמים ראשוניים $\Leftarrow 5 \cdot 19$

מצאנו של-42 יש את מספר המחלקים השונים הרב ביותר, ולכן תשובה (2) נכונה.

---

2. תשובה (1) נכונה. שאלה 4 מתוך 20 בפרק.

a ו-b הם מספרים ראשוניים הקטנים מ-10, $b < a$.
אנו מתבקשים למצוא את ההפרש המקסימלי בין a ל-b ‏($a - b$).

ההפרש המקסימלי בין a ל-b יתקבל כאשר a יהיה מקסימלי ו-b מינימלי.

נתון ש-a ו-b הם מספרים ראשוניים הקטנים מ-10. המספר הראשוני הגדול ביותר שקטן מ-10 הוא 7. המספר הראשוני הקטן ביותר הוא 2. על כן, ההפרש הגדול ביותר האפשרי של $a - b$ הוא 5 ‏($7 - 2$).

.3 תשובה (3) נכונה. שאלה 10 מתוך 20 בפרק.

במחשבון התקלקלו כל המקשים, למעט מקשי הכפל, השוויון ומקשי הספרות 3 ו-5. עלינו למצוא לאיזו תשובה **לא ניתן להגיע** מבין התשובות המוצעות. לשם כך, נפרק את המספרים בתשובות לגורמים הראשוניים שלהם, וננסה למצוא מספר אליו לא ניתן להגיע ע״י הכפלת הגורמים הראשוניים 3 ו-5 בלבד.

(1) $25 \Rightarrow 5 \cdot 5$ $\Rightarrow$ ניתן להגיע, התשובה נפסלת

(2) $27 \Rightarrow 3 \cdot 3 \cdot 3$ $\Rightarrow$ ניתן להגיע, התשובה נפסלת

(3) $50 \Rightarrow 25 \cdot 2 = 5 \cdot 5 \cdot 2$ $\Rightarrow$ מכיל את הגורם 2, **תשובה נכונה**

טיפ: מכיוון שהצבנו את התשובות, ברגע שמצאנו תשובה נכונה אין צורך להמשיך לבדוק את שאר התשובות, אך למען שלמות ההסבר נפסול אותן:

(4) $75 \Rightarrow 25 \cdot 3 = 5 \cdot 5 \cdot 3$ $\Rightarrow$ ניתן להגיע, התשובה נפסלת

כאמור, למספר 50 לא ניתן להגיע ללא הגורם הראשוני 2 ולכן לא ניתן יהיה ליצור אותו באמצעות המחשבון שברשותנו.

.4 תשובה (2) נכונה. שאלה 10 מתוך 20 בפרק.

דרך א׳ – הכרת המספרים הראשוניים

אם אנו זוכרים את המספרים המדוברים, ניתן לפתור בקלות. המספר הדו-ספרתי הראשוני הקטן ביותר הוא 11 והגדול ביותר הוא 97. לכן:

$11 + 97 = 108$

דרך ב׳ – הצבת תשובות

המספר הדו-ספרתי הראשוני הראשון, כלומר הקטן ביותר, הוא 11. כעת, נעבור על התשובות ונבדוק בהתאם לכל תשובה מה יוצא המספר השני (נחסר 11 מכל תשובה, אשר מבטאת את הסכום של שני המספרים, וכך נישאר עם ערכו של המספר השני) . אם המספר שנקבל אינו ראשוני – נפסול את התשובה.

<u>נבדוק את תשובה (1)</u>: $110 - 11 = 99$. כלומר, לפי תשובה זו ערך המספר הראשוני הגדול ביותר הוא 99. 99 מתחלק במספרים נוספים, לדוגמה ב-9, ועל כן אינו ראשוני. התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (2)</u>: $108 - 11 = 97$. כלומר, לפי תשובה זו ערך המספר הראשוני הגדול ביותר הוא 97. 97 הוא אכן המספר הראשוני הדו-ספרתי הגדול ביותר, אך אם אינכם בטוחים האם 97 ראשוני, המשיכו לבדוק את התשובות הבאות.

<u>נבדוק את תשובה (3)</u>: $107 - 11 = 96$. כלומר, לפי תשובה זו ערך המספר הראשוני הגדול ביותר הוא 96. 96 הוא מספר זוגי ועל כן אינו ראשוני. התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (4)</u>: $104 - 11 = 93$. כלומר, לפי תשובה זו ערך המספר הראשוני הגדול ביותר הוא 93. 93 מתחלק במספרים נוספים, לדוגמה ב-3, ועל כן אינו ראשוני. התשובה נפסלת.

---

5. תשובה (4) נכונה. שאלה 10 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הצבת תשובות
בין המספר 24 ל-x ישנם בדיוק 2 מספרים ראשוניים. אנו נשאלים איזו תשובה אינה יכולה להיות ערכו של x.
נבדוק את התשובות ונראה לאיזה מספר מבין המספרים שבתשובות, יש יותר או פחות מ-2 גורמים ראשוניים בינו לבין 24.

<u>נבדוק את תשובה (1):</u> בין המספר 24 למספר 32 נמצאים הגורמים הראשוניים: 29 ו-31. לפיכך, 32 אכן עשוי להתאים להיות x, התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (2):</u> בין המספר 24 למספר 34 נמצאים הגורמים הראשוניים: 29 ו-31. לפיכך, 34 אכן עשוי להתאים להיות x, התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (3):</u> בין המספר 24 למספר 36 נמצאים הגורמים הראשוניים: 29 ו-31. לפיכך, 36 אכן עשוי להתאים להיות x, התשובה נפסלת.

טיפ: כיוון שפסלנו 3 תשובות, ניתן לסמן את תשובה (4) מבלי לבדוק אותה. למען שלמות ההסבר, נבדוק את נכונותה:

<u>נבדוק את תשובה (4):</u> בין המספר 24 למספר 38 נמצאים הגורמים הראשוניים: 29, 31 ו-37. לפיכך, 38 לא יכול להיות ערכו של x מפני שבינו לבין 24 ישנם 3 גורמים ראשוניים. **תשובה נכונה.**

דרך ב' – הברקה מיקס
לאחר שפסלנו את התשובה הראשונה (ראינו שבין 24 ל-32 ישנם בדיוק 2 גורמים ראשוניים), ומכיוון שכל התשובות האחרות גדולות ממנה, ניתן להבין שהתשובה הנכונה חייבת להיות התשובה הגדולה ביותר. זאת מכיוון שאילו בין 24 לבין אחת התשובות האמצעיות היה נוסף גורם ראשוני שלישי, הוא היה גם בין 24 ל-38. במקרה זה, היינו מקבלים יותר ממספר אחד שלא יכול להיות x. כלומר, היינו מקבלים יותר מתשובה אחת נכונה. מתוך ההנחה שאחת התשובות נכונות, נבין שהגורם הראשוני הנוסף חייב להיות בין 24 לבין התשובה הגדולה ביותר.

---

6. תשובה (2) נכונה. שאלה 10 מתוך 20 בפרק.

$x = a \cdot b^2 \cdot c^3$. a, b ו-c הם מספרים שלמים, חיוביים ושונים. אנו נשאלים איזו תשובה אינה יכולה להתאים להיות ערכו של x.
נבדוק את התשובות ונפרק אותן למכפלת הגורמים שמרכיבים אותן. שימו לב, נוכל להשתמש בהכפלת 1 בכל חזקה שנרצה כדי להתאים את התבנית (הרי הכפלה ב-1 אינה משפיעה על המכפלה).

<u>נבדוק את תשובה (1):</u> 18 מורכב מהגורמים הראשוניים: $3^2 \cdot 2$.
תבנית זו עשויה להתאים לתבנית של x כאשר: $a = 2\ ,\ b = 3\ ,\ c = 1 \ \Leftarrow\ 18 = 2 \cdot 3^2 \cdot 1^3$.

<u>נבדוק את תשובה (2):</u> 35 מורכב מהגורמים הראשוניים: $5 \cdot 7$.
כל אחד מהגורמים הללו חייב להופיע פעם אחת בלבד במכפלה כדי להגיע ל-35, דהיינו גם 5 וגם 7 חייבים לעלות בחזקת 1 כדי שהמכפלה תיתן 35. לכן x לא יכול להיות 35. **תשובה נכונה.**

טיפ: מכיוון שהצבנו את התשובות, ברגע שמצאנו תשובה נכונה אין צורך להמשיך לבדוק את שאר התשובות, אך למען שלמות ההסבר נפסול אותן:

<u>נבדוק את תשובה (3):</u> 72 מורכב מהגורמים הראשוניים: $3^2 \cdot 2^3$.
תבנית זו עשויה להתאים לתבנית של x כאשר למשל: $a = 1\ ,\ b = 3\ ,\ c = 2 \ \Leftarrow\ 72 = 1 \cdot 3^2 \cdot 2^3$.

<u>נבדוק את תשובה (4):</u> 108 מורכב מהגורמים הראשוניים: $3^3 \cdot 2^2$.
תבנית זו עשויה להתאים לתבנית של x כאשר למשל: $a = 1\ ,\ b = 2\ ,\ c = 3 \ \Leftarrow\ 108 = 1 \cdot 2^2 \cdot 3^3$.

7. תשובה (3) נכונה. שאלה 10 מתוך 20 בפרק.

על מנת לקבוע את הטווח המדויק של x עלינו להתייחס לקצוות של a ו-b.

a הוא מספר ראשוני חד ספרתי. המספרים המקיימים זאת הם: 2, 3, 5 ו-7.

b הוא מספר ראשוני דו ספרתי הקטן מ-50. קיימים לא מעט מספרים כאלה, אך אין אנו חייבים לדעת את כולם, עלינו להכיר את הקצוות. המספר הראשוני הדו ספרתי הקטן ביותר הוא 11, והגדול ביותר בטווח הוא 47.
כעת נחשב:

המספר הקטן ביותר שיתקבל ממכפלת a ו-b יהיה כאשר ניקח את הערכים הנמוכים ביותר שמקיימים את a ואת b: $2 \cdot 11 = 22$.
ניתן לפסול את תשובות (1) ו-(4).
המספר הגדול ביותר שיתקבל ממכפלת a ו-b יהיה כאשר ניקח את הערכים הגבוהים ביותר שמקיימים את a ואת b: $7 \cdot 47 = 329$.

***טיפ:** אין צורך לחשב עד הסוף. ניתן להשתמש בספרת האחדות ($7 \cdot 7 = 49$ ספרת האחדות היא 9) ובכך לפסול את התשובה (2).

***טיפ:** ניתן להשתמש בהערכת סדר גודל. אם אנחנו לא יודעים שהמספר הדו ספרתי הגדול ביותר המתאים ל-b הוא 47, אנחנו יכולים להניח שמדובר ב-+40. נכפול את המספר 7 ב-40 ונראה שהקצה המקסימלי של X חייב להיות גדול מ-280, ולכן תשובה (3) תהיה נכונה ו- (2) נפסלת.

---

8. תשובה (2) נכונה. שאלה 11 מתוך 20 בפרק.

מחלק של מספר הוא מספר המורכב מהגורמים הראשוניים של אותו מספר בלבד (חלקם או כולם). למחלק אסור להכיל גורמים ראשוניים נוספים מעבר לגורמים הראשוניים שמרכיבים את המספר.

על מנת למצוא את המחלק המשותף הגדול ביותר, עלינו למצוא את מספר הפעמים המקסימלי שכל אחד מהגורמים הראשוניים מופיע בשני המספרים. בפועל, אנו עושים פעולה דומה לזו של הוצאת גורם משותף משני מספרים – אנו למעשה מחפשים את הגורם הגדול ביותר שנמצא בשני המספרים.

נעבור על כל אחד מהגורמים ונראה כמה פעמים הוא מופיע בכל אחד מהמספרים N ו-M.

<u>הגורם הראשוני a-</u> מופיע רק פעם אחת במספר N, לכן הוא מופיע רק פעם אחת גם במחלק המשותף המקסימלי של שני המספרים.
<u>הגורם הראשוני b-</u> מופיע פעמיים בשני המספרים N ו-M, לכן הוא מופיע פעמיים גם במחלק המשותף המקסימלי של שני המספרים.
<u>הגורם הראשוני c-</u> מופיע רק פעם אחת במספר M, לכן הוא מופיע רק פעם אחת גם במחלק המשותף המקסימלי של שני המספרים.

מכאן, המחלק המשותף המקסימלי מכיל את כל אחד מהגורמים a ו-c פעם אחת, ואת הגורם b פעמיים. כלומר המחלק המשותף המקסימלי הוא $a \cdot b^2 \cdot c$.

---

9. תשובה (4) נכונה. שאלה 11 מתוך 20 בפרק.

כדי לקבוע איזה מהמספרים הנתונים בתשובות מחלק את x ללא שארית, עלינו לבדוק איזו תשובה מכילה את אותם הגורמים הראשוניים שנמצאים ב-x. שימו לב כי התשובה אינה חייבת להכיל את כל הגורמים הראשוניים של x, אך היא אינה יכולה להכיל גורמים שאינם נמצאים בו.

לשם כך, נפרק את המספרים בתשובות לגורמים הראשוניים שלהם ונראה איזו תשובה מחלקת את x ללא שארית (כלומר, איזו תשובה מכילה גורמים שנמצאים ב-x בלבד).

(1) $16 \Rightarrow 2^4 \Rightarrow$ x מכיל את הגורם 2 רק 3 פעמים, התשובה נפסלת

(2) $25 \Rightarrow 5^2 \Rightarrow$ x אינו מכיל את הגורם 5 כלל, התשובה נפסלת

(3) $48 \Rightarrow 16 \cdot 3 = 2^4 \cdot 3 \Rightarrow$ x מכיל את הגורם 2 רק 3 פעמים, התשובה נפסלת

טיפ: כיוון שפסלנו 3 תשובות, ניתן לסמן את תשובה (4) מבלי לבדוק אותה. למען שלמות ההסבר, נבדוק את נכונותה:

(4) $54 \Rightarrow 27 \cdot 2 = 3^3 \cdot 2 \Rightarrow$ x מכיל את כול הגורמים הללו. **תשובה נכונה**

---

10. תשובה (4) נכונה. שאלה 13 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הבנה

p ו-q הם שני מספרים ראשוניים שונים זה מזה. אנו נשאלים איזה מן המספרים הבאים **אינו** יכול להיות ההפרש ביניהם. כידוע, למעט 2, כל המספרים הראשוניים הם אי-זוגיים, וההפרש בין שני מספרים אי-זוגיים הוא זוגי. מכאן, שכדי שההפרש יהיה אי-זוגי, כמתואר בתשובות (2) ו-(4), אחד הגורמים צריך להיות זוגי, ולשם כך אחד המספרים חייב להיות 2 (הראשוני הזוגי היחיד). בעזרת הבנה זאת אנו יכולים לבדוק את התשובות ביעילות ולהתחיל מבדיקת תשובות (2) ו-(4), אשר עליהן יש לנו יותר מידע:

<u>נבדוק את תשובה (2)</u>: הפרש 9. כאמור, אחד המספרים הוא בהכרח 2, ולכן נוסיף לו את ההפרש ונבדוק האם מדובר במספר ראשוני:

$2 + 9 = 11$

11 הוא מספר ראשוני, ועל כן ההפרש המוצג בתשובה זו אפשרי. התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (4)</u>: הפרש 7. כאמור, אחד המספרים הוא בהכרח 2, ולכן נוסיף לו את ההפרש ונבדוק האם מדובר במספר ראשוני:

$2 + 7 = 9$

9 אינו מספר ראשוני, ועל כן ההפרש המוצג בתשובה זו אינו אפשרי. **תשובה נכונה**.

דרך ב' – הצבת תשובות

ניתן לבחון את כל התשובות ולנסות למצוא 2 מספרים ראשוניים אשר ההפרש ביניהם הוא כמתואר בכל תשובה. נפסול כל תשובה שנמצא דוגמה לשני מספרים ראשוניים כאלו.

(1) הפרש 10 – אפשרי. למשל: 3, 13. ⇐ אפשרי, התשובה נפסלת.

(2) הפרש 9 – אפשרי. למשל: 2, 11. ⇐ אפשרי, התשובה נפסלת.

(3) הפרש 8 – אפשרי. למשל: 3, 11. ⇐ אפשרי, התשובה נפסלת.

פסלנו 3 תשובות, ועל כן תשובה (4) נכונה.

---

11. תשובה (3) נכונה. שאלה 14 מתוך 20 בפרק.

הגדירו מספר "מעניין" כמספר אשר סכום כל המספרים הראשוניים מ-2 (כולל) ועד אותו מספר (כולל) הוא ראשוני בעצמו. נבחן את התשובות ונראה איזה מספר מהמספרים בתשובות הוא מספר מעניין.

טיפ: בהצבת תשובות, כדאי להתחיל בתשובות הנוחות יותר. בשאלה זו עדיף לנו להתחיל מהתשובה הקטנה ביותר ולסכום כמה שפחות מספרים מ-2 ועד המספר שבתשובה.

נבדוק את תשובה (3): המספרים הראשוניים הקיימים מ-2 ועד 3 הם 2 ו-3 בלבד. סכום המספרים הראשוניים הללו שווה ל-5 (3 + 2). 5 הוא מספר ראשוני ולכן 3 הוא מספר מעניין.

טיפ: מכיוון שהצבנו את התשובות, ברגע שמצאנו תשובה נכונה אין צורך להמשיך לבדוק את שאר התשובות, אך למען שלמות ההסבר נפסול אותן:

נבדוק את תשובה (1): המספרים הראשוניים הקיימים מ-2 ועד 11 הם 2, 3, 5, 7 ו-11. סכום המספרים הראשוניים הללו שווה ל-28 (11 + 7 + 5 + 3 + 2). 28 הוא אינו מספר ראשוני ולכן 11 הוא אינו מספר מעניין.

נבדוק את תשובה (2): המספרים הראשוניים הקיימים מ-2 ועד 6 הם 2, 3, ו-5. סכום המספרים הראשוניים הללו שווה ל-10 (5 + 3 + 2). 10 הוא אינו מספר ראשוני ולכן 6 הוא אינו מספר מעניין.

נבדוק את תשובה (4): המספרים הראשוניים הקיימים מ-2 ועד 5 הם 2, 3, ו-5. סכום המספרים הראשוניים הללו שווה ל-10 (5 + 3 + 2). 10 הוא אינו מספר ראשוני ולכן 5 הוא אינו מספר מעניין.

---

12. תשובה (2) נכונה. שאלה 15 מתוך 20 בפרק.

a ו-b הם מספרים שלמים. $a \cdot b = 50$.
אנו נשאלים איזו תשובה אינה יכולה להיות תוצאת התרגיל $a - b$.
נבדוק את התשובות וננסה להגיע לשני מספרים שהמכפלה שלהם שווה ל-50 וההפרש ביניהם הוא אחת התשובות בשאלה.

נבדוק את תשובה (1): אם $a = 10$ ו-$b = 5$,
אזי $a \cdot b = 50$ וגם $a - b = 5$. כלומר ישנם מספרים a ו-b המתאימים לתשובה, התשובה נפסלת.

נבדוק את תשובה (2): לא קיימים שני מספרים שהמכפלה שלהם היא 50 וההפרש ביניהם הוא 15. **תשובה נכונה.**

נבדוק את תשובה (3): אם $a = 25$ ו-$b = 2$,
אזי $a \cdot b = 50$ וגם $a - b = 23$. כלומר ישנם מספרים a ו-b המתאימים לתשובה, התשובה נפסלת.

נבדוק את תשובה (4): אם $a = 50$ ו-$b = 1$,
אזי $a \cdot b = 50$ וגם $a - b = 49$. כלומר ישנם מספרים a ו-b המתאימים לתשובה, התשובה נפסלת.

---

13. תשובה (2) נכונה. שאלה 15 מתוך 20 בפרק.

A ו-B הם מספרים ראשוניים. $1 < A < B$. הסכום $A + B$ הוא מספר ראשוני גם כן.
אנו נשאלים איזו טענה מבין הטענות בתשובות נכונה. נבדוק את התשובות.

<u>נבדוק את תשובה (1):</u>
הסכום $A + B$ לא בהכרח שווה ל-17, למשל כאשר $A = 2$, $B = 3$.
בהצבה זו הנתונים מתקיימים והסכום לא שווה ל-17. התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (2):</u>
ידוע שהסכום $A + B$ הוא מספר ראשוני. המספר הראשוני הזוגי היחיד הוא 2. לא ייתכן שהסכום שווה ל-2, ולכן המספר $A + B$ חייב להיות אי-זוגי, שכן הוא מספר ראשוני השונה מ-2. כדי שסכום של שני מספרים יהיה אי-זוגי, על אחד המחוברים להיות זוגי ועל השני להיות אי-זוגי. כפי שאמרנו רק 2 הוא מספר ראשוני זוגי והוא גם הראשוני הקטן ביותר. נתון ש- $A < B$ ולכן A חייב להיות שווה ל-2. **תשובה נכונה.**

טיפ: מכיוון שהצבנו את התשובות, ברגע שמצאנו תשובה נכונה אין צורך להמשיך לבדוק את שאר התשובות, אך למען שלמות ההסבר נפסול אותן:

<u>נבדוק את תשובה (3):</u>
הסכום $A + 9$ לא בהכרח קטן מ-B. נציב שוב $A = 2$, $B = 3$.
בהצבה זו הנתונים מתקיימים והסכום $9 + 2$ לא קטן מ-3. התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (4):</u>
כפי שהראינו בפסילה של תשובה (1) ישנם מספרים ראשוניים המקיימים את הנתונים. התשובה נפסלת.

---

14. תשובה (3) נכונה. שאלה 16 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הבנה
לא ניתן לחשב שורש למספר ראשוני ולקבל תוצאה שלמה. אילו היה למספר ראשוני שורש, המספר היה מתחלק גם בשורש, ולא רק בעצמו וב-1 – דבר הסותר את ההגדרה של מספר ראשוני.
לפיכך, אנו מבינים כי אם x^2 הוא מספר ראשוני, אז השורש שלו (x) הוא בהכרח מספר לא שלם.

דרך ב' – הצבת מספרים
נתון כי: $1 < x$, x^2 הוא מספר ראשוני. אנו מתבקשים לקבוע מה נכון לגבי x מבין האופציות הנתונות בתשובות.

נציב מספר המקיים את הנתונים. נתון כי x^2 הוא מספר ראשוני. על כן, נציב למשל $x^2 = 3$.
מכאן, נוציא שורש למשוואה ונמצא את ערכו של x.

$$x^2 = 3$$
$$x = \sqrt{3}$$

$\sqrt{3}$ הוא גדול מ-1, לכן ההצבה שביצענו מקיימת את הנתונים. משמצאנו את x, נפסול תשובות שאינן מתאימות.

$\sqrt{3}$ הוא לא מספר שלם, ולכן הוא לא זוגי ולא אי-זוגי. תשובות (1) ו-(2) נפסלות.
אך, נוסף על כך ש-$\sqrt{3}$ הוא לא מספר שלם, הוא גם קטן מ-10. ואנו נותרים עם שתי תשובות מתאימות.

כדי להכריע בין תשובה (3) לתשובה (4) נצטרך להגיע להבנה שתפסול את אחת התשובות או לבצע הצבה נוספת.

נתון לנו ש-x^2 הוא מספר ראשוני, אבל ישנם אין-סוף מספרים ראשוניים, גם מספרים גדולים מאוד. לפיכך, x גם יכול להיות מספר הגדול בהרבה מ-10. למשל, אם x^2 הוא 101 (שהוא מספר ראשוני) או מספר ראשוני גדול יותר, אזי השורש שלו (קרי x) יהיה גדול מ-10 וכך נפסלת תשובה (4).

פסלנו 3 תשובות, על כן תשובה (3) נכונה.

---

15. תשובה (3) נכונה. שאלה 17 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הבנה

בעקרון, ניתן לחלק את רוב המספרים בצורה "סימטרית", כלומר לצמדים של מספרים שמכפלתם שווה למספר המחולק. למשל:

$10 \Rightarrow 1, 2, 5, 10 \quad (10 = 1 \cdot 10 = 2 \cdot 5)$

$12 \Rightarrow 1, 2, 3, 4, 6, 12 \ (12 = 1 \cdot 12 = 2 \cdot 6 = 3 \cdot 4)$

במספרים כאלו מספר המחלקים הוא זוגי. זאת, משום שכל מכפלה של שני מספרים ששווה למספר שאותו אנו מפרקים הוסיפה לנו עוד 2 מחלקים שונים. לכן, המצב היחיד שבו נוכל להגיע למספר מחלקים אי-זוגי הוא אם אחת המכפלות ששווה למספר היא של שני מספרים זהים – כלומר של מספר בריבוע. כך יתווסף רק עוד מחלק אחד, ומספר המחלקים יהיה אי-זוגי. לדוגמה:

$9 \Rightarrow 1, \mathbf{3}, 9 \quad (9 = 1 \cdot 9 = \mathbf{3 \cdot 3})$

$16 \Rightarrow 1, 2, \mathbf{4}, 8, 16 \quad (16 = 1 \cdot 16 = 2 \cdot 8 = \mathbf{4 \cdot 4})$

כלומר, המספרים היחידים ש-a יכול להיות שווה להם הם מספרים השווים למספר שלם כלשהו בשנייה. לכן, $\sqrt{a}$ הוא בהכרח מספר שלם.

דרך ב' – הצבת מספרים

נציב במקום a מספר שמקיים את הנתונים בתרגיל, למשל: $a = 4$. המחלקים החיוביים השונים שלו הם: 1, 4 ו-2 – אכן מספר אי-זוגי של מחלקים (3 מחלקים).

עתה, נציב גם בתשובות $a = 4$. נשים לב שמכיוון שהשתמשנו בהצבת מספרים, עלינו לפסול 3 תשובות בטרם נוכל לסמן תשובה נכונה.

<u>נבדוק את תשובה (1)</u>: לפי תשובה זו, a הוא בהכרח מספר ראשוני. 4 אינו מספר ראשוני, ולכן התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (2)</u>: לפי תשובה זו, a הוא בהכרח מספר אי-זוגי. 4 אינו מספר אי-זוגי, ולכן התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (3)</u>: לפי תשובה זו, $\sqrt{a}$ הוא בהכרח מספר שלם. $\sqrt{4}$ הוא אכן מספר שלם ($\sqrt{4} = 2$). **מתאים**.

<u>נבדוק את תשובה (4)</u>: לפי תשובה זו, $\sqrt{a}$ הוא בהכרח מספר אי-זוגי. $\sqrt{4}$ אינו מספר אי-זוגי ($\sqrt{4} = 2$), ולכן התשובה נפסלת.

פסלנו 3 תשובות, ועל כן תשובה (3) נכונה.

16. תשובה (3) נכונה. שאלה 17 מתוך 20 בפרק.

אודי כתב 5 משפטים. במשפט הראשון 13 מילים ובכל משפט שלאחריו, הוא הגדיל את מספר המילים למספר הראשוני שבא מיד אחריו.

עלינו לבדוק מהו מספר המילים במשפט החמישי. לשם כך, נבדוק מהו המספר הראשוני החמישי לאחר 13.

במשפט הראשון 13 מילים.
במשפט השני 17 מילים.
במשפט השלישי 19 מילים.
במשפט הרביעי 23 מילים.
במשפט החמישי 29 מילים.

---

17. תשובה (4) נכונה. שאלה 18 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – ניסוי וטעייה
n הוא מספר שלם וחיובי. $\frac{n}{12}$ הוא שבר מצומצם שערכו קטן מ-1.
כדי לגלות כמה ערכי n אפשריים קיימים, נציב מספרים במקום n ונראה מתי קיבלנו שבר מצומצם הקטן מ-1.

$n = 1 \Rightarrow \frac{1}{12} \Rightarrow$ שבר מצומצם הקטן מ-1, **מתאים.**

$n = 2 \Rightarrow \frac{2}{12} = \frac{1}{6} \Rightarrow$ שבר שהוא אינו מצומצם עד הסוף, תשובה נפסלת.

$n = 3 \Rightarrow \frac{3}{12} = \frac{1}{4} \Rightarrow$ שבר שהוא אינו מצומצם עד הסוף, תשובה נפסלת.

$n = 4 \Rightarrow \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \Rightarrow$ שבר שהוא אינו מצומצם עד הסוף, תשובה נפסלת.

$n = 5 \Rightarrow \frac{5}{12} \Rightarrow$ שבר מצומצם הקטן מ-1, **מתאים.**

$n = 6 \Rightarrow \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \Rightarrow$ שבר שהוא אינו מצומצם עד הסוף, תשובה נפסלת.

$n = 7 \Rightarrow \frac{7}{12} \Rightarrow$ שבר מצומצם הקטן מ-1, **מתאים.**

$n = 8 \Rightarrow \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \Rightarrow$ שבר שהוא אינו מצומצם עד הסוף, תשובה נפסלת.

$n = 9 \Rightarrow \frac{9}{12} = \frac{3}{4} \Rightarrow$ שבר שהוא אינו מצומצם עד הסוף, תשובה נפסלת.

$n = 10 \Rightarrow \frac{10}{12} = \frac{5}{6} \Rightarrow$ שבר שהוא אינו מצומצם עד הסוף, תשובה נפסלת.

$n = 11 \Rightarrow \frac{11}{12} \Rightarrow$ שבר מצומצם הקטן מ-1, **מתאים.**

$n = 12 \Rightarrow \frac{12}{12} = 1 \Rightarrow$ גדול מדי, תשובה נפסלת.

דרך ב' – הבנה
נבין שכדי שהשבר יהיה מצומצם ביותר, n לא יכול להכיל גורמים ראשוניים המשותפים ל-12, אחרת ניתן יהיה לצמצם אותם. 12 מורכב מהגורמים הראשוניים 2 ו-3. לכן עלינו למצוא n שאינו מכיל גורמים אלו. נחפש בין 1 ל-12 אילו מספרים אינם מכילים את הגורמים 2 ו-3. על כן, n יכול להיות שווה ל-1, 5, 7, 11.
ישנן 4 אופציות שונות ל-n.

18. תשובה (1) נכונה. שאלה 18 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הבנה

ננסה להבין לאילו מספרים יש שלושה מחלקים בלבד (כולל המספר עצמו ו-1).

נבין שכדי שלמספר יהיו שלושה מחלקים (כולל עצמו ו-1) הוא צריך להתחלק במחלק אחד נוסף בלבד. מכאן אנו יכולים להבין שהמספר הוא למעשה ריבוע של גורם ראשוני – כאשר נכפול את הגורם הראשוני בעצמו, נקבל שהתוצאה מתחלקת אך ורק בגורם הראשוני שהכפלנו. לפיכך, המספר מתחלק בשלושה גורמים בלבד. מכאן, שהשורש של המספר שמצאנו הוא מספר ראשוני.

דרך ב' – הצבת מספרים

x הוא מספר חיובי שלו יש שלושה מחלקים שונים. אנו מתבקשים לקבוע איזו קביעה נכונה עבור $\sqrt{x}$.

נציב מספר המקיים את הנתונים – מספר חיובי בעל שלושה מחלקים שונים כולל עצמו ו-1.

x יכול להיות לדוגמה 4. ל-4 ישנם שלושה מחלקים: 1, 2 ו-4.

עתה נבדוק איזו טענה נכונה עבור $\sqrt{4} \Leftarrow 2$.

2 הוא מספר ראשוני וזוגי, אבל הוא אינו מתחלק ב-3 והוא כן מספר שלם. תשובות (3) ו-(4) נפסלות.

כדי להכריע בין תשובה (1) לתשובה (2) נבצע הצבה נוספת. נחפש x נוסף שלו יש שלושה מחלקים שונים, למשל 9 (המחלקים הם 1, 3 ו-9).

עתה נבדוק איזו טענה נכונה עבור $\sqrt{9} \Leftarrow 3$.

3 הוא מספר ראשוני ואי-זוגי, תשובה (2) נפסלה גם כן.

פסלנו 3 תשובות, על כן תשובה (1) נכונה.

---

19. תשובה (4) נכונה. שאלה 18 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הצבת תשובות

n הוא מספר שלם וחיובי. ל-n^2 יש מחלק הגדול מ-n ושונה מ-n^2.

אנו נשאלים מהו הערך הקטן ביותר האפשרי של n. לצורך כך, נציב את התשובות ונחפש מהו הערך הקטן ביותר שמקיים את הנתון. מכיוון שהתבקשנו למצוא את הערך הקטן ביותר שמקיים את הנתון, נבדוק את התשובות בסדר עולה.

<u>נבדוק את תשובה (2):</u> אם $n = 2$, אזי $n^2 = 4$. ל-4 אין מחלק הגדול מ-2 ושונה מ-4. התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (3):</u> אם $n = 3$, אזי $n^2 = 9$. ל-9 אין מחלק הגדול מ-3 ושונה מ-9. התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (4):</u> אם $n = 4$, אזי $n^2 = 16$. 16 מתחלק ב-8 שהוא גדול מ-4 ושונה מ-16. **תשובה נכונה.**

טיפ: מכיוון שהצבנו את התשובות, ברגע שמצאנו תשובה נכונה אין צורך להמשיך לבדוק את שאר התשובות. יתר על כן, בשאלה זו נשאלנו על הערך הקטן ביותר שמקיים את הנתון, לכן גם אם תשובה (1) הייתה מקיימת את הנתון, היא עדיין לא הייתה התשובה הנכונה משום שהיא גדולה מתשובה (4).
במקרה הספציפי הזה, תשובה (1) גם איננה נכונה. למען שלמות ההסבר נפסול אותה.

<u>נבדוק את תשובה (1):</u> אם $n = 5$, אזי $n^2 = 25$. ל-25 אין מחלק הגדול מ-5 ושונה מ-25. התשובה נפסלת.

דרך ב' – הבנה

n הוא מספר שלם וחיובי. ל-n^2 יש מחלק הגדול מ-n ושונה מ-n^2.

נבין שכדי של-n^2 יהיה מחלק הגדול מ-n ושונה מ-n^2, n צריך להיות מספר שאינו ראשוני. זאת מכיוון שאילו n היה מספר ראשוני, לאחר העלאתו בריבוע הוא יתחלק אך ורק בעצמו, ב-1 ובגורם הראשוני שהועלה בריבוע (n). לכן, כדי להוסיף מחלק (הגדול מ-n ושונה מ-n^2), נגדיר ש-n הוא לא ראשוני. 4 הוא המספר החיובי הראשון שאינו ראשוני (למעט 1, אך הוא אינו רלוונטי לשאלה כי גם כאשר הוא יעלה בריבוע לא יתווספו לו מחלקים). כמו כן, 4 הוא המספר היחיד בתשובות שאינו ראשוני.

20. תשובה (2) נכונה. שאלה 20 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – ניסוי וטעייה

בתיה טענה שכל מספר שמתחלק ב-6 וב-10 מתחלק ב-30. לעומתה, בועז טען שכל מספר שמתחלק ב-6 וב-10 מתחלק ב-60.

כדי להכריע מי מביניהם צודק ננסה למצוא מספר שמתחלק ב-6 וב-10 וללמוד ממנו לגבי הכלל.
המספר הראשון שמתחלק גם ב-6 וגם ב-10 הוא 30 (המכנה המשותף המצומצם ביותר של 6 ושל 10 הוא 30).
לכן, נבין כי כדי שמספר יתחלק ב-6 וב-10 עליו להיות כפולה של 30. אם לא הצלחנו להגיע להבנה הזו, ניתן להמשיך לחפש מספרים שמתחלקים ב-6 וב-10. נמצא שהמספרים הללו הם 30, 60, 90, 120 וכן הלאה.. כל אלה הם כפולות של 30 ומכאן שבתיה צודקת.
באמצעות ההצבה שלנו הצלחנו גם להוכיח שבועז טועה. מצאנו ש-30 מתחלק ב-6 וב-10. לעומת זאת, 30 לא מתחלק ב-60 ללא שארית, ולכן לא כל מספר שמתחלק ב-6 וב-10 מתחלק גם ב-60.

דרך ב' – הבנה

נבין כי כדי שמספר יתחלק ב-6 עליו להכיל את הגורמים הראשוניים 3 ו-2. באותו אופן, כדי שמספר יתחלק ב-10 עליו להכיל את הגורמים הראשוניים 5 ו-2. לכן, כדי שמספר יתחלק גם ב-6 וגם ב-10 עליו להכיל את הגורמים הראשוניים שמרכיבים את המספרים הללו, כלומר הגורמים 3, 2 ו-5. שימו לב, המספר לא צריך להכיל את הגורם 2 פעמיים, שכן מספיק שיהיה לו אותו פעם אחת והוא יוכל להתחלק גם ב-10 וגם ב-6 (לראייה 30 מכיל את הגורם 2 פעם אחת בלבד והוא מתחלק הן ב-6 הן ב-10).

על כן, הבנו שכדי שמספר יתחלק ב-6 וב-10 עליו להכיל את הגורמים 3, 2 ו-5. מכפלת הגורמים הללו שווה ל-30. מכאן, שכל מספר שמתחלק ב-6 וב-10 מתחלק גם ב-30.

חלוקה ושארית

טבלת סימני התחלקות

מתחלק ב-	איך יודעים?	דוגמה
2	זוגי - ספרת האחדות שלו היא זוגית - 0 , 2 , 4 , 6 , 8	37<u>2</u>
3	סכום הספרות של המספר מתחלק ב-3	417 $4+1+7=12$
4	המספר המורכב מ-2 הספרות הימניות מתחלק ב-4	3,5<u>32</u>
5	ספרת האחדות של המספר היא 5 או 0	2,74<u>5</u>
6	המספר מתחלק ב-2 וב-3	16<u>2</u> $1+6+2=9$
8	המספר המורכב מ-3 הספרות הימניות מתחלק ב-8	6,<u>**320**</u>
9	סכום הספרות של המספר מתחלק ב-9	765 $7+6+5=18$
10	ספרת האחדות של המספר היא 0	23<u>0</u>
11	<u>מספר תלת-ספרתי</u>: 1) המספר המורכב מ-2 הספרות משמאל פחות הספרה הימנית מתחלק ב-11 2) סכום הספרות החיצוניות פחות הספרה הפנימית שווה 0 או 11.	**71**5 $71-5=66$ **132** $1+2-3=0$

הערות:

- במבחן, אם יהיה צורך לבדוק אם מספר כלשהו מתחלק ב-8, הוא יהיה קל לבדיקה, למשל:
  5,**240** , 2,**560** , 7,**320**

- חלוקה ב-11 <u>ברוב</u> המקרים תהיה עם מספרים פשוטים, למשל:
  110 , 121 , 132 , 6,600 , 4,400 , 7,700

- לבדיקת חלוקה במספרים גדולים יותר נבדוק חלוקה בגורמים שלהם, למשל:
  מספר שמתחלק ב-3 וב-5 ← מתחלק ב-15

סיפורי התחלקות

בשאלות אלו מספרים לנו סיפור, ובדרך כלל עלינו למצוא מספר כלשהו אשר עומד בתנאים אשר מופיעים בשאלה. הדרך לפתור שאלות אלו היא בדרך כלל להציב את התשובות.

דוגמה:

בספארי בר״ג, $\frac{1}{4}$ מהזברות לובשות פיג׳מה, מתוכן $\frac{1}{5}$ אוהבות לישון עד מאוחר.

מה **יכול להיות** מספר הזברות בספארי?

(1) 45 (2) 60 (3) 44 (4) 35

פתרון -

אם $\frac{1}{4}$ מהזברות לובשות פיג׳מה, הרי שמספר הזברות חייב להתחלק ב-4 , ומכיוון ש- $\frac{1}{5}$ **מתוכן** אוהבות לישון עד מאוחר, מספרן חייב להתחלק ב-20 ($\frac{1}{5}$ מתוך $\frac{1}{4}$ - המשמעות היא שהמספר מתחלק **במכפלה** שלהם). נבדוק את התשובות ונמצא כי רק תשובה (2) עומדת בתנאים, ו-60 מתחלק ב-20.

שארית

שארית - שארית היא מה שנשאר כאשר מחלקים מספר מסוים במספר אחר. לדוגמה, השארית מחלוקת 10 ב-3 היא 1.
דרך קלה להבין זאת היא כך: כמה כסף ישאר לי לאחר שאקנה בעזרת 10 שקלים סוכריות, שעלות כל אחת מהן היא 3 שקלים? שקל אחד = השארית.

דוגמה:

שמרית משחקת בקוביות. אם תבנה 3 מגדלים עם מספר זהה של קוביות, ישארו לה 2 קוביות. אם תבנה 4 מגדלים עם מספר קוביות זהה, תישאר לה קוביה אחת.

מה **יכול להיות** מספר הקוביות שיש לשמרית?

(1) 12 (2) 22 (3) 17 (4) 25

פתרון -

אנו מחפשים מספר קוביות כזה, שמתחלק ב-3 עם שארית 2, וגם מתחלק ב-4 עם שארית 1. נבדוק את המספרים המופיעים בתשובות - רק תשובה (3) מתאימה.

דוגמה:

a ו-b הם מספרים שלמים חיוביים.

x הוא השארית מחלוקת a ב-5.

y הוא השארית מחלוקת b ב-3.

מה הערך המקסימלי של הביטוי $x\cdot y$?

(1) 15 (2) 2 (3) 8 (4) 4

פתרון -

השארית המקסימלית מחלוקה במספר מסוים תמיד תהיה קטנה מהמספר ב-1 (אם היא היתה שווה למספר השארית היתה אפס, ואם היא היתה גדולה מהמספר אז אפשר ״להכניס״ אותו שוב בשארית ולקבל שארית קטנה יותר).

השארית המקסימלית מחלוקה ב-5 היא 4, השארית המקסימלית מחלוקה ב-3 היא 2, הערך המקסימלי של הביטוי $x\cdot y$ הוא: $4 \cdot 2 = 8$

השארית המקסימלית תמיד קטנה מהמחלק ב-1

הצגה אלגברית

נתון כי A הוא מספר שמתחלק ב-4 עם שארית 3. ניתן לייצג את A בצורה אלגברית בעזרת משוואה (x מספר שלם):
$A = 4x + 3$

דוגמה:
נתון מספר המתחלק ב-4 עם שארית 1.
איזה מהביטויים הבאים יכול לייצג את המספר (x מספר שלם)?

(1) $4x + 7$ (2) $12x + 11$ (3) $(4x + 5)^2$ (4) $(4x + 6)^2$

פתרון -
נבדוק את התשובות:
תשובה (1): $4x$ מתחלק ב-4 ללא שארית, 7 מתחלק עם שארית 3.
תשובה (2): $12x$ מתחלק ב-4 ללא שארית, 11 מתחלק עם שארית 3.
תשובה (3): $4x$ מתחלק ב-4 ללא שארית, 5^2 מתחלק עם שארית 1.
תשובה (4): $4x$ מתחלק ב-4 ללא שארית, 6^2 מתחלק ללא שארית.

הצבת מספרים

חלק גדול מהשאלות בנושא שארית ניתן לפתור בהצבת מספרים.
נפתור את השאלה הקודמת באמצעות הצבת מספר במקום x.
בדרך כלל כדאי להציב 0 או 1 במקום ה-x, ולבדוק את התשובות.

נציב: $x = 0$:
תשובה (1): 7 - השארית מחלוקה ב-4 היא 3 ← לא מתאים.
תשובה (2): 11 - השארית מחלוקה ב-4 היא 3 ← לא מתאים.
תשובה (3): 25 - השארית מחלוקה ב-4 היא 1 ← תשובה נכונה!
תשובה (4): 36 - אין שארית מחלוקה ב-4 ← לא מתאים.

תרגול שאלות מבחינות אמת

1. נעשה ניסיון לחלק כיתה לקבוצות של 4 תלמידים, ולאחר מכן - לקבוצות של 5 תלמידים.
בכל אחד מהניסיונות נשארה קבוצה אחת שמנתה רק 3 תלמידים.

איזה מהמספרים הבאים יכול להיות מספר התלמידים בכיתה?

(1) 28 (2) 25 (3) 23 (4) 21

---

2. שלמה חילק **x** בלונים בין 5 ילדיו שווה בשווה.
הילד הבכור חילק את כל הבלונים שקיבל בין 3 מחבריו שווה בשווה,
הילד השני חילק את כל הבלונים שקיבל בין 2 מחבריו שווה בשווה,
ושאר הילדים שמרו את הבלונים לעצמם.

ערכו של **x** יכול להיות -

(1) 15
(2) 20
(3) 30
(4) 45

---

3. במכללה מסוימת בדיוק 20% מהסטודנטים דוברים סינית.

איזה מן המספרים הבאים **עשוי** להיות מספר הסטודנטים במכללה?

(1) 108
(2) 128
(3) 245
(4) 256

---

4. איזה מהמספרים הבאים מתחלק ב-11 ללא שארית?

(1) 461
(2) 572
(3) 914
(4) 998

פתרתי ____________ שאלות ב ____________ דקות, ____________ תשובות נכונות

5. שארית החלוקה של x ב-6 היא 1.

מה שארית החלוקה של x ב-3?

(1) 1
(2) 2
(3) 0
(4) השארית יכולה להיות כל אחד מהמספרים הנ"ל

---

6. x הוא מספר שלם וחיובי.

הביטוי $(6x+24)$ **לא בהכרח** מתחלק ב-

(1) 6
(2) 2
(3) 3
(4) 4

---

7. שארית החלוקה של x ב-7 היא 5.

מה שארית החלוקה של 2x ב-7?

(1) 0 (2) 2 (3) 3 (4) 6

---

8. A הוא מספר זוגי חיובי.

$n = A^3 + 6A^2 + 8A$

n **בהכרח** -

(1) מתחלק ב-18
(2) מתחלק ב-32
(3) מתחלק ב-48
(4) מתחלק ב-62

---

9. ליאיר 100 קופסאות ממוספרות מ-1 עד 100. בכל קופסה יש סוכרייה.
יאיר אוכל את הסוכריות בסדר הבא:
ראשית, הוא אוכל את הסוכרייה שבקופסה מספר 1.
אחר כך הוא אוכל את הסוכריות שבקופסאות שמספרן מתחלק ב-2 ללא שארית.
אחר כך הוא אוכל את הסוכריות שבקופסאות שמספרן מתחלק ב-3 ללא שארית,
וכן הלאה.

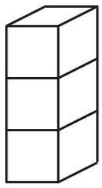
באיזו קופסה תישאר הסוכרייה האחרונה?

(1) 100
(2) 97
(3) 55
(4) 51

---

10. להדס, בתיה וגילי יש **מספר שווה** של קוביות זהות. כל אחת מהן בנתה מגדלים מכל הקוביות שברשותה (לדוגמה, מגדל כבסרטוט).
הדס בנתה מהקוביות שלה 5 מגדלים בגובה שווה.
בתיה בנתה מהקוביות שלה 2 מגדלים, שאחד מהם גבוה מהאחר בקובייה אחת.
גילי בנתה מהקוביות שלה 3 מגדלים בגבהים שונים, ובגבוה שבהם היו 7 קוביות.

כמה קוביות יש לכל אחת מהבנות?



(1) 10
(2) 13
(3) 15
(4) 25

---

11. n מספר שלם דו-ספרתי. (n^2-n) מתחלק ב-10.

איזו מן הספרות הבאות יכולה להיות ספרת האחדות של n?

(1) 6
(2) 2
(3) 3
(4) 4

---

12. x הוא מספר שלם וחיובי.

נתון: $y = 17x + 7$
y מתחלק ב-10 ללא שארית.

x **יכול להיות** שווה ל-

(1) 190 (2) 227 (3) 379 (4) 294

פתרתי ____________ שאלות ב ____________ דקות, ____________ תשובות נכונות

13. n הוא מספר שלם וחיובי המתחלק ב-3 ללא שארית.

מה המספר הגדול ביותר ש-$n(n+3)$ מתחלק בו **בהכרח** ללא שארית?

(1) 6 (2) 2 (3) 12 (4) 18

---

14. אב רצה לחלק x סוכריות בין שלושת ילדיו.
אם שלושתם יקבלו מספר שווה של סוכריות תישאר לאב סוכרייה אחת. אם הבן הבכור יקבל מספר כפול של סוכריות מכל אחד מאחיו, לא יישארו לאב סוכריות כלל.

x יכול להיות שווה ל-

(1) 28
(2) 20
(3) 25
(4) 12

---

15. a הוא מספר שלם וחיובי.

נתון: $b = 2a$
$c = 2b$
$d = 2c$

$a + b + c + d$ **בהכרח** מתחלק ב-

(1) 7 (2) 2 (3) 12 (4) 15

---

16. לתחנת מוניות יש טלפון ופקס שמספריהם הם מספרים של 7 ספרות. במספר הטלפון כל 7 הספרות זהות. מספר הפקס הוא המספר העוקב למספר הטלפון.

מה שארית החלוקה של **סכום** הספרות של מספר הפקס ב-7?

(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 0

---

17. a הוא מספר שלם וחיובי. שארית החלוקה של a ב-4 היא 2.

מה שארית החלוקה של $(a+3)$ ב-3?

(1) 1
(2) 2
(3) 0
(4) אי-אפשר לדעת לפי הנתונים

פתרתי ______________ שאלות ב ______________ דקות, ______________ תשובות נכונות

.18 כמה מספרים **זוגיים** בין 0 ל-100 מתחלקים ב-5 עם שארית 2?

(1) 10
(2) 12
(3) 15
(4) 16

.19 נתון: $y = \frac{\sqrt{2} \cdot x}{3}$, y הוא מספר שלם המתחלק ב-4 ללא שארית.

מה המספר הגדול ביותר ש-x^2 מתחלק בו **בהכרח** ללא שארית?

(1) 6 (2) 8 (3) 18 (4) 72

.20 נתון: x, y ו-z הם מספרים שלמים.
$x + y + z$ מתחלק ב-3 ללא שארית.

איזו מן הטענות הבאות בהכרח **אינה** נכונה?

(1) $(x+y)$ מתחלק ב-3 עם שארית 1, וְ-z מתחלק ב-3 ללא שארית
(2) x, y ו-z מתחלקים ב-3 עם שארית 2
(3) x, y ו-z הם מספרים אי-זוגיים
(4) x מתחלק ב-3 עם שארית 1, וְ-$(y+z)$ מתחלק ב-3 עם שארית 2

תשובות

שאלה	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
תשובה	3	3	3	2	1	4	3	3	2	3

שאלה	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
תשובה	1	3	4	1	4	1	4	1	4	1

פתרתי 20 שאלות - ______________ נכונות, ______________ אחוזי הצלחה

1. תשובה (3) נכונה. שאלה 1 מתוך 20 בפרק.

בשאלה זו אנו צריכים להבין שאנו מחפשים מספר שכאשר נחלקו הן ב-4 והן ב-5 נישאר עם שארית 3. נבדוק את התשובות ונראה מדוע כך הדבר:

<u>נבדוק את תשובה (1)</u>: אם היו 28 תלמידים בכיתה, כאשר נחלקם לקבוצות של 4 לא תישאר שארית כלל (תהיינה 7 קבוצות ובכולן 4 תלמידים). לא נשארה קבוצה של 3 תלמידים, ולכן התשובה נפסלת ואין צורך לבדוק את המצב השני.

$$\frac{28}{4} = 7 \text{ (שארית 0)}$$

<u>נבדוק את תשובה (2)</u>: אם היו 25 תלמידים בכיתה, כאשר נחלקם לקבוצות של 4 תהיינה 6 קבוצות "מלאות" ויישאר רק ילד אחד בחוץ. לא נשארה קבוצה של 3 תלמידים, ולכן התשובה נפסלת ואין צורך לבדוק את המצב השני.

$$\frac{25}{4} = 6 \text{ (שארית 1)}$$

<u>נבדוק את תשובה (3)</u>: אם היו 23 תלמידים בכיתה, כאשר נחלקם לקבוצות של 4 תהיינה 5 קבוצות "מלאות" ויישארו 3 תלמידים בקבוצה האחרונה. מתאים.

$$\frac{23}{4} = 5 \text{ (שארית 3)}$$

נבדוק גם את התרחיש השני; כאשר נחלק את 23 התלמידים לקבוצות של 5 תהיינה 4 קבוצות "מלאות", וגם במקרה זה יישארו 3 תלמידים בקבוצה האחרונה. התשובה תואמת את הנתונים ולכן זו **התשובה הנכונה**.

$$\frac{23}{5} = 4 \text{ (שארית 3)}$$

טיפ: מכיוון שהצבנו את התשובות, ברגע שמצאנו תשובה נכונה אין צורך להמשיך לבדוק את שאר התשובות, אך למען שלמות ההסבר נפסול את תשובה (4):

<u>נבדוק את תשובה (4)</u>: אם היו 21 תלמידים בכיתה, כאשר נחלקם לקבוצות של 4 תהיינה 5 קבוצות "מלאות" ויישאר רק ילד אחד בחוץ. לא נשארה קבוצה של 3 תלמידים, ולכן התשובה נפסלת ואין צורך לבדוק את המצב השני.

$$\frac{21}{4} = 5 \text{ (שארית 1)}$$

2. תשובה (3) נכונה. שאלה 1 מתוך 20 בפרק.

לשלמה יש x בלונים שאותם חילק שווה בשווה בין 5 ילדיו.
הילד הראשון חילק את הבלונים שקיבל שווה בשווה בין 3 מחבריו, והילד השני חילק את הבלונים שקיבל שווה בשווה בין 2 מחבריו. אנו מתבקשים למצוא מה עשוי היה להיות ערכו של x.

מכך שהבן הראשון חילק את הבלונים שלו ל-3 חברים, אנו מבינים שכל אחד מהילדים קיבל מספר בלונים המתחלק ב-3, ומכאן שגם x עצמו מתחלק ב-3. תשובה (2) אינה מתחלקת ב-3 ולכן היא נפסלת.

נוסף על כך, ידוע שהבן השני חילק את הבלונים שלו בין 2 חברים. על כן, מספר הבלונים שכל אחד מהילדים קיבל מתחלק ב-2, וכך גם x. לכן אנחנו יכולים לפסול כל תשובה אי-זוגית. תשובות (1) ו-(4) אינן מתחלקות ב-2 ולכן הן נפסלות.

פסלנו 3 תשובות ועל כן תשובה (3) נכונה.

---

3. תשובה (3) נכונה. שאלה 3 מתוך 20 בפרק.

20% מהסטודנטים במכללה מסוימת מדברים סינית. עלינו לקבוע מה עשוי להיות מספר הסטודנטים במכללה.
תחילה, נבין כי 20% הם $\frac{1}{5}$ מסך הסטודנטים:

$$20\% = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$$

מכיוון שסטודנטים הם עצמים שלמים (לא ניתן שיהיה חצי סטודנט או שליש סטודנט), עלינו לחפש מספר שניתן לחשב ממנו חמישית ולקבל תוצאה שלמה, דהיינו מספר המתחלק ב-5.
כדי שמספר יתחלק ב-5 ספרת האחדות שלו צריכה להיות 0 או 5. נשים לב שרק המספר 245 עונה על הקריטריון הזה.

דרך חישוב נוספת:
ניתן גם להשתמש בשיטת ה-10% כדי לקבוע מאיזה מספר ניתן לחשב 20% ולקבל תוצאה שלמה.

<u>נבדוק את תשובה (1):</u>
10% מ-108 הם 10.8. לכן 20% הם: $10.8 \cdot 2 \Leftarrow 21.6$. תוצאה לא שלמה, התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (2):</u>
10% מ-128 הם 12.8. לכן 20% הם: $12.8 \cdot 2 \Leftarrow 25.6$. תוצאה לא שלמה, התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (3):</u>
10% מ-245 הם 24.5. לכן 20% הם: $24.5 \cdot 2 \Leftarrow 49$. תוצאה שלמה, **תשובה נכונה.**

<u>נבדוק את תשובה (1):</u>
10% מ-256 הם 25.6. לכן 20% הם: $25.6 \cdot 2 \Leftarrow 51.2$. תוצאה לא שלמה, התשובה נפסלת.

---

4. תשובה (2) נכונה. שאלה 4 מתוך 20 בפרק.

כדי לקבוע האם מספר תלת ספרתי מתחלק ב-11 נשתמש באחת משתי השיטות:

א. המספר המורכב מ-2 הספרות השמאליות פחות הספרה הימנית, מתחלק ב-11.
ב. סכום הספרות החיצוניות פחות הספרה הפנימית שווה 0 או 11.

נבדוק את התשובות לפי השיטות לעיל ונראה איזה מספר מתחלק ב-11.

<u>נבדוק את תשובה (1):</u> 461
שיטה א': $46 - 1 \Leftarrow 45$. לא מתחלק ב-11, התשובה נפסלת.
שיטה ב': $4 + 1 - 6 \Leftarrow -1$. לא שווה 0 או 11, התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (2):</u> 572
שיטה א': $57 - 2 \Leftarrow 55$. מתחלק ב-11, **מתאים.**
שיטה ב': $5 + 2 - 7 \Leftarrow 0$. שווה 0 או 11, **מתאים.**

טיפ: מכיוון שהצבנו את התשובות, ברגע שמצאנו תשובה נכונה אין צורך להמשיך לבדוק את שאר התשובות, אך למען שלמות ההסבר נפסול אותן:

<u>נבדוק את תשובה (3):</u> 914
שיטה א': $91 - 4 \Leftarrow 87$. לא מתחלק ב-11, התשובה נפסלת.
שיטה ב': $9 + 4 - 1 \Leftarrow 12$. לא שווה 0 או 11, התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (4):</u> 998
שיטה א': $99 - 8 \Leftarrow 91$. לא מתחלק ב-11, התשובה נפסלת.
שיטה ב': $9 + 8 - 9 \Leftarrow 8$. לא שווה 0 או 11, התשובה נפסלת.

דרך חישוב נוספת:
אם לא נזכור במבחן את סימן החלוקה ב-11, ניתן למצוא מספרים הקרובים למספר המבוקש שאנו יודעים שמתחלקים ב-11.

<u>נבדוק את תשובה (1):</u> 461. קל לראות ש-440 מתחלק ב-11 בדיוק. כדי להגיע מ-440 ל-461 יש להוסיף עוד 21. 21 לא מתחלק ב-11 ולכן 461 בעצמו לא מתחלק ב-11. התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (2):</u> 572. קל לראות ש-550 מתחלק ב-11 בדיוק. כדי להגיע מ-550 ל-572 יש להוסיף עוד 22. 22 מתחלק ב-11 ללא שארית, ולכן 572 מתחלק ב-11 ללא שארית. **תשובה נכונה.**

<u>נבדוק את תשובה (3):</u> 914. קל לראות ש-880 מתחלק ב-11 בדיוק. כדי להגיע מ-880 ל-914 יש להוסיף עוד 34. 34 לא מתחלק ב-11 ולכן 914 בעצמו לא מתחלק ב-11. התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (4):</u> 998. קל לראות ש-990 מתחלק ב-11 בדיוק. כדי להגיע מ-990 ל-998 יש להוסיף עוד 8. 8 לא מתחלק ב-11 ולכן 998 בעצמו לא מתחלק ב-11. התשובה נפסלת.

5. תשובה (1) נכונה. שאלה 4 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הצבת מספרים

נציב מספר אשר שארית חלוקתו ב-6 היא 1, למשל 1 (6 אינו נכנס כלל ב-1, ולכן 1 נשאר כולו כשארית).
חלוקת המספר 1 ב-3 תיתן גם היא שארית 1 (3 אינו נכנס כלל ב-1, ולכן 1 נשאר כולו כשארית). ניתן לפסול את תשובות (2) ו-(3).

כדי לפסול את תשובה (4) נבצע הצבה נוספת: נציב $x = 7$ (6 נכנס ב-7 פעם אחת והשארית הנותרת היא 1).
חלוקת המספר 7 ב-3 תיתן גם היא שארית 1 (3 נכנס ב-7 פעמיים והשארית הנותרת היא 1).

שתי הצבות אמנם אינן פוסלות באופן מוחלט את תשובה (4), אך הסבירות שמדובר בצירוף מקרים נמוכה ולכן נסמן את תשובה (1).

דרך ב' – הבנה

כל מספר המתחלק ב-6 מתחלק בהכרח גם ב-3. מספר המתחלק ב-6 עם שארית 1 הוא מספר הגדול ב-1 מכפולה של 6 (למשל, 7). כלומר, מספר זה גם גדול ב-1 מכפולה של 3. לכן, חלוקתו ב-3 תותיר שארית 1.

דרך ג' – פתרון מתמטי

נייצג את x באופן אלגברי (k הוא מספר שלם כלשהו):

$$x = 6k + 1$$

עלינו למצוא מה שארית החלוקה של x ב-3:

$$\frac{6k+1}{3} \Rightarrow \frac{6k}{3} + \frac{1}{3} = 2k + \frac{1}{3}$$

כאמור, חלוקתו ב-3 תותיר שארית 1.

---

6. תשובה (4) נכונה. שאלה 5 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הצבת מספרים

נתון ש-x הוא מספר שלם וחיובי, נציב לדוגמה $x = 1$. נבדוק מה ערכו של הביטוי לפי הצבה זו:

$$6x + 24 = 6 \cdot 1 + 24 = 30$$

כעת, נבדוק את תשובות – נחפש תשובה ש-30 אינו מתחלק בה.

(1) $30 : 6 = 5$ $\Rightarrow$ מתחלק.

(2) $30 : 2 = 15$ $\Rightarrow$ מתחלק.

(3) $30 : 3 = 10$ $\Rightarrow$ מתחלק.

(4) $30 : 4 = 7.5$ $\Rightarrow$ לא מתחלק. **תשובה נכונה**

דרך ב' – פתרון מתמטי

נשים לב שניתן להוציא גורם משותף 6:

$$6x + 24 = 6 \cdot (x + 4)$$

כעת ניתן לראות כי 6 הוא אחד הגורמים במכפלה ולכן הביטוי מתחלק בהכרח ב-6. כידוע, כל מספר המתחלק ב-6 מתחלק גם ב-2 וב-3. מכאן שתשובות (1), (2) ו-(3) נפסלות, ולכן תשובה (4) נכונה – המספר היחיד בו הביטוי לא בהכרח מתחלק הוא 4.

---

7. תשובה (3) נכונה. שאלה 6 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הצבת מספרים

שארית החלוקה של x ב-7 היא 5. אנו נשאלים מהי שארית החלוקה של 2x ב-7.

לצורך פתרון התרגיל ניתן להציב מספר המקיים את הנתון במקום x. נחפש מספר שכשנחלק אותו ב-7 נקבל 5, למשל 12. עתה נחשב מהי שארית החלוקה של 24 ($2 \cdot 12$) ב-7 $\Leftarrow$ 3.

פסלנו 3 תשובות ועל כן תשובה (3) נכונה.

דרך ב' – הבנה

כאשר מחלקים את x ב-7 מתקבלת שארית 5. לכן, כאשר אנו לוקחים את 2x, אנו למעשה מכפילים גם את השארית, והשארית החדשה היא לכאורה 10 ($2 \cdot 5$). עם זאת, ניתן לבצע "סבב חלוקה נוסף" ולחלק את 10 ב-7. לאחר סבב זה תיוותר שארית 3.

---

8. תשובה (3) נכונה. שאלה 7 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הצבת מספרים

נתון ש-A הוא מספר זוגי חיובי. ובנוסף, $n = A^3 + 6A^2 + 8A$. אנו נשאלים באיזה מספר n בהכרח מתחלק.

נבין שכדי לבדוק באיזה מספר n מתחלק <u>בהכרח</u>, עלינו להציב את A המינימאלי. שכן אם נציב A גדול יותר, הוא יכיל גורמים ראשוניים שלא בהכרח קיימים ב-A, ולכן נקבל מספר ש-n לא מתחלק בו <u>בהכרח</u>.

על כן, נציב $A = 2$. עתה, נחשב איזה n מתקבל:

$$n = A^3 + 6A^2 + 8A \quad \Rightarrow \quad 2^3 + 6 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2 = 8 + 6 \cdot 4 + 16 = 48$$

כלומר, n בהכרח מתחלק ב-48.

נבין כי אם היינו מציבים במקום A מספר זוגי גדול יותר, היינו מקבלים n גדול יותר שהוא כפולה של 48, אבל מכיוון שהצבנו את A האפשרי המינימאלי, מצאנו את המספר הוודאי ש-n מתחלק בו.

דרך ב' – פתרון מתמטי

הדרך המתמטית במקרה זה פחות מתאימה למבחן הפסיכומטרי ומכילה חומר מתמטי שלא נלמד במסגרת הקורס. מצאנו לנכון להכניס אותה לטובת תלמידים המחפשים הוכחה אלגברית.

נתון ש-A הוא מספר זוגי חיובי. ובנוסף, $n = A^3 + 6A^2 + 8A$. אנו נשאלים באיזה מספר n בהכרח מתחלק.

ניתן, ע"י מניפולציות מתמטיות לפשט את הביטוי וללמוד מכך על n.

תחילה נוציא A כגורם משותף:

$$n = A^3 + 6A^2 + 8A = A(\ A^2 + 6A + 8)$$

עתה, ניתן לפרק את הסוגריים באמצעות טרינום:

$$n = A(\ A^2 + 6A + 8) = A(A + 2)(A + 4)$$

מפני ש-A הוא מספר זוגי, קיבלנו ש-n שווה למכפלה של שלושה מספרים זוגיים עוקבים. במספרים זוגיים עוקבים אחד המספרים מתחלק ב-2, הבא מתחלק ב-4, הבא אחריו שוב מתחלק ב-2 וכן הלאה (ניתן לראות דוגמה לכך בשלשה 2, 4, 6 או בכל קבוצת זוגיים עוקבים אחרת). על כן, בביטוי שקיבלנו, לכל הפחות שניים מהעוקבים מתחלקים ב-2 והעוקב הנוסף מתחלק ב-4.

דהיינו הביטוי בכללותו מכיל לפחות 4 פעמים את הגורם הראשוני 2 (פעם אחת בכל אחד משני העוקבים שמתחלקים ב-2 ועוד פעמיים בעוקב שמתחלק ב-4).

נוסף על כך, מדובר <u>בשלושה</u> מספרים זוגיים עוקבים, לכן אחד מהם מכיל בוודאות את הגורם 3.

לסיכום, מצאנו ש-n מכיל לפחות ארבע פעמים את הגורם 2 ולפחות פעם אחת את הגורם 3. כלומר n מכיל בתוכו $2^4 \cdot 3$ $\Leftarrow$ 48. לכן n בהכרח מתחלק ב-48.

ניתן גם להסתכל על זה כחוק- מכפלה של n אברים **זוגיים** עוקבים, מתחלקת ב-$2^n \cdot n!$.

---

9. תשובה (2) נכונה. שאלה 8 מתוך 20 בפרק.

דרך א׳ – הצבת תשובות – ניסוי וטעייה
ליאיר יש 100 קופסאות שבכל אחת מהן סוכרייה. תחילה הוא אוכל את הסוכרייה שבקופסה 1, לאחר מכן הוא אוכל את הסוכריות שנמצאות בקופסאות שמספרן מתחלק ב-2, אחר כך את הסוכריות שבקופסאות שמספרן מתחלק ב-3 וכן הלאה.

עלינו לקבוע באיזו קופסה תישאר הסוכרייה האחרונה.

כאמור, הסוכרייה הראשונה שהוא אוכל נמצאת בקופסה מס׳ 1.

בסבב הבא הוא אוכל את הסוכריות שנמצאות בקופסאות שמספרן מתחלק ב-2. לכן, כל תשובה המייצגת מספר קופסה זוגי נפסלת. קופסה מספר 100 היא זוגית ⇐ תשובה (1) נפסלת.

לאחר מכן הוא יאכל את הקופסות שמספרן מתחלק ב-3. נפסול כל תשובה שמתחלקת ב-3.
51 מתחלק ב-3 ⇐ תשובה (4) נפסלת.

ניתן לדלג על הסבב של הסוכריות המתחלקות ב-4 משום שכל מה שמתחלק ב-4 מתחלק גם ב-2 ולכן כבר נאכל בסבב השני. לכן, בסבב הבא הוא יאכל את כל הסוכריות שנמצאות בקופסאות שמספרן מתחלק ב-5. 55 מתחלק ב-5 ⇐ תשובה (3) נפסלת.

פסלנו 3 תשובות ועל כן תשובה (2) נכונה.

דרך ב׳ – הבנה
יאיר אוכל את הסוכריות לפי המספר בו הן מתחלקות. לכן נבין שהסוכרייה האחרונה אותה הוא יאכל נמצאת בקופסה שמספרה מתחלק במספר האפשרי הגדול ביותר עד 100. כלומר, מספר הקופסה צריך להיות המספר הראשוני הדו-ספרתי הקרוב ביותר ל-100. אחרת, יאיר היה אוכל את הסוכרייה בקופסה הזו באחת החלוקות הקטנות שלה. אנו מכירים את 97 כמספר הראשוני הדו-ספרתי הגדול ביותר, ומכאן שקופסה מספר 97 תהיה הקופסה האחרונה שיאיר יאכל את הסוכרייה שבה.

10. תשובה (3) נכונה. שאלה 8 מתוך 20 בפרק.

לשלוש הבנות יש מספר זהה של קוביות. אנו נדרשים לקבוע, על בסיס הנתונים בשאלה, איזה מספר מהמספרים שבתשובות עשוי להיות מספר הקוביות של כל אחת מהן.

הדס בנתה מהקוביות שלה 5 מגדלים בגובה שווה. לפיכך, מספר הקוביות שברשותה מתחלק ב-5.

נבדוק את התשובות ונפסול כל תשובה שאינה מתחלקת ב-5.

<u>נבדוק את תשובה (1) :</u> 10 מתחלק ב-5 ⇐ **מתאים**

<u>נבדוק את תשובה (2) :</u> 13 מתחלק ב-5 עם שארית 3 ⇐ לא מתאים, התשובה נפסלת

<u>נבדוק את תשובה (3) :</u> 15 מתחלק ב-5 ⇐ **מתאים**

<u>נבדוק את תשובה (4) :</u> 25 מתחלק ב-5 ⇐ **מתאים**

עוד נתון כי בתיה בנתה מהקוביות שלה 2 מגדלים שאחד מהם גבוה מהשני בקובייה אחת. מכאן אנו למדים שמספר הקוביות שברשותה מתחלק ב-2 עם שארית 1, קרי אי-זוגי.

נבדוק את התשובות שנותרו ונפסול כל תשובה זוגית.

<u>נבדוק את תשובה (1) :</u> 10 הוא מספר זוגי ⇐ לא מתאים, התשובה נפסלת

<u>נבדוק את תשובה (3) :</u> 15 הוא מספר אי-זוגי ⇐ **מתאים**

<u>נבדוק את תשובה (4) :</u> 25 הוא מספר אי-זוגי ⇐ **מתאים**

בנוגע לגילי, ידוע כי היא בנתה 3 מגדלים בגבהים שונים, כאשר הגבוה מביניהם מורכב מ-7 קוביות.
נבדוק את מספר הקוביות המקסימאלי שעשוי להיות ברשותה. אם הבניין הגבוה ביותר שלה מורכב מ-7 קוביות, וכל בניין בגובה שונה, אז הבניין הבא יכול להיות מורכב מ-6 קוביות לכל היותר, והבא אחריו מ-5 קוביות.
במקרה זה – המקרה המקסימאלי – לגילי ישנן 18 קוביות (5 + 6 + 7). על כן נפסול כל תשובה הגדולה מ-18.
תשובה (4) נפסלת.

פסלנו 3 תשובות ועל כן תשובה (3) נכונה.

11. תשובה (1) נכונה. שאלה 10 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הצבת תשובות

n הוא מספר שלם דו-ספרתי. $(n^2 - n)$ מתחלק ב-10.

אנו נשאלים מה יכולה להיות ספרת האחדות של n. אנו יודעים שספרת אחדות של מכפלה מושפעת אך ורק מהכפלת ספרות האחדות של כל אחד מהכופלים. לכן, אין צורך למעשה לכפול מספרים דו ספרתיים אלא עלינו להתייחס לספרת האחדות בלבד.

כמו כן, כדי שמספר יתחלק ב-10 ספרת האחדות שלו צריכה להיות 0. לכן, נציב את התשובות ונראה עבור איזו תשובה תוצאת ספרת האחדות של התרגיל $n^2 - n$, שווה ל-0.

<u>נבדוק את תשובה (1):</u>

אם ספרת האחדות של n היא 6, אז כאשר נעלה את n בריבוע תוצאת המכפלה עדיין תהיה 6:

$$n^2 = n \cdot n = ..6 \times ..6 = ..6$$

בשלב הבא עלינו לחסר 6 מהמכפלה:

$$..6 - 6 = ..0$$

קיבלנו שספרת האחדות של תוצאת התרגיל היא 0 ולכן המספר מתחלק ב-10. **תשובה נכונה.**

טיפ: מכיוון שהצבנו את התשובות, ברגע שמצאנו תשובה נכונה אין צורך להמשיך לבדוק את שאר התשובות, אך למען שלמות ההסבר נפסול אותן:

<u>נבדוק את תשובה (2):</u>

אם ספרת האחדות של n היא 2, אז כאשר נעלה את n בריבוע תוצאת המכפלה תהיה 4:

$$n^2 = n \cdot n = ..2 \times ..2 = ..4$$

בשלב הבא עלינו לחסר 2 מהמכפלה:

$$..4 - 2 = ..2$$

קיבלנו שספרת האחדות של תוצאת התרגיל שונה מ-0 ולכן המספר אינו מתחלק ב-10. התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (3):</u>

אם ספרת האחדות של n היא 3, אז כאשר נעלה את n בריבוע תוצאת המכפלה תהיה 9:

$$n^2 = n \cdot n = ..3 \times ..3 = ..9$$

בשלב הבא עלינו לחסר 3 מהמכפלה:

$$..9 - 3 = ..6$$

קיבלנו שספרת האחדות של תוצאת התרגיל שונה מ-0 ולכן המספר אינו מתחלק ב-10. התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (4):</u>

אם ספרת האחדות של n היא 4, אז כאשר נעלה את n בריבוע תוצאת המכפלה תהיה 6:

$$n^2 = n \cdot n = ..4 \times ..4 = ..6$$

בשלב הבא עלינו לחסר 4 מהמכפלה:

$$..6 - 4 = ..2$$

קיבלנו שספרת האחדות של תוצאת התרגיל שונה מ-0 ולכן המספר אינו מתחלק ב-10. התשובה נפסלת.

דרך ב' – הבנה

כאמור, כדי שמספר מסוים יתחלק ב-10 ספרת האחדות שלו צריכה להיות 0. על כן, עלינו למצוא ספרת אחדות שברגע שנעלה אותה בריבוע היא לא תשתנה, משום שבשלב הבא עלינו לחסר ממנה את אותה הספרה כדי שהתוצאה תתאפס.

ישנן 4 ספרות שכאשר כופלים אותן בעצמן הן נשארות בעלות אותו ערך: 0, 1, 5, 6. כול אחת מהספרות הללו הייתה יכולה להיות ספרת האחדות של n, אך בתשובות יש רק את הספרה 6 ולכן תשובה (1) היא התשובה הנכונה.

12. תשובה (3) נכונה. שאלה 10 מתוך 20 בפרק.

נתון כי $y = 17x + 7$, וכי y מתחלק ב-10. עלינו לקבוע איזו מהתשובות עשויה להיות x כך שתוצאת התרגיל תביא לזה ש-y יתחלק ב-10 ללא שארית.

כדי שמספר יתחלק ב-10 ספרת האחדות שלו צריכה להיות שווה ל-0. לכן, נציב את ספרות האחדות של התשובות ונבדוק איזו תשובה מביאה לכך שספרת האחדות של y היא 0.

(1) $x = 190 \Rightarrow 17 \cdot ..0 + 7 = ..0 + 7 = ..7 \Rightarrow$ לא מתאים, התשובה נפסלת

(2) $x = 227 \Rightarrow 17 \cdot ..7 + 7 = ..9 + 7 = ..6 \Rightarrow$ לא מתאים, התשובה נפסלת

(3) $x = 379 \Rightarrow 17 \cdot ..9 + 7 = ..3 + 7 = ..0 \Rightarrow$ **מתאים**

טיפ: מכיוון שהצבנו את התשובות, ברגע שמצאנו תשובה נכונה אין צורך להמשיך לבדוק את שאר התשובות, אך למען שלמות ההסבר נפסול את תשובה (4):

(4) $x = 294 \Rightarrow 17 \cdot ..4 + 7 = ..8 + 7 = ..5 \Rightarrow$ לא מתאים, התשובה נפסלת

---

13. תשובה (4) נכונה. שאלה 11 מתוך 20 בפרק.

כאשר אנו נשאלים על המספר הגדול ביותר **שהביטוי מתחלק בו בהכרח**, עלינו לבחור את **ה-n הקטן ביותר** שמתאים להגדרה. זאת משום שכאשר אנו מציבים את ה-n הקטן ביותר האפשרי, הביטוי מכיל את כל הגורמים הראשוניים שבוודאות קיימים בו, ורק אותם. לכן, התוצאה שתתקבל כאשר נציב את ה-n הקטן ביותר תהיה המספר הגדול ביותר שהביטוי מתחלק בו בהכרח.

נתון ש- n הוא מספר שלם וחיובי המתחלק ב-3 ללא שארית. המספר הקטן ביותר המתאים הוא $n = 3$. נציב ערך זה בביטוי:

$$n(n + 3) = 3(3 + 3) = 18$$

כאמור, תוצאה זו היא המספר הגדול ביותר שהביטוי מתחלק בו בהכרח. תשובה (4) נכונה.

---

14. תשובה (1) נכונה. שאלה 12 מתוך 20 בפרק.

לאב יש שלושה ילדים והוא רוצה לחלק ביניהם x סוכריות. אנו נשאלים מה עשוי להיות מספר הסוכריות שיש לאב.
ידוע שאם האב ייתן לכל אחד מילדיו מספר שווה של סוכריות, תישאר לאב סוכרייה אחת. כלומר, מספר הסוכריות של האב מתחלק ב-3 עם שארית 1.

נבדוק את התשובות ונפסול כל תשובה שאינה מתחלקת ב-3 עם שארית 1.

<u>נבדוק את תשובה (1):</u> 28 מתחלק ב-3 עם שארית 1 $\Leftarrow$ **מתאים**

<u>נבדוק את תשובה (2):</u> 20 מתחלק ב-3 עם שארית 2 $\Leftarrow$ לא מתאים, התשובה נפסלת

<u>נבדוק את תשובה (3):</u> 25 מתחלק ב-3 עם שארית 1 $\Leftarrow$ **מתאים**

<u>נבדוק את תשובה (4):</u> 12 מתחלק ב-3 ללא שארית $\Leftarrow$ לא מתאים, התשובה נפסלת

כדי להכריע בין תשובה (1) ל-(3) נבדוק את הנתון השני.
אם האב יחלק לבנו הבכור מספר כפול של סוכריות מכל אחד מאחיו אז לא יוותר לאב סוכריות כלל. דהיינו, אם כל אחד משני האחים הצעירים יקבל y סוכריות אז האח הבכור יקבל 2y סוכריות. במקרה זה לאב ישנן 4y סוכריות $(y + y + 2y)$. על כן, מספר הסוכריות צריך להתחלק ב-4 ללא שארית.

<u>נבדוק את תשובה (1):</u> 28 מתחלק ב-4 ללא שארית $\Leftarrow$ **מתאים**

<u>נבדוק את תשובה (3):</u> 25 מתחלק ב-4 עם שארית 1 $\Leftarrow$ לא מתאים, התשובה נפסלת

פסלנו 3 תשובות ועל כן תשובה (1) נכונה.

15. תשובה (4) נכונה. שאלה 13 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הצבת מספרים
נבחר להציב את המספר השלם החיובי הקטן ביותר 1 בפרמטר הקטן ביותר a. נחשב מה יהיה ערכם של יתר הנעלמים לפי הצבה זו:

$a = 1$
$b = 2a = 2 \cdot 1 = 2$
$c = 2b = 2 \cdot 2 = 4$
$d = 2 \cdot 4 = 8$

כעת, נחשב את הסכום של הביטוי הנתון:

$a + b + c + d = 1 + 2 + 4 + 8 = 15$

לפי ההצבה שעשינו, קיבלנו שערכו של הביטוי הוא 15. כעת, ניתן לפסול כל תשובה שבה 15 אינו מתחלק. 15 אינו מתחלק ב-7, ב-2 וב-12, ועל כן תשובות אלו נפסלות. פסלנו 3 תשובות, ועל כן תשובה (4) נכונה – 15 אכן מתחלק ב-15.

ניתן גם להבין שמשום שהצבנו 1, שזהו המספר הקטן ביותר האפשרי, אשר מכיל כמה שפחות גורמים בתוכו, נקבל בהצבה זו את המספר שבו הביטוי הנתון בהכרח יתחלק.

דרך ב' – פתרון מתמטי
בשאלה זו נבטא את כל האותיות על ידי אות אחת בלבד, וכך נדע באיזה מספר הביטוי בוודאות מתחלק.
עלינו להבין מי מהפרמטרים הוא הקטן ביותר. b שווה לשני a, c שווה לשני b, ו-d שווה לשני c. ניתן להסיק כי a הוא הפרמטר הקטן ביותר, ולכן נבטא את יתר האותיות באמצעותו.

$b = 2a$
$c = 2b = 2 \cdot 2a = 4a$
$d = 2c = 2 \cdot 4a = 8a$

אם כן, הסכום של הביטוי הוא:

$a + b + c + d = a + 2a + 4a + 8a = 15a$

נתון כי a הוא מספר שלם, ולכן הביטוי בהכרח מתחלק ב-15.

---

16. תשובה (1) נכונה. שאלה 17 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הצבת מספרים
לחברת מוניות יש טלפון ופקס שמספריהם מורכבים מ-7 ספרות. מספר הטלפון מורכב מ-7 ספרות זהות, ומספר הפקס הוא המספר העוקב למספר הטלפון. אנו נשאלים מה תהיה שארית החלוקה של מספר הפקס ב-7.

לצורך הנוחות, ניתן להציב שמספר הטלפון, אשר בנוי מ-7 ספרות זהות הוא – 1111111.
במקרה כזה, מספר הפקס, הוא המספר העוקב ל-1111111, כלומר הוא 1111112.

עתה נבדוק מה שארית חלוקת סכום הספרות של המספר 1111112 ב-7.

$$\frac{1+1+1+1+1+1+2}{7} = \frac{8}{7}$$

שארית החלוקה של 8 ב-7 היא 1.
אף אחת מהתשובות האחרות אינה מתאימה, ועל כן תשובה (1) נכונה.

דרך ב' – הבנה
מספר הטלפון בנוי מ-7 ספרות זהות, כלומר 7 כפול ספרת הטלפון. לכן, מספר הטלפון מתחלק ב-7 ללא שארית. נתון כי מספר הפקס הוא המספר העוקב למספר הטלפון, כלומר הוא גדול ממנו ב-1. מכיוון שהגדלנו את מספר הטלפון ב-1, למעשה הוספנו 1 לסכום הספרות שלו. לכן, כאשר נחלק את סכום ספרות מספר הפקס ב-7 תישאר שארית 1.

---

17. תשובה (4) נכונה. שאלה 18 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הצבת מספרים

ידוע לנו ש-a הוא מספר שלם המתחלק ב-4 עם שארית 2. אנו יכולים להציב מספר נוח אשר עומד בתנאים אלה. נחפש כל מספר המתחלק ב-4 ונוסיף לו 2.

נציב: $a = 2 \;\Rightarrow\; a + 3 = 2 + 3 = 5$

שארית החלוקה של 5 ב-3 היא 2. בשלב זה ניתן לפסול את תשובות (1) ו-(3).

על מנת להכריע בין תשובות (2) ו-(4) נציב מספר נוסף המתחלק ב-4 עם שארית 2:

נציב: $a = 6 \;\Rightarrow\; a + 3 = 6 + 3 = 9$

שארית החלוקה של 9 ב-3 היא 0. כעת ניתן לפסול את תשובה (2). בשתי הצבות קיבלנו תוצאות שונות ומכאן שלא ניתן לקבוע בוודאות מה תהיה השארית – תשובה (4) נכונה.

דרך ב – פתרון מתמטי

a הוא מספר שלם המתחלק ב-4 עם שארית 2. כלומר, הוא בנוי ממכפלה כלשהי של 4 אשר הוסיפו לה 2. נתאר זאת באמצעות הביטוי (x הוא מספר שלם כלשהו):

$$a = 4x + 2$$

עלינו למצוא מה שארית החלוקה של $a + 3$ ב-3. נציב את a כפי שביטאנו אותו לעיל:

$$\frac{a+3}{3} \;\Rightarrow\; \frac{4x+2+3}{3} = \frac{4x+5}{3}$$

נפשט את הביטוי כדי להבין מה השארית:

$$\frac{4x+5}{3} = \frac{4x}{3} + \frac{5}{3}$$

ידוע לנו שהשארית המתקבלת מחלוקת 5 ב-3 היא 2, אולם שארית החלוקה של 4x ב-3 אינה ידועה מאחר ש-x יכול להיות כל מספר שלם. לפיכך, לא ניתן לדעת מה שארית החלוקה של הביטוי $a + 3$ ב-3.

---

18. תשובה (1) נכונה. שאלה 19 מתוך 20 בפרק.

אנו נשאלים כמה מספרים זוגיים מתחלקים ב-5 עם שארית 2 בין 0 ל-100.

תחילה נבין אילו מספרים מתחלקים ב-5 עם שארית 2. אנו יודעים שכדי שמספר יתחלק ב-5 ספרת האחדות שלו צריכה להיות 5 או 0. לכן, כדי שלמספר תהיה שארית 2 בחלוקה ב-5, עלינו להוסיף 2 לספרת האחדות שלו. נקבל שכדי שמספר יתחלק ב-5 עם שארית 2, ספרת האחדות שלו צריכה להיות 7 או 2.

בשאלה התבקשנו למצוא רק את המספרים הזוגיים, ועל כן ספרת האחדות 7 איננה מתאימה. קיבלנו שהמספרים שמתחלקים ב-5 עם שארית 2 והם **זוגיים** הם כל המספרים שספרת האחדות שלהם היא 2.

השלב האחרון שנותר לנו הוא לבדוק כמה מספרים בין 0 ל-100 הם בעלי ספרת אחדות 2:

2, 12, 22, 32, 42, 52, 62, 72, 82, 92 $\Leftarrow$ 10 מספרים זוגיים המתחלקים ב-5 עם שארית 2.

.19 תשובה (4) נכונה. שאלה 20 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הצבת מספרים

כאשר אנו מתבקשים למצוא את המחלק הוודאי הגדול ביותר, נציב תמיד את המספר הטבעי הקטן ביותר שמקיים את הנתונים ונקבל את התשובה הנכונה בהצבה אחת, במקרה זה $y = 4$. נציב בביטוי ונבודד את x :

$$4 = \frac{\sqrt{2}\cdot x}{3}$$
$$12 = \sqrt{2}\cdot x$$
$$\frac{12}{\sqrt{2}} = x$$
$$6\sqrt{2} = x$$

כעת נעלה את x בריבוע, ונבדוק במה יתחלק ללא שארית :

$$\left(6\sqrt{2}\right)^2 = 36\cdot 2 = 72$$

המחלק הוודאי הגדול ביותר של 72 הוא 72, תשובה (4) נכונה. עבור כל x גדול יותר שנציב נקבל כפולה של 72 (מכיל את אותו מספר גורמים ראשוניים לפחות) ולכן תשובה זו נכונה תמיד.

דרך ב' – פתרון מתמטי

y מספר טבעי המתחלק ב-4, ולכן נסמן אותו כ-4n (כאשר n הוא מספר שלם). נחלץ את x מהביטוי המקורי :

$$4n = \frac{\sqrt{2}\cdot x}{3}$$
$$12n = \sqrt{2}\cdot x$$
$$\frac{12n}{\sqrt{2}} = x$$
$$6\sqrt{2}\cdot n = x$$

נעלה את x בריבוע ונקבל :

$x^2 = \left(6\sqrt{2}\cdot n\right)^2 = 36\cdot 2\cdot n^2 = 72\cdot n^2$ ← ולכן הוא מתחלק ב-72 בוודאות.

.20 תשובה (1) נכונה. שאלה 20 מתוך 20 בפרק.

x, y ו-z הם מספרים שלמים שסכומם מתחלק ב-3 ללא שארית. עלינו לבדוק איזו טענה בהכרח **אינה** נכונה.

<u>נבדוק את תשובה (1)</u> : לא יכול להיות שהסכום (x + y) מתחלק ב-3 עם שארית 1 ו-z מתחלק ב-3 ללא שארית – סכום השאריות במקרה הזה הוא 1, ועל כן סכום שלושת הנעלמים לא יתחלק ב-3. אם הסכום (x + y) מתחלק ב-3 עם שארית 1, אז z צריך להתחלק ב-3 עם שארית 2 – רק כך ניתן יהיה להגיע לסכום שאריות שיתחלק ב-3, וכך סכום שלושת הנעלמים יתחלק ב-3 ללא שארית (למשל, x + y = 4, z = 5). מכאן שטענה זו בהכרח אינה נכונה, ועל כן זו התשובה הנכונה.

טיפ : ברגע שנמצאה תשובה נכונה אין צורך להמשיך לבדוק את שאר התשובות, אך למען שלמות ההסבר נפסול אותן :

<u>נבדוק את תשובה (2)</u> : אם כל אחד מהם מתחלק ב-3 עם שארית 2, אז סכום השאריות שלהם יהיה 6. סכום השאריות מתחלק ב-3 ולכן הסכום של שלושתם יתחלק ב-3 ללא שארית (למשל, 5, 5, 5). המצב המתואר אפשרי ולכן התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (3)</u> : ייתכן ששלושתם אי-זוגיים (5, 5, 5). המצב המתואר אפשרי ולכן התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (4)</u> : אם x מתחלק ב-3 עם שארית 1, ו-(y + z) מתחלק ב-3 עם שארית 2, סכום השאריות הוא 3. סכום השאריות מתחלק ב-3 ולכן הסכום של שלושתם יתחלק ב-3 ללא שארית (למשל, y + z = 2, x = 1). המצב המתואר אפשרי ולכן התשובה נפסלת.

מספרים שלמים

חיובי/שלילי

חוקים - כפל

כאשר כופלים שני מספרים בעלי אותו סימן, התוצאה תמיד חיובית:

$$(+)\cdot(+) = (-)\cdot(-) = (+)$$

כאשר כופלים שני מספרים בעלי סימן שונה, התוצאה תמיד שלילית:

$$(+)\cdot(-) = (-)$$

שימו לב! סימן ה- (+) אינו משפיע על סימן התוצאה!
אם הסימן (–) מופיע מספר אי-זוגי של פעמים, התוצאה תהיה שלילית.
אם הסימן (–) מופיע מספר זוגי של פעמים, התוצאה תהיה חיובית.

חוקים - חילוק

כאשר מחלקים שני מספרים בעלי אותו סימן, התוצאה תמיד חיובית:

$$\frac{(+)}{(+)} = \frac{(-)}{(-)} = (+)$$

כאשר כופלים שני מספרים בעלי סימן שונה, התוצאה תמיד שלילית:

$$\frac{(-)}{(+)} = \frac{(+)}{(-)} = (-)$$

דוגמה:

נתון: $\frac{a^4 \cdot b^3}{|b|} < 0$; $b \neq 0$

מה נכון בהכרח?

(1) $a < 0 \ , \ b < 0$ (2) $0 < a \ , \ 0 < b$

(3) $b < 0$ (4) $0 < b$

פתרון -

$|b|$ חיובי תמיד. a^4 חיובי תמיד. על מנת שהביטוי יהיה קטן מאפס, המונה והמכנה צריכים להיות שוני סימן, ולכן b^3 צריך להיות שלילי ← $b < 0$. תשובה (3) נכונה.

מספרים עוקבים

מספרים עוקבים - מספרים שלמים שההפרש ביניהם הוא 1.

לדוגמה: 4 , 3 , 2 , 1 , 0 , 1- , 2-

הצגה אלגברית של עוקבים

אם A ו-B הם מספרים שלמים עוקבים כך ש- $A < B$, אז ניתן לבטא כל אחד מהם באמצעות המספר השני:

$B = A + 1$ **או** $A = B - 1$

חלק מהשאלות בבחינה ניתנות לפתרון באמצעות הצגה אלגברית של עוקבים (ביטוי מספר אחד על ידי מספר אחר).

דוגמה:

נתון: a, b ו-c הם מספרים שלמים ועוקבים, כך ש- $0 < a < b < c$.

$$\frac{c^2 - a^2}{b} = ?$$

(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4

פתרון -

נציב: $c = b + 1$, $a = b - 1$

$$\frac{c^2 - a^2}{b} =$$
$$\frac{(b+1)^2 - (b-1)^2}{b} =$$
$$\frac{b^2 + 2b + 1 - (b^2 - 2b + 1)}{b} =$$
$$\frac{b^2 + 2b + 1 - b^2 + 2b - 1}{b} = \frac{4b}{b} = 4$$

הצבת מספרים

ברוב השאלות העוסקות במספרים עוקבים דרך הפתרון המומלצת והמהירה ביותר היא להציב מספרים (בדרך כלל מומלץ להציב סדרת מספרים קטנה - 0,1,2 ; 1,2,3 ; 2,3,4.

דוגמה:

נתון: a, b ו-c הם מספרים שלמים ועוקבים, כך ש- $0 < a < b < c$.

$$\frac{c-a}{b-a} - \frac{a-b}{c-b} = ?$$

(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4

פתרון -

נציב את המספרים 1,2,3:

$$\frac{c-a}{b-a} - \frac{a-b}{c-b} = \frac{3-1}{2-1} - \frac{1-2}{3-2} = \frac{2}{1} - \frac{-1}{1} = 2 + 1 = 3$$

הבנת הפרשים

חלק מהשאלות בנושא עוקבים ניתנות לפתרון מהיר באמצעות ההבנה של ההפרשים בין מספרים עוקבים. הדרך לזהות שאלות אלו היא שבביטויים המפורטים בשאלה יש חיסור בין המספרים העוקבים. כאשר יש חיסור של מספרים עוקבים מדובר בעצם בהפרש ביניהם, והפרש זה בדרך כלל ידוע.

נפתור את השאלה הקודמת באמצעות הבנת הפרשים:

ההפרש בין a ל-b ובין b ל-c הוא 1, וההפרש בין a ל-c הוא 2. נציב את ההפרשים בביטוי, תוך שימת לב האם ההפרש חיובי או שלילי:

$$\frac{c-a}{b-a} - \frac{a-b}{c-b} = \frac{2}{1} - \frac{-1}{1} = 2 + 1 = 3$$

זוגיות

מספר זוגי - מספר שלם, המתחלק ב-2 ללא שארית. לדוגמה: 0 , 4 , 10 , 36 , 28-
מספר אי-זוגי - מספר שלם, המתחלק ב-2 עם שארית 1. לדוגמה: 1 , 3 , 7 , 21 , 35-
אפס הוא זוגי - כשמחלקים את אפס ל-2 התוצאה היא אפס ואין שארית (ולכן הוא זוגי).

כללים - חיבור/חיסור

זוגי ± זוגי = זוגי
א״ז ± א״ז = זוגי
זוגי ± א״ז = א״ז

שימו לב! בחיבור וחיסור, מספר זוגי אינו משפיע על זוגיות הביטוי!
אם המספר הא״ז מופיע מספר אי-זוגי של פעמים, התוצאה תהיה א״ז.
אם המספר הא״ז מופיע מספר זוגי של פעמים, התוצאה תהיה זוגית.

כללים - כפל

זוגי · זוגי = זוגי
זוגי · א״ז = זוגי
א״ז · א״ז = א״ז

אם במכפלה כלשהי יש גורם זוגי אחד לפחות, הוא הופך את כל המכפלה לזוגית.

כללים - חילוק

$\frac{\text{א"ז}}{\text{זוגי}} =$ תמיד שבר

בכל יתר המצבים בחילוק נבחן כל מקרה לגופו.

חזקה לא משפיעה על זוגיות הביטוי - מותר למחוק חזקות!

מספר זוגי בכל חזקה תמיד ישאר זוגי, ומספר אי-זוגי בכל חזקה תמיד ישאר אי-זוגי, ולכן ניתן להתעלם מהחזקות ולמחוק אותן בכל אחד ממרכיבי הביטוי (רק בביטוי שאין בו שברים).

דוגמה:
ידוע כי הביטוי $(x + y)$ הוא אי-זוגי.
איזו מהתשובות תבטיח כי הביטוי $4y + x^y + y^x + 5$ תמיד יהיה אי-זוגי?

(1) $x = y$
(2) x זוגי ו-y אי-זוגי
(3) y זוגי ו-x אי-זוגי
(4) אף תשובה אינה נכונה

פתרון -
לפני שנתחיל להציב את התשובות, כדאי לפשט מעט את הביטוי. נמחק את החזקות ונבדוק את הביטוי:

$$4y + x^y + y^x + 5 \quad \Longrightarrow \quad \underbrace{4y}_{\text{זוגי}} + \underbrace{x + y}_{\text{א"ז}} + 5$$

נתון כי הביטוי $(x + y)$ הוא אי-זוגי, והביטוי $4y$ חייב להיות זוגי, ולכן, כאשר נוסיף 5, הביטוי כולו יהיה זוגי. תשובה (4) נכונה.

דוגמה:

נתון כי x הוא מספר זוגי וכי y הוא מספר אי-זוגי.

הביטוי $\frac{2y}{x^2}$ יהיה תמיד:

(1) זוגי או שבר
(2) אי-זוגי או שבר
(3) שבר
(4) אי-זוגי, זוגי או שבר

פתרון -

הביטוי 2y הוא זוגי, והמכנה זוגי גם כן (זוגי בריבוע = זוגי).
לפי כללי החילוק של זוגי חלקי זוגי, התשובה הנכונה אמורה להיות תשובה (4) אך אין זה כך. על מנת לפשט את הביטוי, עלינו לצמצם אותו תחילה. נתון כי x הוא זוגי, ולכן ניתן להציג אותו כ-2 כפול שלם (נסמן את המספר השלם ב- k):

$x = 2k$

$$\frac{2y}{x^2} = \frac{2y}{(2k)^2} = \frac{2y}{4k^2} = \frac{y}{2k^2} = \frac{\text{א"ז}}{\text{זוגי}} \quad \Longrightarrow \quad \text{תמיד שבר}$$

פתרון בהצבה

ניתן לפתור את כל השאלות בנושא זוגי/אי-זוגי בדרך של הצבה. דרך זו בדרך כלל מהירה ונוחה יותר. במקום מספר זוגי נציב 0 או 2, ובמקום מספר אי-זוגי נציב 1 או 3.
בכל השאלות מספיקה <u>הצבה אחת</u> בלבד, למעט בתרגילי חילוק. כאשר נתון לנו ביטוי שהוא שבר, נציב מספרים ונפסול תשובות, ואם לא הצלחנו לפסול 3 תשובות נציב <u>3 הצבות</u> שונות ונמשיך בהתאם לתוצאות ההצבות שלנו.

דוגמה:

נפתור את השאלה הקודמת באמצעות הצבת מספרים:

נציב: $y = 1$, $x = 2$:

$$\frac{2y}{x^2} = \frac{2\cdot 1}{2^2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad \text{שבר}$$

נציב: $y = 3$, $x = 2$:

$$\frac{2y}{x^2} = \frac{2\cdot 3}{2^2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \quad \Longrightarrow \quad \text{שבר}$$

נציב: $y = 3$, $x = 4$:

$$\frac{2y}{x^2} = \frac{2\cdot 3}{4^2} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8} \quad \Longrightarrow \quad \text{שבר}$$

שלוש פעמים קיבלנו שבר ← תשובה (3) נכונה.

דוגמה:

נתון: $x - y = 2$

מהבאים בוודאות יהיה זוגי?

(1) $2x - y$
(2) $x^2 + y^2 + 3x$
(3) $3x^2 + 2y$
(4) $x^2 - y^2$

פתרון -

נציב: $x = 3$, $y = 1$

על פי ההצבה ניתן לראות כי רק תשובה (4) נכונה. אם ההצבה שבחרנו היתה לא היתה פוסלת 3 תשובות, היינו מציבים שני מספרים זוגיים (בניגוד להצבה הראשונה בה הצבנו שני מספרים אי-זוגיים).

מכפלות מיוחדות

ישנם חוקי חלוקה לגבי מכפלות מיוחדות (מכפלות של מספרים עוקבים, של מספרים זוגיים וכדומה). בפועל, אין צורך לזכור בעל-פה את כל המכפלות. הדרך הפשוטה ביותר לדעת במה תתחלק התוצאה של מכפלות אלו היא פשוט להציב את המספרים הקטנים ביותר שניתן, ולבדוק.

מכפלה של 2 מספרים עוקבים תמיד תתחלק ב-2

כאשר כופלים שני מספרים עוקבים, אחד מהם תמיד יהיה זוגי והשני יהיה אי-זוגי, ולכן המכפלה שלהם תמיד תהיה זוגית:

זוגי $\Leftarrow$ זוגי · א"ז / א"ז · זוגי $\Leftarrow$ $x\cdot(x+1)$

$1\cdot 2=2$

מכפלה של 3 מספרים עוקבים תתחלק תמיד ב-6

כאשר כופלים שלושה מספרים עוקבים, אחד מהם תמיד יהיה זוגי ואחד מהם תמיד יתחלק ב-3, ולכן המכפלה שלהם תמיד תתחלק ב-6:

$1\cdot 2\cdot 3=6$

מכפלה של 4 מספרים עוקבים תתחלק תמיד ב-24

כאשר כופלים ארבעה מספרים עוקבים, אחד מהם תמיד יהיה זוגי, אחד מהם תמיד יתחלק ב-3, ואחד מהם תמיד יתחלק ב-4, ולכן המכפלה שלהם תמיד תתחלק ב-24:

$1\cdot 2\cdot 3\cdot 4=24$

מכפלה של שני מספרים זוגיים תתחלק תמיד ב-4

בכל מספר זוגי קיים הגורם 2, ולכן כשנכפול 2 מספרים זוגיים, המכפלה תתחלק ב-4:

$2k\cdot 2k=4k^2$

$2\cdot 2=4$

מכפלה של 3 מספרים זוגיים תתחלק תמיד ב-8

$2k\cdot 2k\cdot 2k=8k^3$

$2\cdot 2\cdot 2=8$

מכפלה של 4 מספרים זוגיים תתחלק תמיד ב-16

$2k\cdot 2k\cdot 2k\cdot 2k=16k^4$

$2\cdot 2\cdot 2\cdot 2=16$

מכפלה של שני מספרים זוגיים עוקבים תתחלק תמיד ב-8

כאשר כופלים שני זוגיים עוקבים, אחד מהם תמיד יתחלק ב-2 והשני תמיד יתחלק ב-4, ולכן המכפלה שלהם תמיד תתחלק ב-8:

$2k\cdot 4k=8k^2$

$2\cdot 4=8$

מכפלה של 3 מספרים זוגיים עוקבים תתחלק תמיד ב-48

$2k\cdot 4k\cdot 6k=48k^2$

$2\cdot 4\cdot 6=48$

דוגמה:

נתון כי x הוא מספר אי-זוגי.

הביטוי $\frac{x^2-1}{4}$ יהיה תמיד:

(1) זוגי או שבר (2) אי-זוגי או שבר

(3) תמיד זוגי (4) אי-זוגי, זוגי או שבר

פתרון -

לפי כללי החילוק של הזוגיות, תוצאת החלוקה של זוגי חלקי זוגי יכולה להיות זוגי, א״ז או שבר, ונראה כי תשובה (4) היא הנכונה, אך אם נציב מספרים נראה כי תמיד נקבל תוצאה זוגית.

נפתור באופן מתמטי (k מספר שלם):

$$\frac{x^2-1}{4}=\frac{\overbrace{(x-1)}^{\text{זוגי}}\cdot\overbrace{(x+1)}^{\text{זוגי עוקב}}}{4}=\frac{2k\cdot 4k}{4}=\frac{8k^2}{4}=2k^2$$

לאחר צמצום, קיבלנו שהתוצאה של הביטוי היא $2k^2$, זאת אומרת שהתוצאה תמיד תהיה זוגית. תשובה (3) נכונה.

שימו לב! לפני שאנו בודקים את זוגיות הביטוי בהתאם לכללים, עלינו לצמצם ככל שניתן.

פתרון בהצבה

כרגיל, גם שאלות מסוג זה ניתנות לפתרון בעזרת הצבה.

דוגמה:

הביטוי $\frac{x^3-x}{2}$ תמיד:

(1) זוגי (2) מתחלק ב-3

(3) אי-זוגי (4) שבר

פתרון -

אנו לא יודעים אם x הוא זוגי או אי-זוגי, ולכן נציב מספרים שונים (גם זוגי וגם אי-זוגי):

נציב $x=1$: $\frac{x^3-x}{2} \Rightarrow \frac{1^3-1}{2}=\frac{0}{2}=0$

נציב $x=2$: $\frac{x^3-x}{2} \Rightarrow \frac{2^3-2}{2}=\frac{8-2}{2}=\frac{6}{2}=3$

נציב $x=3$: $\frac{x^3-x}{2} \Rightarrow \frac{3^3-3}{2}=\frac{27-3}{2}=\frac{24}{2}=12$

מצאנו כי התוצאה של הביטוי תמיד מתחלקת ב-3. תשובה (2) נכונה.

תרגול שאלות מבחינות אמת

1. x ו-y הם מספרים שלמים.
נתון: $x - y = 2$

איזה מהביטויים הבאים **אינו** זוגי?

(1) $x + y$
(2) $x^2 - y^2$
(3) $x^2 + y^2$
(4) כל הביטויים הנ"ל הם זוגיים

---

2. בכיתה ב' יש לכל ילד 2 מחברות ובכיתה ג' יש לכל ילד 3 מחברות.
מספר הילדים בכיתה ג' הוא אי-זוגי.

סך כל המחברות של הילדים בכיתות ב' ו-ג' הוא בהכרח מספר -

(1) אי-זוגי
(2) זוגי
(3) המתחלק ב-3
(4) המתחלק ב-5

---

3. a ו-b הם שני מספרים אי-זוגיים.

איזה מהביטויים הבאים **אינו** יכול להיות מספר שלם?

(1) $\frac{a+b}{3}$

(2) $\frac{a+b}{2}$

(3) $\frac{a \cdot b}{3}$

(4) $\frac{a \cdot b}{2}$

---

4. נתון: $x^3 \cdot y^2 < 0$

איזו מהטענות הבאות נכונה בהכרח?

(1) $y < 0$ (2) $x < 0$ (3) $0 < x$ (4) $0 < y$

פתרתי ____________ שאלות ב ____________ דקות, ____________ תשובות נכונות

.5 a, b ו-c הם מספרים שלמים, חיוביים **ועוקבים**, $a < b < c$.
נתון: $c^2 - a^2 = 36$

$b = ?$

(1) 6
(2) 9
(3) 12
(4) 18

.6 a, b ו-c הם מספרים שלמים עוקבים, $0 < a < b < c$.
מכפלת שלושת המספרים גדולה פי 5 מסכומם.

$b = ?$

(1) 10 (2) 2 (3) 7 (4) 4

.7 המספר $(10^9 + 9^{10})$ ________.

(1) הוא אי-זוגי
(2) הוא זוגי
(3) מתחלק ב-9
(4) מתחלק ב-10

.8 נתונים שני מספרים שלמים וחיוביים a ו-b, $b < a$
נתון: $a^2 b$ הוא מספר זוגי
$(a+b)$ הוא מספר אי-זוגי

איזו מהטענות הבאות **אינה** נכונה?

(1) $b(a^2+a)$ הוא מספר זוגי
(2) $(a+b-1)$ הוא מספר זוגי
(3) ab^2 הוא מספר אי-זוגי
(4) $(a-b)$ הוא מספר אי-זוגי

.9 a ו-b הם מספרים ראשוניים, $a \le b$.
איזה מן הביטויים הבאים הוא בהכרח זוגי?

(1) $a \cdot b$
(2) $a \cdot (b+1)$
(3) $(a+1) \cdot b$
(4) $a + b$

פתרתי ____________ שאלות ב ____________ דקות, ____________ תשובות נכונות

10. a ו-b הם מספרים שלמים, חיוביים ועוקבים, $a < b$.
נתון: $a^2 - b^2 = -3$

$a + b = ?$

(1) 9
(2) 7
(3) 3
(4) 5

---

11. n הוא מספר זוגי.
איזה מהמספרים הבאים יכול להיות ערכו של $\frac{n^3}{2}$?

(1) 70
(2) 86
(3) 94
(4) 108

---

12. a, b ו-c הם מספרים שלמים ועוקבים, $a < b < c$.
נתון: $a^2 + c^2 = 4b$

$a + b + c = ?$

(1) 6 (2) 5 (3) 3 (4) 4

---

13. נתון: $a < b < c < 0$
איזה מהביטויים הבאים הוא **חיובי**?

(1) $\frac{a \cdot b}{c}$
(2) $\frac{a + b}{-c}$
(3) $(-a) \cdot (-b) \cdot c$
(4) $a \cdot (b + c)$

פתרתי ____________ שאלות ב ____________ דקות, ____________ תשובות נכונות

14. k ו-m הם מספרים שלמים.

נתון: $2m + 1 = k\cdot(2k + 1)$

k בהכרח -

(1) מספר אי-זוגי
(2) מספר זוגי
(3) מתחלק ב-3 ללא שארית
(4) אינו מתחלק ב-3 ללא שארית

---

15. a ו-b הם מספרים שלמים ועוקבים.

נתון: $x = a^2 - b^2 + a - b$

איזו מהטענות הבאות נכונה **בהכרח**?

(1) x הוא מספר זוגי
(2) x הוא מספר אי-זוגי
(3) x הוא מספר שלילי
(4) x הוא מספר חיובי

---

16. נתון: a ו-b הם מספרים שלמים.

$(a + 1)(2b + a)$ הוא **בהכרח** -

(1) חיובי
(2) זוגי
(3) שונה מ-0
(4) מתחלק ב-a

---

17. n הוא מספר שלם גדול מ-1.

לפחות מחצית מן המספרים בין 1 ל-n (כולל 1 ו-n) הם ______.

(1) אי-זוגיים
(2) זוגיים
(3) ראשוניים
(4) אינם ראשוניים

פתרתי ____________ שאלות ב ____________ דקות, ____________ תשובות נכונות

18. a ו-b הם מספרים שלמים וחיוביים.

נתון: $a \cdot b = 100$

איזו מהטענות הבאות נכונה **בהכרח**?

(1) $a \neq b$

(2) $(a+b) \leq 50$

(3) אם b אי-זוגי, אז a זוגי

(4) אם a זוגי, אז b אי-זוגי

---

19. נתון: $x < y$

$x \cdot y < z$

איזה מהאי-שוויונות הבאים **אינו** אפשרי לפי הנתונים?

(1) $0 < y$ ו- $0 < z$

(2) $0 < y$ ו- $z < 0$

(3) $y < 0$ ו- $0 < z$

(4) $y < 0$ ו- $z < 0$

---

20. נתון: x ו-y הם מספרים חיוביים.

x הוא מספר זוגי, y הוא מספר אי-זוגי.

איזה מהביטויים הבאים הוא בהכרח מספר **שלם**?

(1) $\frac{x(y-1)(y+1)}{16}$

(2) $\frac{x^2 y^2}{8}$

(3) $\frac{y(x-1)(x+1)}{5}$

(4) $\frac{(x+1)(y-1)}{4}$

פתרתי ________ שאלות ב ________ דקות, ________ תשובות נכונות

תשובות

שאלה	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
תשובה	4	1	4	2	2	4	1	3	2	3

שאלה	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
תשובה	4	3	4	1	1	2	1	3	4	1

פתרתי 20 שאלות - ______________ נכונות, ______________ אחוזי הצלחה

1. תשובה (4) נכונה. שאלה 1 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הצבת מספרים

נתון ש-x ו-y מספרים שלמים. בנוסף, נתון כי: $x - y = 2$.
עלינו למצוא איזו תשובה מבין התשובות המוצעות איננה זוגית.
נציב x ו-y המקיימים את הנתונים ונבדוק איזו תשובה היא אי-זוגית.

נציב למשל $x = 2$ ו-$y = 0$. הצבה זו מקיימת את הנתון ושני הערכים הם מספרים שלמים, לכן ההצבה תקינה.

נציב בתשובות $x = 2$ ו-$y = 0$, ונחפש איזו תשובה איננה זוגית.

(1) $x + y \;\Rightarrow\; 2 + 0 = 2 \;\Rightarrow$ לא מתאים, התשובה נפסלת

(2) $x^2 - y^2 \;\Rightarrow\; 2^2 - 0^2 = 4 - 0 = 4 \;\Rightarrow$ לא מתאים, התשובה נפסלת

(3) $x^2 + y^2 \;\Rightarrow\; 2^2 + 0^2 = 4 + 0 = 4 \;\Rightarrow$ לא מתאים, התשובה נפסלת

קיבלנו שכל התשובות זוגיות על סמך ההצבה ועל כן תשובה (4) נכונה.

דרך ב' – הבנה

נתון שההפרש בין x ל-y הוא זוגי (שווה ל-2). על כן, או ששני הנעלמים זוגיים או ששניהם אי-זוגיים.
נבדוק את התשובות ונראה עבור איזו תשובה אנחנו יכולים לקבוע שהיא איננה זוגית.

<u>נבדוק את תשובה (1):</u> אם ההפרש בין שני מספרים הוא זוגי, גם הסכום שלהם הוא זוגי. זאת מכיוון שכפי שהסברנו, אם ההפרש זוגי אזי או ששני הנעלמים זוגיים או ששניהם אי-זוגיים. בשני המקרים הללו סכום המספרים יהיה זוגי. (זוגי + זוגי = זוגי), וגם (אי-זוגי + אי-זוגי = זוגי). התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (2):</u> ידוע כי חזקה אינה משפיעה על זוגיות. לכן גם אם נעלה בריבוע את x ו-y הם ישמרו על הזוגיות/אי-זוגיות שלהם. לכן, אם ההפרש שלהם הוא זוגי, גם לאחר שנעלה כל אחד מהם בריבוע, ההפרש יישאר זוגי. התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (3):</u> ידוע כי חזקה אינה משפיעה על זוגיות. לכן גם אם נעלה בריבוע את x ו-y הם ישמרו על הזוגיות/אי-זוגיות שלהם. בנוסף, אם ההפרש בין שני מספרים הוא זוגי, גם הסכום שלהם הוא זוגי (להרחבה על עקרון זה ראה את בדיקת תשובה (1) בדרך זו). לכן, אם ההפרש שלהם הוא זוגי, גם לאחר שנעלה כל אחד מהם בריבוע, ההפרש יישאר זוגי וכך גם הסכום שלהם. התשובה נפסלת.

קיבלנו שכל התשובות זוגיות ועל כן תשובה (4) נכונה.

.2 תשובה (1) נכונה. שאלה 5 מתוך 20 בפרק.

דרך א׳ – הבנה

נתון שבכיתה ב׳ לכל ילד יש 2 מחברות, לא ידוע כמה ילדים יש בכיתה. כמו כן, נתון כי בכיתה ג׳ לכל ילד יש 3 מחברות ומספר הילדים בכיתה הוא אי-זוגי. עלינו לקבוע מה ניתן לומר בהכרח על סכום המחברות של כל ילדי כיתות ב׳ ו-ג׳.

טיפ: כשבתשובות מוצגות מספר תכונות אשר אחת מהן היא זוגיות – מומלץ להתחיל בבדיקתה, כיוון שבדרך כלל זו התשובה הנכונה.

בכיתה ב׳ לכל ילד 2 מחברות. על כן, סך כל המחברות בכיתה הוא: (מספר הילדים בכיתה ב׳) $\cdot$ 2. מאחר שבמכפלה יש מספר זוגי אחד לפחות, היא בהכרח תהיה זוגית.

בכיתה ג׳ לכל ילד 3 מחברות ומספר הילדים בכיתה הוא אי-זוגי. כלומר, סך כל המחברות של תלמידי כיתה זו הוא מכפלתם של שני מספרים אי-זוגיים. משמע, סך המחברות בכיתה הוא אי-זוגי.

כעת נחבר את מספר המחברות של ילדי כיתה ב׳ ושל ילדי כיתה ג׳. כאשר אנו סוכמים מספר זוגי ומספר אי-זוגי, התוצאה היא אי-זוגית (זוגי + אי-זוגי = אי-זוגי). לכן, סך כל המחברות הוא בהכרח מספר אי-זוגי. תשובה (1) נכונה.

דרך ב׳ – הצבת מספר נוח

נציב מספרים נוחים עבור מספר התלמידים בכל כיתה ונחשב את סך המחברות של הילדים בכיתות ב׳ ו-ג׳. מספר התלמידים בכיתה ג׳ הוא אי-זוגי; נציב שיש ילד אחד בכיתה ג׳. מספר התלמידים בכיתה ב׳ אינו ידוע; נציב שיש ילד אחד גם בכיתה ב׳.

בכיתה ב׳ לכל ילד יש 2 מחברות. יש ילד אחד בכיתה. בסך הכול 2 מחברות.

בכיתה ג׳ לכל ילד יש 3 מחברות. יש ילד אחד בכיתה. בסך הכול 3 מחברות.

בכיתה ב׳ ו-ג׳ ביחד יש 5 מחברות. נפסול תשובות שאינן מתאימות לתוצאה זו:

(1)	אי-זוגי	⇐	**מתאים.**
(2)	זוגי	⇐	לא מתאים, התשובה נפסלת.
(3)	מתחלק ב-3	⇐	לא מתאים, התשובה נפסלת.
(4)	מתחלק ב-5	⇐	**מתאים.**

כדי להכריע בין תשובות (1) ו-(4) נערוך הצבה נוספת. נציב שבכיתה ב׳ ילד אחד ובכיתה ג׳ 3 ילדים:

בכיתה ב׳ לכל ילד יש 2 מחברות. יש ילד אחד בכיתה. בסך הכול 2 מחברות (כפי שהיה בהצבה הקודמת).

בכיתה ג׳ לכל ילד יש 3 מחברות. יש 3 ילדים בכיתה. בסך הכול 9 מחברות.

בכיתה ב׳ ו-ג׳ ביחד יש 11 מחברות. נפסול תשובות שאינן מתאימות לתוצאה זו:

(1)	אי-זוגי	⇐	**מתאים.**
(4)	מתחלק ב-5	⇐	לא מתאים, התשובה נפסלת.

פסלנו 3 תשובות ועל כן תשובה (1) נכונה.

3. תשובה (4) נכונה. שאלה 5 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הצבת מספרים

ידוע ש-a ו-b הם מספרים אי-זוגיים. עלינו לקבוע איזה מהביטויים בתשובות אינו יכול להיות שלם. נציב מספרים אי-זוגיים במקום הנעלמים ונפסול כל תשובה שבה מתקבל מספר שלם.

נציב $a = 3$, $b = 3$

(1) $\frac{a+b}{3} = \frac{3+3}{3} = 2$ $\Rightarrow$ התשובה נפסלת.

(2) $\frac{a+b}{2} = \frac{3+3}{2} = 3$ $\Rightarrow$ התשובה נפסלת.

(3) $\frac{a \cdot b}{3} = \frac{3 \cdot 3}{3} = 3$ $\Rightarrow$ התשובה נפסלת.

טיפ: מאחר שפסלנו 3 תשובות, ניתן לסמן את הרביעית ללא בדיקתה.

דרך ב' – הבנה

בתשובות (1) ו-(2) הגורם במונה, שאותו מחלקים, הוא $a + b$, כלומר סכום של שני מספרים אי-זוגיים. סכום זה תמיד יהיה זוגי, ועל כן תשובה (2) נפסלת – כאשר מחלקים מספר זוגי ב-2 מתקבל תמיד מספר שלם. כמו כן, אין מניעה שסכום זה יתחלק ב-3 (לדוגמה $3 + 3 = 6$) ועל כן גם תשובה (1) אינה נכונה.

בתשובות (3) ו-(4) הגורם במונה, שאותו מחלקים, הוא $a \cdot b$, כלומר מכפלה של שני מספרים אי-זוגיים. מכפלה זו תמיד תהיה אי-זוגית, ועל כן תשובה (4) היא התשובה הנכונה – <u>כאשר מחלקים מספר אי-זוגי ב-2 התוצאה לעולם תהיה שבר</u> ועל כן הביטוי אינו יכול להיות מספר שלם. תשובה (3) אינה נכונה משום שאין מניעה שמכפלה זו תתחלק ב-3 – מספיק שאחד מהגורמים במכפלה יכיל את הגורם 3 והביטוי יהיה מספר שלם.

---

4. תשובה (2) נכונה. שאלה 6 מתוך 20 בפרק.

נתון כי $x^3 \cdot y^2 < 0$.

כאשר מכפלת שני איברים היא שלילית, אחד האיברים הוא חיובי והשני שלילי.

מכיוון ש-y^2 הוא איבר בחזקה זוגית, ערכו חיובי או שווה ל-0. במקרה זה אם y היה שווה ל-0, המכפלה $x^3 \cdot y^2$ הייתה מתאפסת והיא לא הייתה שלילית, על כן בוודאות y^2 הוא חיובי ולא 0.

מכאן, אנו מבינים ש-x^3 צריך להיות האיבר השלילי. לפיכך x עצמו צריך להיות שלילי (לא יתכן שמספר חיובי יעלה בחזקה אי-זוגית ויהפוך להיות שלילי) $\Leftarrow$ $x < 0$.

<u>שימו לב,</u> ניתן לפסול בקלות את תשובות (1) ו-(4). כאמור, y^2 הוא בוודאות איבר חיובי. אך, יתכן כי y הוא בעצמו חיובי והחזקה הזוגית לא משפיעה על סימנו, או ש-y הוא שלילי והחזקה הזוגית הופכת אותו לחיובי.

לכן איננו יכולים לקבוע מהו סימנו של y כאשר הוא עומד בפני עצמו רק מהנתון ש-y^2 הוא חיובי.

---

5. תשובה (2) נכונה. שאלה 6 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הצבת תשובות

נתון כי a, b ו-c מספרים עוקבים ($a < b < c$). נציב במקום b את התשובות, נמצא את ערכי a ו-c ונבדוק האם השוויון בנתון נשמר.

נציב את תשובה (1): אם $b = 6$, אזי $a = 5$, $c = 7$.

נציב בנתון במקום הנעלמים ונקבל:

$$7^2 - 5^2 \stackrel{?}{=} 36$$
$$49 - 25 \stackrel{?}{=} 36$$
$$24 \neq 36$$

פסוק שקר, **התשובה נפסלת.**

נציב את תשובה (2): אם $b = 9$, אזי $a = 8$, $c = 10$.

נציב בנתון במקום הנעלמים ונקבל:

$$10^2 - 8^2 \stackrel{?}{=} 36$$
$$100 - 64 \stackrel{?}{=} 36$$
$$36 = 36$$

פסוק אמת, **תשובה נכונה.**

טיפ: מכיוון שהצבנו את התשובות, ברגע שמצאנו תשובה נכונה אין צורך להמשיך לבדוק את שאר התשובות, אך למען שלמות ההסבר נפסול אותן:

פסילת תשובה (3): אם $b = 12$, אזי $a = 11$, $c = 13$.

נציב בנתון במקום הנעלמים ונקבל:

$$13^2 - 11^2 \stackrel{?}{=} 36$$
$$169 - 121 \stackrel{?}{=} 36$$
$$48 \neq 36$$

פסוק שקר, **התשובה נפסלת.**

פסילת תשובה (4): אם $b = 18$, אזי $a = 17$, $c = 19$.

נציב בנתון במקום הנעלמים ונקבל:

$$19^2 - 17^2 \stackrel{?}{=} 36$$
$$361 - 289 \stackrel{?}{=} 36$$
$$72 \neq 36$$

פסוק שקר, **התשובה נפסלת.**

דרך ב' – פתרון מתמטי

מכיוון שנתון כי a, b ו-c הם מספרים עוקבים ($a < b < c$) אנו יכולים להבין שכל מספר גדול ב-1 מהמספר ה"קודם" לו. לכן, נוכל לבטא את כל הנעלמים באמצעות האות b.

a קטן מ-b באחת $\leftarrow a = b - 1$.

c גדול מ-b באחת $\leftarrow c = b + 1$.

נציב בנתון במקום הנעלמים a ו-c את הביטויים שהגדרנו ונפתור את המשוואה:

$$(b + 1)^2 - (b - 1)^2 = 36$$
$$b^2 + 1 + 2b - (b^2 + 1 - 2b) = 36$$
$$b^2 + 1 + 2b - b^2 - 1 + 2b = 36$$
$$4b = 36$$
$$b = 9$$

6. תשובה (4) נכונה. שאלה 6 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הצבת תשובות

a, b ו-c הם מספרים שלמים ועוקבים כך ש- $0 < a < b < c$. נתון כי מכפלת שלושת האיברים גדולה פי 5 מסכומם.

ישנן בתשובות 4 אפשרויות שונות לערכו של b. נציב את התשובות, ונבדוק איזו תשובה מקיימת את הנתון.

טיפ: בהצבת תשובות, כדאי להתחיל בתשובות הנוחות יותר. לכן נתחיל להציב את התשובות הנמוכות כדי להימנע מחישובים מסובכים

<u>נבדוק את תשובה (2):</u> אם $b = 2$, אזי $a = 1$ ו-$c = 3$. לפיכך, מכפלת שלושת האיברים היא 6 ($1 \cdot 2 \cdot 3$) וסכומם הוא 6 ($3 + 2 + 1$). במקרה זה מכפלת האיברים שווה לסכומם, ולא גדולה ממנו פי 5. התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (4):</u> אם $b = 4$, אזי $a = 3$ ו-$c = 5$. לפיכך, מכפלת שלושת האיברים היא 60 ($3 \cdot 4 \cdot 5$) וסכומם הוא 12 ($5 + 4 + 3$). במקרה זה מכפלת האיברים (60) אכן גדולה פי 5 מסכום האיברים (12). **תשובה נכונה.**

טיפ: מכיוון שהצבנו את התשובות, ברגע שמצאנו תשובה נכונה אין צורך להמשיך לבדוק את שאר התשובות, אך למען שלמות ההסבר נפסול אותן:

<u>נבדוק את תשובה (3):</u> אם $b = 7$, אזי $a = 6$ ו-$c = 8$. לפיכך, מכפלת שלושת האיברים היא 336 ($6 \cdot 7 \cdot 8$) וסכומם הוא 21 ($8 + 7 + 6$). אין צורך לחשב במדויק פי כמה גדול 336 מ-21 כי ניתן, על בסיס הערכת סדר גודל, לראות שזה גדול בהרבה יותר מפי 5 (21 כפול 5 זה 105, הרבה פחות מ-336). התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (1):</u> אם $b = 10$, אזי $a = 9$ ו-$c = 11$. לפיכך, מכפלת שלושת האיברים היא 990 ($9 \cdot 10 \cdot 11$) וסכומם הוא 30 ($11 + 10 + 9$). אין צורך לחשב במדויק פי כמה גדול 990 מ-30 כי ניתן, על בסיס הערכת סדר גודל, לראות שזה גדול בהרבה יותר מפי 5 (30 כפול 5 זה 150, הרבה פחות מ-990). התשובה נפסלת.

דרך ב' – פתרון מתמטי

a, b ו-c הם מספרים שלמים ועוקבים כך ש- $a < b < c$. נתון כי מכפלת שלושת האיברים גדולה פי 5 מסכומם.

נבטא את כל הנעלמים באמצעות b.

a קטן מ-b ב-1, לכן: $a = b - 1$.

c גדול מ-b ב-1, לכן: $c = b + 1$.

מכפלת שלושת האיברים גדולה פי 5 מסכומם. נכתוב קשר זה באופן מתמטי, וניצור משוואה ע"פ עקרון "תן למסכן"

$$a \cdot b \cdot c = 5(a + b + c)$$

נבטא את כל הנעלמים במשוואה באמצעות b.

$$(b - 1) \cdot b \cdot (b + 1) = 5(b - 1 + b + b + 1)$$

נכנס איברים דומים:

$$(b - 1) \cdot b \cdot (b + 1) = 5 \cdot 3b$$
$$b \cdot (b - 1) \cdot (b + 1) = 15b$$

נצמצם b מכל אחד מהאגפים:

$$(b - 1) \cdot (b + 1) = 15$$

נפתח סוגריים לפי נוסחת הכפל המקוצר המתאימה:

$$b^2 - 1 = 15$$
$$b^2 = 16$$

נוציא שורש כדי למצוא את ערכו של b:

$$b = \pm 4$$

נתון כי כל הנעלמים חיוביים, ולכן $b = 4$.

7. תשובה (1) נכונה. שאלה 9 מתוך 20 בפרק.

ברור שלא ניתן לחשב את תוצאת התרגיל, משום שמדובר במספרים גדולים מאוד. עם זאת, ידוע שחזקה אינה משפיעה על הזוגיות – מספר זוגי (במקרה הזה 10) בכל חזקה יישאר זוגי, ומספר אי-זוגי (במקרה הזה 9) בכל חזקה יישאר אי-זוגי. לכן, ניתן "להתעלם מהחזקות" ולחבר את המספרים. במקרה זה אנו מחברים מספר זוגי ומספר אי-זוגי ($10 + 9 = 19$), ולכן בוודאות נקבל תוצאה אי-זוגית.

---

8. תשובה (3) נכונה. שאלה 10 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הצבת מספרים

a ו-b הם מספרים שלמים וחיוביים, כך ש- $b < a$.
נתון כי a^2b הוא מספר זוגי, וכי $a + b$ הוא מספר אי-זוגי.
אנו נשאלים איזו טענה מבין הטענות בתשובות **אינה** נכונה.

נבדוק מה ניתן ללמוד מתוך הנתונים. לפי הנתון הראשון המכפלה של a^2 ו-b היא זוגית. אנו יודעים שהחזקה אינה משפיעה על הזוגיות, ולכן כדי שהמכפלה תהיה זוגית, לפחות אחד מהמספרים a או b צריך להיות זוגי.
מתוך הנתון השני ניתן ללמוד שאחד הנעלמים זוגי והשני אי-זוגי (רק כך נקבל סכום שהוא אי-זוגי).

לאור ההבנה שהגענו אליה, נוכל לבחור זוג מספרים המקיימים את הנתונים. למשל נציב: $b = 1$, $a = 2$.
נציב הצבה זו בתשובות ונחפש תשובה שהיא איננה נכונה.

(1) $b(a^2 + a) \Rightarrow 1(2^2 + 2) = 6$ $\Rightarrow$ המספר אכן זוגי, התשובה נפסלת

(2) $a + b - 1 \Rightarrow 2 + 1 - 1 = 2$ $\Rightarrow$ המספר אכן זוגי, התשובה נפסלת

(3) $ab^2 \Rightarrow 2 \cdot 1^2 = 2$ $\Rightarrow$ המספר אינו אי-זוגי, **מתאים**

טיפ: מכיוון שבדקנו את התשובות, ברגע שמצאנו תשובה נכונה אין צורך להמשיך לבדוק את שאר התשובות, אך למען שלמות ההסבר נפסול אותן:

(4) $a - b \Rightarrow 2 - 1 = 1$ $\Rightarrow$ המספר אכן אי-זוגי, התשובה נפסלת

דרך ב' – הבנה

a ו-b הם מספרים שלמים וחיוביים, כך ש- $b < a$.
נתון כי a^2b הוא מספר זוגי, וכי $a + b$ הוא מספר אי-זוגי.
אנו נשאלים איזו טענה מבין הטענות בתשובות אינה נכונה.

נבדוק מה ניתן ללמוד מתוך הנתונים. לפי הנתון הראשון המכפלה של a^2 ו-b היא זוגית. אנו יודעים שהחזקה אינה משפיעה על הזוגיות, ולכן כדי שהמכפלה תהיה זוגית, לפחות אחד מהמספרים a או b צריך להיות זוגי.
מתוך הנתון השני ניתן ללמוד שאחד הנעלמים זוגי והשני אי-זוגי (רק כך נקבל סכום שהוא אי-זוגי).

<u>נבדוק את תשובה (1):</u>
$(a^2 + a)$ בהכרח זוגי (אין משמעות לחזקה ולכן $2a \approx$) ולכן המכפלה תמיד זוגית. התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (2):</u>
נתון כי הסכום $a + b$ הוא מספר אי-זוגי. לפיכך, אם נחסר מהסכום 1 $(a + b - 1)$ נקבל מספר זוגי, שהרי (זוגי = 1 – אי-זוגי). התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (3):</u>
כפי שהבנו, אחד הנעלמים זוגי והשני הוא אי-זוגי. ידוע שהחזקה לא משפיעה על הזוגיות, ולכן גם כשנעלה את b בריבוע הזוגיות/אי-זוגיות שלו לא תושפע מכך. לכן, כשאנו כופלים את a ב-b^2 התוצאה תהיה זוגית (כי אחד הכופלים זוגי). לפיכך הטענה המופיעה בתשובה זו אינה נכונה וזו **התשובה הנכונה.**

טיפ: מכיוון שבדקנו את התשובות, ברגע שמצאנו תשובה נכונה אין צורך להמשיך לבדוק את שאר התשובות, אך למען שלמות ההסבר נפסול אותן:

נבדוק את תשובה (4):
נתון כי הסכום $a + b$ הוא מספר אי-זוגי. לפיכך, ניתן לקבוע מיד שגם ההפרש בין הנעלמים הוא אי-זוגי. זאת מכיוון שכפי שאמרנו, אחד מהנעלמים זוגי והשני אי-זוגי ולכן כשנחסר ביניהם נקבל הפרש אי-זוגי.
התשובה נפסלת.

---

9. תשובה (2) נכונה. שאלה 10 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הצבת מספרים
a ו-b הם מספרים ראשוניים כך ש-$a \le b$. אנו נשאלים איזה ביטוי מבין הביטויים בתשובות הוא זוגי בהכרח.

מכיוון שנתון שהמספרים ראשוניים והשאלה דנה בזוגיות, עלינו לבחון את האפשרויות הקיימות השונות.
2 הוא המספר הראשוני הזוגי היחידי, ועלינו להתחשב בכך בבדיקתנו. נבדוק את שלושת המצבים האפשריים מבחינת זוגיות במקרה המצורף.

אופציה א'- שני הנעלמים הם זוגיים, כאשר שניהם שווים ל-2.
אופציה ב'- a הוא זוגי (שווה ל-2) ו-b הוא אי זוגי (כל ראשוני שהוא שונה מ-2).
אופציה ג'- שני הנעלמים הם אי-זוגיים.
שימו לב, שלא יתכן מצב בו b הוא זוגי ו-a הוא אי-זוגי, משום שבמקרה זה b צריך להיות שווה ל-2 ו-a צריך להיות גדול ממנו – מצב שאינו אפשרי לפי הנתונים.

נציב מספרים המקיימים את הנתונים ונחפש תשובה שתהיה זוגית בכל אחת מהאופציות שפרטנו.

נציב באופציה א' $a = b = 2$; באופציה ב' $a = 2$, $b = 3$; ובאופציה ג' $a = b = 3$. ונחפש תשובה שיוצאת זוגית בכל אחת מההצבות שעשינו:

(1) $a \cdot b \Rightarrow$
אופציה א' $\Rightarrow 2 \cdot 2 = 4$
אופציה ב' $\Rightarrow 2 \cdot 3 = 6$
אופציה ג' $\Rightarrow 3 \cdot 3 = 9$
$\Rightarrow$ נפסל לפי אופציה ג'

(2) $a \cdot (b + 1) \Rightarrow$
אופציה א' $\Rightarrow 2 \cdot (2 + 1) = 6$
אופציה ב' $\Rightarrow 2 \cdot (3 + 1) = 8$
אופציה ג' $\Rightarrow 3 \cdot (3 + 1) = 12$
$\Rightarrow$ **מתאים**

טיפ: מכיוון שהצבנו את התשובות, ברגע שמצאנו תשובה נכונה אין צורך להמשיך לבדוק את שאר התשובות, אך למען שלמות ההסבר נפסול אותן:

(3) $(a + 1) \cdot b \Rightarrow$
אופציה א' $\Rightarrow (2 + 1) \cdot 2 = 6$
אופציה ב' $\Rightarrow (2 + 1) \cdot 3 = 9$
אופציה ג' $\Rightarrow (3 + 1) \cdot 3 = 12$
$\Rightarrow$ נפסל לפי אופציה ב'

(4) $a + b \Rightarrow$
אופציה א' $\Rightarrow 2 + 2 = 4$
אופציה ב' $\Rightarrow 2 + 3 = 5$
אופציה ג' $\Rightarrow 3 + 3 = 6$
$\Rightarrow$ נפסל לפי אופציה ב'

דרך ב׳ – הבנה

a ו-b הם מספרים ראשוניים כך ש-$a \le b$. אנו נשאלים איזה ביטוי מבין הביטויים בתשובות הוא זוגי בהכרח.

מכיוון שנתון שהמספרים ראשוניים והשאלה דנה בזוגיות, עלינו לבחון את האפשרויות הקיימות השונות. 2 הוא המספר הראשוני הזוגי היחידי, ועלינו להתחשב בכך בבדיקתנו. נבדוק את שלושת המצבים האפשריים מבחינת זוגיות במקרה המצורף.

<u>אופציה א׳</u>- שני הנעלמים הם זוגיים, כאשר שניהם שווים ל-2.
<u>אופציה ב׳</u>- a הוא זוגי (שווה ל-2) ו-b הוא אי זוגי (כל ראשוני שהוא שונה מ-2).
<u>אופציה ג׳</u>- שני הנעלמים הם אי-זוגיים.
שימו לב, שלא יתכן מצב בו b הוא זוגי ו-a הוא אי-זוגי, משום שבמקרה זה b צריך להיות שווה ל-2 ו-a צריך להיות גדול ממנו – מצב שאינו אפשרי לפי הנתונים.

נבדוק את התשובות השונות ונפסול כול תשובה שהיא אינה זוגית לפי אחת האופציות.

<u>נבדוק את תשובה (1):</u>
בתשובה זו כופלים את שני הנעלמים $(a \cdot b)$. כדי שהמכפלה תהא זוגית, מספיק שאחד הכופלים יהיה זוגי. אך, ניתן לראות שלפי אופציה ג׳ שני הנעלמים הם אי-זוגיים. במקרה זה, כאשר נכפול את האיברים נקבל מכפלה שהיא אי-זוגית. התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (2):</u>
בתשובה זו כופלים את a ב-$(b + 1)$. נבדוק את המצבים השונים ונראה מתי התשובה תהיה זוגית. כאמור, מספיק שאחד הכופלים יהיה זוגי והמכפלה כולה תצא זוגית.
באופציות א׳ ו-ב׳ a הוא זוגי ולכן בשתי האופציות הללו המכפלה תצא זוגית.
לעומת זאת, באופציה ג׳ a הוא אי-זוגי וגם b הוא אי-זוגי. בתשובה אנו כופלים את a כפול $(b + 1)$. אומנם b הוא אי-זוגי, אבל כאשר נוסיף לו 1 הוא יהפוך לזוגי ומכאן שהביטוי $(b + 1)$ הוא בעצמו זוגי. לפיכך, המכפלה תצא זוגית.
מצאנו שבכל האופציות קיבלנו מכפלה זוגית. **תשובה נכונה.**

טיפ: מכיוון שהצבנו את התשובות, ברגע שמצאנו תשובה נכונה אין צורך להמשיך לבדוק את שאר התשובות, אך למען שלמות ההסבר נפסול אותן:

<u>נבדוק את תשובה (3):</u>
בתשובה זו כופלים את b ב-$(a + 1)$. נבדוק את המצבים השונים ונראה מתי התשובה תהיה זוגית. כאמור, מספיק שאחד הכופלים יהיה זוגי והמכפלה כולה תצא זוגית.
באופציה א׳ b הוא זוגי, ולכן לא משנה כפול מה נכפול אותו והתוצאה תצא זוגית.
באופציה ב׳ b הוא אי-זוגי ו-a הוא זוגי. אך, כאשר נוסיף ל-a 1 הוא יהפוך להיות אי-זוגי. כלומר, באופציה זו שני הכופלים – גם b וגם $(a + 1)$ – הם אי-זוגיים והמכפלה תצא אי-זוגית. התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (4):</u>
בתשובה זו סוכמים את a ו-b. בשביל שהסכום יהיה זוגי, הנעלמים צריכים להיות שניהם זוגיים או שניהם אי-זוגיים. באופציה ב׳ a הוא זוגי ואילו b הוא אי-זוגי. לכן, באופציה זו הסכום $a + b$ יצא אי-זוגי. התשובה נפסלת.

10. תשובה (3) נכונה. שאלה 11 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הצבת תשובות
a ו-b הם מספרים שלמים, חיוביים ועוקבים כך ש- $a < b$. עוד נתון כי: $a^2 - b^2 = -3$
אנו מתבקשים לקבוע מהו הסכום $a + b$.

נציב את התשובות ונמצא בכל תשובה את a ו-b הרלוונטיים. נבדוק האם a ו-b שמצאנו מקיימים את הנתון.

<u>נבדוק את תשובה (1):</u> אם $a + b = 9$, ו-a ו-b הם מספרים עוקבים, אזי $a = 4$ ו-$b = 5$.
נציב ערכים אלו בנתון ונבדוק האם קיבלנו פסוק אמת:

$$4^2 - 5^2 \stackrel{?}{=} -3$$
$$16 - 25 \stackrel{?}{=} -3$$
$$-9 \neq -3$$

הערכים לא מקיימים את הנתון, התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (2):</u> אם $a + b = 7$, ו-a ו-b הם מספרים עוקבים, אזי $a = 3$ ו-$b = 4$.
נציב ערכים אלו בנתון ונבדוק האם קיבלנו פסוק אמת:

$$3^2 - 4^2 \stackrel{?}{=} -3$$
$$9 - 16 \stackrel{?}{=} -3$$
$$-7 \neq -3$$

הערכים לא מקיימים את הנתון, התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (3):</u> אם $a + b = 3$, ו-a ו-b הם מספרים עוקבים, אזי $a = 1$ ו-$b = 2$.
נציב ערכים אלו בנתון ונבדוק האם קיבלנו פסוק אמת:

$$1^2 - 2^2 \stackrel{?}{=} -3$$
$$1 - 4 \stackrel{?}{=} -3$$
$$-3 = -3$$

קיבלנו פסוק אמת, **התשובה נכונה.**

טיפ: מכיוון שהצבנו את התשובות, ברגע שמצאנו תשובה נכונה אין צורך להמשיך לבדוק את שאר התשובות, אך למען שלמות ההסבר נפסול את תשובה (4):

<u>נבדוק את תשובה (4):</u> אם $a + b = 5$, ו-a ו-b הם מספרים עוקבים, אזי $a = 2$ ו-$b = 3$.
נציב ערכים אלו בנתון ונבדוק האם קיבלנו פסוק אמת:

$$2^2 - 3^2 \stackrel{?}{=} -3$$
$$4 - 9 \stackrel{?}{=} -3$$
$$-5 \neq -3$$

הערכים לא מקיימים את הנתון, התשובה נפסלת.

דרך ב' – פתרון מתמטי
נפשט את המשוואה הנתונה.

$$a^2 - b^2 = -3$$

נפתח באגף השמאלי את נוסחת הכפל המקוצר:

$$(a - b)(a + b) = -3$$

נתון ש-a ו-b הם מספרים עוקבים כך ש- $a < b$. ההגדרה של מספרים עוקבים היא מספרים שההפרש ביניהם הוא 1. לכן, $b - a = 1$. מכאן, שההפרש בין a ל-b הוא 1- (הפער המספרי בין שני הערכים הוא 1, אבל a קטן מ-b לכן הסימן הוא 1-). נציב $(a - b) = -1$:

$$-1 \cdot (a + b) = -3$$

נחלק את המשוואה ב-1-:

$$(a + b) = 3$$

מצאנו שהסכום $a + b$ הוא 3.

11. תשובה (4) נכונה. שאלה 13 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הבנה

n הוא מספר זוגי. אנו נשאלים איזה מהמספרים בתשובות עשוי להיות שווה לביטוי $\frac{n^3}{2}$.
ננסה להבין מה ידוע לנו לגבי הביטוי הנ"ל.

n הוא מספר זוגי ומכאן שהוא מכיל את הגורם 2 לפחות פעם אחת. כאשר n עולה בחזקת 3 גם הגורם 2 המרכיב אותו עולה בחזקה והמונה בביטוי למעשה מכיל את הגורם $2^3 \Leftarrow 8$.

בגלל שהביטוי n^3 מחולק ב-2, אחד הגורמים 2 מצטמצם בו. ואנו נשארים עם $2^2 \Leftarrow 4$.

כלומר, המספר שאנו מחפשים צריך להתחלק ב-4. נבדוק את התשובות ונפסול כל תשובה שלא מתחלקת ב-4.

נמצא שרק תשובה (4) מתחלקת ב-4 והיא התשובה הנכונה.

דרך ב' – פתרון מתמטי

n הוא מספר זוגי. כלומר הוא מכיל את הגורם 2. כדי להציג זאת מתמטית אנו יכולים להגדיר את n כ-2k כאשר k הוא מספר שלם. עתה, נציב במקום n בביטוי 2k ונבדוק מהו ערך הביטו:

$$\frac{n^3}{2} = \frac{(2k)^3}{2} = \frac{8k^3}{2} = 4k^3$$

כלומר, המספר בתשובות צריך להיות כפולה של 4. משמע, המספר צריך להתחלק ב-4. נמצא שרק תשובה (4) מתחלקת ב-4 והיא התשובה הנכונה.

שימו לב, לאחר שהמספר מתחלק ב-4, צריך להתקבל מספר שהוא חזקה שלישית של מספר שלם כלשהו (דהיינו שאפשר יהיה לחשב לו שורש שלישי).

נבדוק שתשובה (4) אכן מקיימת את התנאים שמצאנו:

$$4k^3 = 108$$

נחלק ב-4 את שני האגפים:

$$k^3 = 27$$

נוציא שורש שלישי למשוואה:

$$k = 3$$

התשובה מקיימת את התנאי ש-k מספר שלם ולכן היא מתאימה.

דרך ג' – הצבת תשובות

כדי לבדוק איזו תשובה עשויה להיות שווה לביטוי $\frac{n^3}{2}$, נוכל להציב את התשובות ולראות איזו תשובה מביאה לכך ש-n זוגי. לפני כן, ניזכר בטבלת השורשים עם מעריך 3:

$$\sqrt[3]{125} = 5$$
$$\sqrt[3]{216} = 6$$

<u>נבדוק את תשובה (1)</u>: נבדוק האם $\frac{n^3}{2}$ עשוי להיות שווה ל-70:

$$\frac{n^3}{2} = 70$$

נכפול את המשוואה ב-2 כדי להיפטר מהמכנה:

$$n^3 = 140$$

לפי טבלת השורשים, ל-140 אין שורש שלישי שלם. התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (2):</u> נבדוק האם $\frac{n^3}{2}$ עשוי להיות שווה ל-86:

$$\frac{n^3}{2} = 86$$

נכפול את המשוואה ב-2 כדי להיפטר מהמכנה:

$$n^3 = 172$$

לפי טבלת השורשים, ל-172 אין שורש שלישי שלם. התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (3):</u> נבדוק האם $\frac{n^3}{2}$ עשוי להיות שווה ל-94:

$$\frac{n^3}{2} = 94$$

נכפול את המשוואה ב-2 כדי להיפטר מהמכנה:

$$n^3 = 188$$

לפי טבלת השורשים, ל-188 אין שורש שלישי שלם. התשובה נפסלת.

טיפ: כיוון שפסלנו 3 תשובות, ניתן לסמן את תשובה (4) מבלי לבדוק אותה. למען שלמות ההסבר, נבדוק את נכונותה:

<u>נבדוק את תשובה (4):</u> נבדוק האם $\frac{n^3}{2}$ עשוי להיות שווה ל-108:

$$\frac{n^3}{2} = 108$$

נכפול את המשוואה ב-2 כדי להיפטר מהמכנה:

$$n^3 = 216$$

נוציא לשני האגפים $\sqrt[3]{\ }$ כדי למצוא את ערכו של n:

$$n = 6$$

בהתאם לנתוני השאלה, קיבלנו ש-n מספר זוגי. **תשובה נכונה.**

---

12. תשובה (3) נכונה. שאלה 14 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הצבת תשובות

a, b ו-c הם מספרים שלמים ועוקבים כך ש- $a < b < c$. נתון כי: $a^2 + c^2 = 4b$.
אנו נשאלים מהו הסכום $a + b + c$.

כל תשובה מייצגת סכום אפשרי של הנעלמים. נחלץ מכול תשובה את השלשה העוקבת שמרכיבה אותה, ונבדוק האם השלשה הזו מקיימת את הנתון.

בהינתן סכום של שלושה מספרים עוקבים, ניתן למצוא את המספרים (השלשה) באמצעות הבנת ממוצע. ממוצע הוא למעשה נקודת איזון בין האיברים השונים. מכיוון שמספרים עוקבים הם מספרים שההפרש ביניהם הוא 1, האיבר האמצעי הוא הממוצע. לכן, כאשר יש שלושה מספרים עוקבים – כמו בשאלה – האיבר האמצעי (b במקרה שלנו) הוא הממוצע. אם ידוע לנו הסכום (התשובות שאנו בודקים), וידוע לנו מספר האיברים (שלושה איברים) נוכל בקלות למצוא את הממוצע ע"י הנוסחה: $\text{ממוצע} = \frac{\text{סכום האיברים}}{\text{מספר האיברים}}$

<u>נבדוק את תשובה (1):</u>

אם $a + b + c = 6$, והנעלמים הם שלושה איברים עוקבים, אזי הממוצע שלהם הוא 2 $\left(\frac{6}{3}\right)$ ⇐ $b = 2$.

לאחר שמצאנו את ערכו של b נוכל לחשב את ערכם של כל הנעלמים: $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$.
עתה נציב מספרים אלו בנתון ונראה האם אנו מקבלים פסוק אמת:

$$1^2 + 3^2 \stackrel{?}{=} 4 \cdot 2$$
$$1 + 9 \stackrel{?}{=} 8$$
$$10 \neq 8$$

קיבלנו שהשלשה הנ"ל לא מקיימת את הנתונים, התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (2)</u>: אם $a + b + c = 5$, והנעלמים הם שלושה איברים עוקבים, אזי הממוצע שלהם הוא $\frac{5}{3}$. אין צורך לחשב במדויק כי התשובה תצא מספר שהוא אינו שלם. כאמור, הממוצע של שלושת האיברים הוא b ונתון ש-b הוא מספר שלם, לכן לא יתכן שהסכום של שלושת הנעלמים הוא 5. התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (3)</u>: אם $a + b + c = 3$, והנעלמים הם שלושה איברים עוקבים, אזי הממוצע שלהם הוא 1 $\left(\frac{3}{3}\right)$
$\Leftarrow b = 1$. לאחר שמצאנו את ערכו של b נוכל לחשב את ערכם של כל הנעלמים: $a = 0$, $b = 1$, $c = 2$.
עתה נציב מספרים אלו בנתון ונראה האם אנו מקבלים פסוק אמת:

$$0^2 + 2^2 \stackrel{?}{=} 4 \cdot 1$$
$$0 + 4 \stackrel{?}{=} 4$$
$$4 = 4$$

מתאים, **תשובה נכונה.**

טיפ: מכיוון שהצבנו את התשובות, ברגע שמצאנו תשובה נכונה אין צורך להמשיך לבדוק את שאר התשובות, אך למען שלמות ההסבר נפסול אותן:

<u>נבדוק את תשובה (4)</u>: אם $a + b + c = 4$, והנעלמים הם שלושה איברים עוקבים, אזי הממוצע שלהם הוא $\frac{4}{3}$. אין צורך לחשב במדויק כי התשובה תצא מספר שהוא אינו שלם. כאמור, הממוצע של שלושת האיברים הוא b ונתון ש-b הוא מספר שלם, לכן לא יתכן שהסכום של שלושת הנעלמים הוא 4. התשובה נפסלת.

דרך ב' – פתרון מתמטי
a, b ו-c הם מספרים שלמים ועוקבים כך ש- $a < b < c$. נתון כי: $a^2 + c^2 = 4b$.

מספרים עוקבים הם מספרים שההפרש ביניהם הוא 1. לכן, נוכל לבטא את כל הנעלמים באמצעות אחד מהם ואז נהפוך את המשוואה למשוואה עם נעלם אחד.

נבטא את כל הנעלמים באמצעות a.
b גדול מ-a ב-1, לכן: $b = a + 1$.
c גדול מ-b ב-1 ומתוך כך, הוא גדול מ-a ב-2, לכן: $c = a + 2$.

עתה נציב את הנעלמים שביטאנו בנתון ונמצא את ערכו של a:

$$a^2 + (a + 2)^2 = 4(a + 1)$$

נפתח סוגריים לפי נוסחת הכפל המקוצר (באגף השמאלי) וכרגיל באגף הימני:

$$a^2 + a^2 + 4 + 4a = 4a + 4$$

נעביר אגפים ונכנס איברים דומים:

$$2a^2 = 0$$
$$a^2 = 0$$
$$a = 0$$

לאחר שמצאנו כי $a = 0$, נוכל לחשב ולמצוא את שאר הנעלמים: $b = 1$, $c = 2$.
עתה נחשב את הסכום $a + b + c$:

$$0 + 1 + 2 = 3$$

13. תשובה (4) נכונה. שאלה 14 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הצבת מספרים

על מנת לפשט את הפתרון, נציב במקום הנעלמים מספרים המקיימים את הנתון: $a < b < c < 0$.
$a = -3\ ,\ b = -2\ ,\ c = -1$. כעת נציב מספרים אלו בתשובות במטרה לפסול 3 תשובות שגויות:

(1) $\frac{a \cdot b}{c} = \frac{(-3)\cdot(-2)}{-1} = \frac{6}{-1} = -6$ $\Rightarrow$ שלילי, התשובה נפסלת

(2) $\frac{a+b}{-c} = \frac{(-3)+(-2)}{-(-1)} = \frac{-5}{1} = -5$ $\Rightarrow$ שלילי, התשובה נפסלת

(3) $(-a)\cdot(-b)\cdot c = \big(-(-3)\big)\cdot\big(-(-2)\big)\cdot(-1) = 3\cdot 2\cdot(-1) = -6$ $\Rightarrow$ שלילי, התשובה נפסלת

טיפ: כיוון שפסלנו 3 תשובות, ניתן לסמן את תשובה (4) מבלי לבדוק אותה. למען שלמות ההסבר, נבדוק את נכונותה:

(4) $a\cdot(b+c) = (-3)\cdot\big(-2+(-1)\big) = (-3)\cdot(-3) = 9$ $\Rightarrow$ **חיובי**

דרך ב' – הבנה

מהנתון אנו מבינים שכל הנעלמים שליליים, וכן כי a קטן מ-b אשר קטן מ-c. עם הבנה זו נפנה לתשובות על מנת לפסול שלוש מהן:

נבדוק את תשובה (1): המונה הוא מכפלתם של a ו-b. כאמור, שניהם שליליים ועל כן המונה חיובי. המכנה שלילי ומכאן שהביטוי כולו שלילי $\left(\frac{+}{-} = \text{שלילי}\right)$. התשובה נפסלת.

נבדוק את תשובה (2): המונה מורכב מחיבורם של שני מספרים שליליים. כלומר, המונה שלילי. כעת נתמקד במכנה – c שלילי ועל כן c- חיובי. משמע, הביטוי שלילי $\left(\frac{-}{+} = \text{שלילי}\right)$. התשובה נפסלת.

נבדוק את תשובה (3): a- הוא חיובי וכך גם b-. כלומר, מכפלתם חיובית. c שלילי ועל כן המכפלה תהיה שלילית ($(+)\cdot(+)\cdot(-) = (+)\cdot(-) =$ שלילי). התשובה נפסלת.

טיפ: כיוון שפסלנו 3 תשובות, ניתן לסמן את תשובה (4) מבלי לבדוק אותה. למען שלמות ההסבר, נבדוק את נכונותה:

נבדוק את תשובה (4): תחילה נתמקד בביטוי שבסוגריים. חיבורם של שני מספרים שליליים (b ו-c) ייתן סכום שלילי. כאשר נכפיל סכום שלילי זה במשתנה שלילי (a) התוצאה תהיה חיובית ($(-)\cdot(-) =$ חיובי). **תשובה נכונה.**

14. תשובה (1) נכונה. שאלה 15 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הבנה

טיפ: כשבתשובות מוצגות מספר תכונות אשר אחת מהן היא זוגיות – מומלץ להתחיל בבדיקתה, כיוון שבדרך כלל זו התשובה הנכונה.

נתחיל לחלץ מידע מהאגף השמאלי במשוואה: $2m + 1$.

$2m$ הוא מספר זוגי כי הוא מכיל בתוכו את הגורם 2 (זוגי כפול כל דבר ייתן תוצאה זוגית). כאשר מוסיפים לו 1 הביטוי הופך לאי-זוגי. מכאן שכל האגף השמאלי הוא אי זוגי. לכן, מתוקף השוויון בין האגפים, גם האגף הימני צריך להיות אי-זוגי.

כאמור, מכפלה של מספר זוגי כפול כל דבר תיתן תוצאה זוגית, ולכן כל אחד מהכופלים באגף הימני צריך להיות אי זוגי. אגף זה בנוי ממכפלה של k בביטוי $(2k + 1)$; כל אחד מהכופלים צריך להיות אי-זוגי ולכן ניתן לקבוע כי k הוא אי-זוגי.

דרך ב' – הצבת מספרים

ניתן להציב במקום k מספרים שלמים. נמצא את ערכו של m בהתאם לכל הצבה, ולפי ערכו נפסול תשובות שאינן מתאימות – אם m יהיה גם הוא מספר שלם, אזי ערך ה-k שהצבנו אכן מקיים את המשוואה.

תחילה, נציב $k = 1$ ונחשב את ערכו של m.

$$2m + 1 = 1 \cdot (2 \cdot 1 + 1)$$
$$2m + 1 = 3$$
$$2m = 2$$
$$m = 1$$

מצאנו כי עבור $k = 1$, מתקבל פסוק אמת כאשר $m = 1$, כלומר $k = 1$ מקיים את המשוואה. כעת נוכל לפסול תשובות שאינן מתאימות להצבה שקיימנו; תשובה (2) קובעת כי k חייב להיות מספר זוגי. ראינו באמצעות ההצבה שעשינו כי אין הכרח כזה, התשובה נפסלת. כמו כן, גם את תשובה (3) ניתן לפסול משום ש-1 אינו מתחלק ב-3 ללא שארית.

בשביל להכריע בין תשובה (1) לתשובה (4) נבצע הצבה נוספת. נציב למשל $k = 3$.

$$2m + 1 = 3 \cdot (2 \cdot 3 + 1)$$
$$2m + 1 = 3 \cdot 7$$
$$2m + 1 = 21$$
$$2m = 20$$
$$m = 10$$

לפיכך, המצב אפשרי גם כאשר $k = 3$. תשובה (4) קובעת ש-k אינו מתחלק ב-3 ללא שארית; הצבה זו סותרת טענה זו ולכן התשובה נפסלת.

פסלנו 3 תשובות, ולכן תשובה (1) נכונה.

15. תשובה (1) נכונה. שאלה 16 מתוך 20 בפרק.

בשאלה זו עלינו לקבוע האם x יהיה בהכרח זוגי / אי זוגי / שלילי / חיובי.
טיפ: כאשר יש בתשובות התייחסות לזוגי או אי-זוגי, נתייחס קודם כל לתשובות אלה. בדרך כלל הן יהיו התשובות הנכונות ויתר התשובות יהיו מסיחים.

דרך א' – הבנה
תחילה נבדוק את זוגיות x. כידוע, חזקה לא משפיעה על זוגיות המספר. לכן, ניתן להתעלם מן החזקות וכביכול לבטל אותן:

$$x = a^2 - b^2 + a - b \quad \Rightarrow \quad a - b + a - b$$
$$a - b + a - b = 2a - 2b$$
$$x = 2(a - b)$$

כיוון שהספרה 2 היא אחד הגורמים במכפלה, אין זה משנה אם הגורם $(a - b)$ הוא זוגי או אי זוגי; כידוע, כאשר אחד הגורמים בתרגיל כפל הוא מספר זוגי (במקרה הזה 2) – המכפלה תמיד זוגית. כלומר, x הוא בהכרח זוגי, ומכאן שתשובה (1) נכונה.

דרך ב' – הצבת מספרים
תחילה נציב $a = 1, b = 2$:

$$x = 1^2 - 2^2 + 1 - 2$$
$$1 - 4 + 1 - 2 = -4$$

לפי הצבה זו קיבלנו ש-$x = -4$ ולכן ניתן לפסול את תשובות (2) ו-(4).

כעת נהפוך בין a ל-b ונציב $a = 2, b = 1$:

$$x = 2^2 - 1^2 + 2 - 1$$
$$4 - 1 + 2 - 1 = 4$$

לפי הצבה זו קיבלנו ש-$x = 4$ ולכן ניתן לפסול את תשובה (3). פסלנו 3 תשובות ועל כן תשובה (1) נכונה.

16. תשובה (2) נכונה. שאלה 17 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הצבת מספרים

נתון ש-a ו-b הם מספרים שלמים. אנו נשאלים איזו קביעה מבין הקביעות בתשובות נכונה עבור הביטוי: $(a+1)(2b+a)$.

אין הגבלה על a ו-b למעט העובדה שהם שלמים, לכן נוכל להציב כל מספר שלם שנרצה. נציב את ההצבה הפשוטה ביותר- $a=b=0$.

נחשב את ערך הביטוי $(a+1)(2b+a)$ לאחר שהצבנו $a=b=0$.

$$(0+1)(2\cdot 0+0)=1\cdot 0=0$$

עתה נבדוק את התשובות ונראה אילו תשובות פסלנו באמצעות ההצבה.
0 הוא לא חיובי, הוא לא שונה מ-0 והוא לא מתחלק ב-0 (a). אך, 0 הוא מספר זוגי.
באמצעות ההצבה הצלחנו לפסול 3 תשובות, על כן תשובה (2) נכונה.

דרך ב' – הבנה

טיפ: כשבתשובות מוצגות מספר תכונות אשר אחת מהן היא זוגיות – מומלץ להתחיל בבדיקתה, כיוון שלרוב זו התשובה הנכונה.

לאחר שהבנו שהשאלה ככל הנראה מכוונת לנושא של זוגיות, נפתח קו מחשבה זה.
מובן ש-2b הוא תמיד זוגי, לא משנה מה ערכו של b (מכיוון שכופלים אותו ב-2, והכפלה במספר זוגי הופכת את המכפלה לזוגית). לכן, תוצאת הביטוי תלויה אך ורק ב-a.

לכן, נבדוק שני מצבים – כאשר a זוגי וכאשר הוא אי-זוגי.

<u>כאשר a זוגי, נקבל:</u>

$$(\text{זוגי}+1)(\text{זוגי}+\text{זוגי})=(\text{אי זוגי})\cdot(\text{זוגי})=\text{זוגי}$$

<u>כאשר a אי-זוגי, נקבל:</u>

$$(\text{אי זוגי}+1)(\text{זוגי}+\text{אי זוגי})=(\text{זוגי})\cdot(\text{אי זוגי})=\text{זוגי}$$

כלומר, עבור כל a (זוגי ואי-זוגי) תוצאת הביטוי זוגית. כאמור, b לא ישפיע על הזוגיות של התוצאה כי הוא נמצא בביטוי כחלק מ-2b שהוא תמיד זוגי. על כן, הביטוי תמיד זוגי.

17. תשובה (1) נכונה. שאלה 17 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הצבת מספרים

n הוא מספר שלם גדול מ-1. אנו נשאלים מה נכון לגבי לפחות ממחצית המספרים שבין 1 ל-n.

נציב n נוח ונבדוק מה אנחנו יכולים ללמוד על המספרים שבינו לבין 1. נמנע מלהציב $n = 2$, כי אין רוב בין שני מספרים (יהיה תיקו בין כל התשובות). לכן נציב $n = 3$, ונראה מה נכון לגבי לפחות ממחצית המספרים בין 1 ל-3. נשים לב שמכיוון שהשתמשנו בהצבת מספרים, עלינו לפסול 3 תשובות בטרם נוכל לסמן תשובה נכונה.

בטווח זה, יש שני מספרים אי-זוגיים (1 ו-3) ורק מספר זוגי אחד. כלומר, לפחות מחצית מהמספרים הם אי-זוגיים (ולא זוגיים). תשובה (2) נפסלת.

כמו כן, בין 1 ל-3 יש שני מספרים ראשוניים (2 ו-3) ורק מספר שאינו ראשוני אחד. כלומר לפחות מחצית מהמספרים הם ראשוניים. תשובה (4) נפסלת.

כדי להכריע בין תשובה (1) ל-(3), ניתן לבצע הצבה נוספת, או לנסות להבין את העיקרון העומד מאחורי השאלה.

ניתן להבין שאם n הוא מספר גבוה, למשל 100, אז כמובן שרוב המספרים בינו לבין 1 לא היו ראשוניים. הרי, כל מספר זוגי (למעט 2) הוא אינו ראשוני וחלק מהמספרים האי-זוגיים הם אינם ראשוניים.

כאמור, ניתן גם לבצע הצבה מספרית שתוכיח זאת. למשל, אם $n = 9$ אז בינו לבין 1 יש רק ארבעה מספרים ראשוניים (2, 3, 5 ו-7). כלומר, פחות ממחצית מהמספרים הם ראשוניים, התשובה נפסלת.
פסלנו 3 תשובות ועל כן תשובה (1) נכונה.

דרך ב' – הבנה

אנו מתבקשים לקבוע מה נכון לגבי לפחות ממחצית (מחצית או רוב) המספרים שבין 1 ל-n כלשהו.
נבין שמפני שאנו מתחילים את הספירה ממספר אי-זוגי (1), אזי לפחות מחצית המספרים יהיו אי-זוגיים. זאת מכיוון שאם נסיים ב-n זוגי אז יהיה שוויון בין מספר המספרים הזוגיים למספרים האי-זוגיים (זוגי, אי-זוגי, זוגי, אי-זוגי...). ואילו נסיים את הספירה ב-n אי-זוגי, אז יהיה רוב של מספרים אי-זוגיים (התחלנו באי-זוגי וסיימנו באי-זוגי). לכן, בכל מקרה, לפחות מחצית המספרים שבין 1 ל-n יהיו אי-זוגיים.

---

18. תשובה (3) נכונה. שאלה 18 מתוך 20 בפרק.

מכפלתם של שני מספרים היא 100. אנו נשאלים איזו טענה נכונה בהכרח ולכן נפנה לבדיקת התשובות:

(1) a ו-b אינם בהכרח שונים זה מזה. אם נציב במקום שניהם 10 נקבל פסוק אמת ($10 \cdot 10 = 100$). ⇐ התשובה נפסלת

(2) סכומם של a ו-b אינו בהכרח קטן מ-50. אם, למשל, נציב a=100 ו-b=1 (שני מספרים שסכומם גדול מ-50) נקבל פסוק אמת ($100 \cdot 1 = 100$) ⇐ התשובה נפסלת

(3) אם b אי-זוגי, a בהכרח זוגי. זאת, מפני שהמכפלה (100) זוגית ולכן **לפחות** אחד הגורמים חייב להיות זוגי. משום שהגדירו לנו בתשובה זו ש-b אי-זוגי, a חייב להיות זוגי, שהרי אם גם הוא היה אי-זוגי המכפלה הייתה גם היא אי-זוגית. לדוגמה: אם $b = 25$ אז $a = 4$, אם $b = 5$ אז $a = 20$. ⇐ **תשובה נכונה**

טיפ: ברגע שמצאנו תשובה נכונה אין צורך להמשיך לבדוק את שאר התשובות, אך למען שלמות ההסבר נפסול את תשובה (4):

(4) אם a זוגי, אין מניעה ש-b יהיה זוגי גם הוא.
לדוגמה: אם $a = 10$, $b = 10$ – שני גורמים זוגיים. ⇐ התשובה נפסלת

.19 תשובה (4) נכונה. שאלה 18 מתוך 20 בפרק.

נתון כי: $x < y$, $x \cdot y < z$.
אנו מתבקשים לקבוע איזה מהאי-שוויונות בתשובות אינו אפשרי.

נבדוק את התשובות ונראה האם יש מניעה להיתכנותן.

<u>נבדוק את תשובה (1):</u> y ו-z חיוביים.
אין מניעה לכך ש-y ו-z יהיו חיוביים, ניתן לראות דוגמה לכך בהצבה: $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$.
לפי ההצבה הזו, y ו-z חיוביים, וההצבה מקיימת את הנתונים. התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (2):</u> y חיובי ו-z שלילי.
המכפלה $x \cdot y$ צריכה להיות קטנה מ-z. לפי הנתונים בתשובה זו, z אמור להיות שלילי, ומכאן שגם המכפלה $x \cdot y$ שלילית. אומנם נתון ש-y חיובי אך אם נכפול אותו ב-x שלילי, נקבל מכפלה שלילית המקיימת את הנתון. הצבה לדוגמה: $x = -1$, $y = 2$, $z = -1$.
לפי ההצבה הזו, y חיובי ו-z שלילי, וההצבה מקיימת את הנתונים. התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (3):</u> y שלילי ו-z חיובי.
נתון ש-x קטן מ-y. לכן, אם y שלילי, אזי גם x, הקטן ממנו, שלילי. מכאן, המכפלה $x \cdot y$ היא חיובית (מכפלת שני שליליים). z הוא חיובי והוא צריך להיות גדול מהמכפלה החיובית. אין בעיה עם זה כל עוד ערכו המספרי גדול מכך, למשל בהצבה המספרית: $x = -2$, $y = -1$, $z = 3$.
לפי ההצבה הזו, y שלילי ו-z חיובי, וההצבה מקיימת את הנתונים. התשובה נפסלת.

טיפ: כיוון שפסלנו 3 תשובות, ניתן לסמן את תשובה (4) מבלי לבדוק אותה. למען שלמות ההסבר, נבדוק את נכונותה:

<u>נבדוק את תשובה (4):</u> y ו-z שליליים.
נתון ש-x קטן מ-y. לכן, אם y שלילי, אזי גם x, הקטן ממנו, שלילי. מכאן, המכפלה $x \cdot y$ היא חיובית (מכפלת שני שליליים). z צריך להיות גדול יותר מהמכפלה החיובית $x \cdot y$ אך בתשובה זו הדבר לא מתאפשר משום ש-z הוא שלילי והוא לא יכול להיות גדול ממכפלה חיובית. **תשובה נכונה.**

.20 תשובה (1) נכונה. שאלה 20 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הצבת מספרים
x ו-y הם מספרים חיוביים. x הוא זוגי ו-y הוא אי-זוגי. אנו מתבקשים לקבוע איזה ביטוי מהביטויים בתשובות הוא מספר שלם. נציב x ו-y נוחים המתאימים לנתונים. נציב $x = 2$, $y = 1$.

נציב בתשובות $x = 2$, $y = 1$, ונחפש תשובה המהווה מספר שלם. נשים לב שמכיוון שהשתמשנו בהצבת מספרים, עלינו לפסול 3 תשובות בטרם נוכל לסמן תשובה נכונה.

(1) $\frac{x(y-1)(y+1)}{16} \Rightarrow \frac{2(1-1)(1+1)}{16} = \frac{2 \cdot 0 \cdot 2}{16} = 0 \Rightarrow$ **מתאים**

(2) $\frac{x^2y^2}{8} \Rightarrow \frac{2^2 \cdot 1^2}{8} = \frac{4 \cdot 1}{8} = \frac{1}{2} \Rightarrow$ לא שלם, התשובה נפסלת

(3) $\frac{y(x-1)(x+1)}{5} \Rightarrow \frac{1(2-1)(2+1)}{5} = \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{5} = \frac{3}{5} \Rightarrow$ לא שלם, התשובה נפסלת

(4) $\frac{(x+1)(y-1)}{4} \Rightarrow \frac{(2+1)(1-1)}{4} = \frac{3 \cdot 0}{4} = 0 \Rightarrow$ **מתאים**

כדי להכריע בין תשובה (1) לתשובה (4) נבצע הצבה נוספת. נשים לב שההצבה של y הייתה בעייתית במקרה זה כי היא איפסה לנו את שתי התשובות, לכן עתה נשנה את y למספר אי- זוגי אחר, $y = 3$.

מתאים $\Rightarrow$ $$\frac{x(y-1)(y+1)}{16} \Rightarrow \frac{2(3-1)(3+1)}{16} = \frac{2\cdot 2\cdot 4}{16} = 1 \quad (1)$$

לא שלם, התשובה נפסלת $\Rightarrow$ $$\frac{(x+1)(y-1)}{4} \Rightarrow \frac{(2+1)(3-1)}{4} = \frac{3\cdot 2}{4} = \frac{3}{2} \quad (4)$$

פסלנו 3 תשובות, על כן תשובה (1) נכונה.

דרך ב' – הבנה

x ו-y הם מספרים חיוביים. x הוא זוגי ו-y הוא אי-זוגי. אנו מתבקשים לקבוע איזה ביטוי מהביטויים בתשובות הוא מספר שלם.

כדי שנקבל מספר שלם, על המונה בביטוי להכיל את כל הגורמים במכנה. באופן זה המכנה יצטמצם לחלוטין ונישאר עם מספר שלם.

נבדוק את הביטויים בתשובות ונראה באיזו תשובה המכנה מצטמצם לחלוטין.

<u>נבדוק את תשובה (1):</u>

המכנה 16 מורכב מהגורם 2 ארבע פעמים (2^4). עלינו לבדוק האם גם במונה יש את הגורם 2 ארבע פעמים.
המונה מורכב מהמכפלה של $x(y-1)(y+1)$. x הוא מספר זוגי, ולכן הוא מכיל את הגורם 2 פעם אחת לפחות.
y הוא מספר אי-זוגי ולכן כשנחסר ממנו 1 או נוסיף לו 1, הסוגריים יהפכו לזוגיים. אך, $(y-1)(y+1)$ הם לא רק שני מספרים זוגיים אלא הם מספרים זוגיים עוקבים. לפיכך, אחד הגורמים יתחלק ב-2 (מכיל את הגורם 2 פעם אחת) והשני יתחלק ב-4 (מכיל את הגורם 2 פעמיים). ניתן לראות דוגמה לכך בזוגות: 2 ו-4 או 4 ו-6 $\Leftarrow$ אחד המספרים מתחלק ב-2 והשני ב-4.
כלומר הגענו כבר לארבעה מופעים של הגורם הראשוני 2 (פעם אחת ב-x, פעם אחת באחד העוקבים הזוגיים ועוד פעמיים בעוקב הזוגי השני). לפיכך ניתן לצמצם את המכנה עד הסוף ולהישאר עם מספר שלם. **תשובה נכונה.**

טיפ: מכיוון שהצבנו את התשובות, ברגע שמצאנו תשובה נכונה אין צורך להמשיך לבדוק את שאר התשובות, אך למען שלמות ההסבר נפסול אותן:

<u>נבדוק את תשובה (2):</u>

המכנה 8 מורכב מהגורם 2 שלוש פעמים (2^3). עלינו לבדוק האם גם במונה יש את הגורם 2 שלוש פעמים.
המונה מורכב מהמכפלה של x^2y^2. y הוא מספר אי-זוגי, לכן הוא לא מכיל את הגורם 2 כלל. לעומתו, x הוא מספר זוגי ולכן הוא מכיל את הגורם 2 פעם אחת לכל הפחות. ברגע שנעלה את x בריבוע, נכפיל למעשה את כול הגורמים המרכיבים אותו ונקבל שהגורם 2 הוכפל ונמצא כעת פעמיים בביטוי.
אין בכך די כדי לצמצם את המכנה (משום שהוא מורכב מהגורם 2 שלוש פעמים). התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (3):</u>

המכנה 5 מורכב מהגורם הראשוני 5 בלבד. כדי לצמצם אותו, המונה צריך להכיל גורם זה גם כן.
המונה מורכב מהמכפלה $y(x-1)(x+1)$. y הוא מספר אי-זוגי, וכמוהו גם הביטויים $(x-1)$ ו-$(x+1)$. אך, אין בכך כדי לקבוע שהמספרים האי-זוגיים הללו הם דווקא המספר 5, או מספרים המורכבים מגורם זה ולכן המכנה לא מצטמצם בהכרח. התשובה נפסלת.

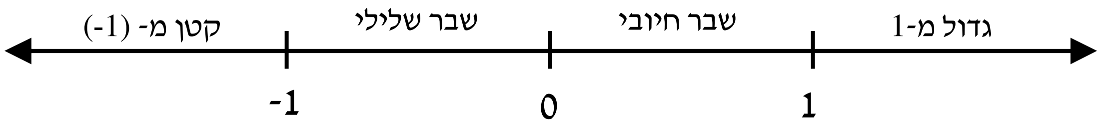
<u>נבדוק את תשובה (4):</u>

המכנה 4 מורכב מהגורם 2 פעמיים (2^2). עלינו לבדוק האם גם במונה יש את הגורם 2 פעמיים.
המונה מורכב מהמכפלה של $(x+1)(y-1)$. x הוא מספר זוגי, ולכן הסוגריים $(x+1)$ הם מספר אי-זוגי, קרי הם אינם מכילים את הגורם 2. y לעומת זאת הוא מספר אי-זוגי, ולכן הסוגריים $(y-1)$ הם מספר זוגי המכיל את הגורם 2 פעם אחת לפחות.
כאמור, אנו זקוקים לפעמיים הגורם 2 כדי לצמצם את המכנה, אך ידוע לנו רק על מופע אחד של הגורם 2 ולכן המכנה לא בהכרח מצטמצם. התשובה נפסלת.

ציר המספרים

תחומי המספרים

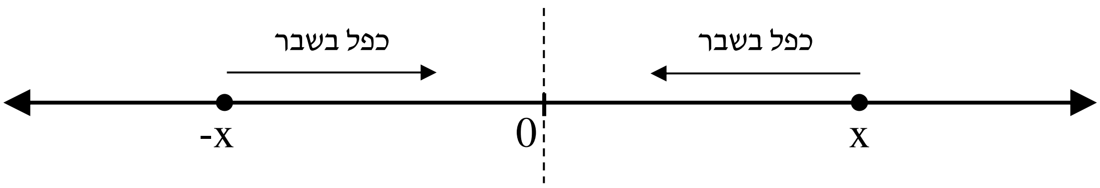
ניתן לחלק את ציר המספרים ל-4 תחומים:



כל מספר מגיב לכפל/חילוק/חזקה/שורש באותו אופן כמו שאר המספרים בתחום שלו.
על מנת לדעת מה קורה למספר בתחום מסוים, ניתן להציב מספר כלשהו מאותו תחום ולבדוק, או לנסות להבין את ההשפעה של אותה פעולה על התחום.

סימטריה

תחילה, נבין כי המספרים השליליים מתנהגים כמו "מראה" של המספרים החיוביים. למשל, אם כאשר כופלים מספר חיובי בשבר הוא קטן - הוא מתקרב ל-0, כאשר נכפול בשבר את המספר הנגדי שלו (אותו מספר רק עם מינוס) - גם הוא יתקרב ל-0, ולכן יגדל:



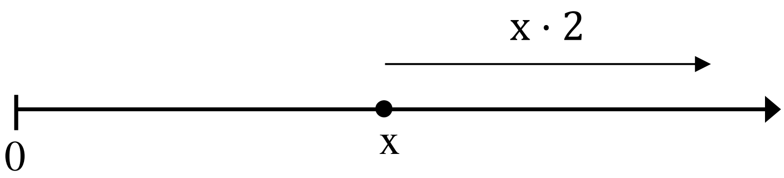
ברגע שמבינים את עקרון הסימטריה, הרבה יותר קל להבין מה קורה למספרים השליליים במקרים שונים. במקום להציב מספרים שליליים ולהסתכן בטעויות חישוב, קל יותר להציב מספרים חיוביים (לרוב אפילו לא צריך להציב - ברור לעין מה קורה למספר בכל מקרה). לאחר שהבנו מה קורה למספרים החיוביים, ניתן להשליך את תמונת ה"מראה" על ציר המספרים ולהבין מה קורה למספרים השליליים.

לדוגמה, כאשר מוציאים שורש ממספר הגדול מ-1 הוא קטן, ולכן כאשר נוציא שורש מהמספר הנגדי לו (מספר הקטן מ-(-1)) - הוא יגדל (בשני המקרים המספר יתקרב ל-0).

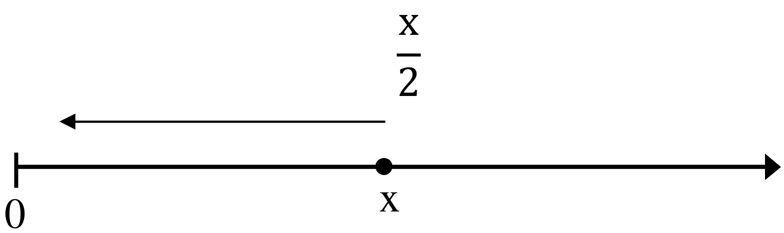
השפעות כפל וחילוק

להלן ההשפעות של כפל וחילוק על מספרים חיוביים. כדי לדעת מה קורה למספרים שליליים - נתייחס לתמונת המראה של החיוביים, בהתאם לכלל הסימטריה שלמדנו קודם.

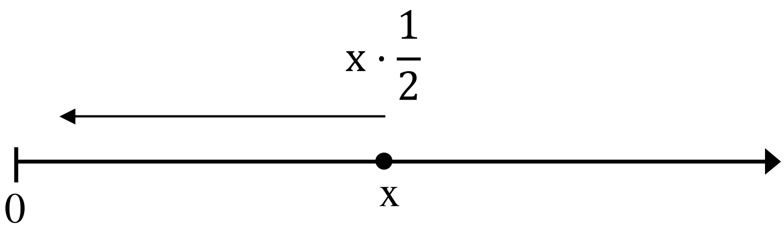
כפל במספר גדול מ-1 מגדיל את המספר:



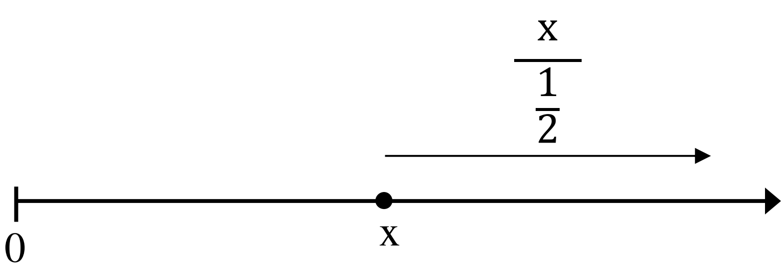
חלוקה במספר גדול מ-1 מקטינה את המספר:



כפל בשבר חיובי מקטין את המספר:

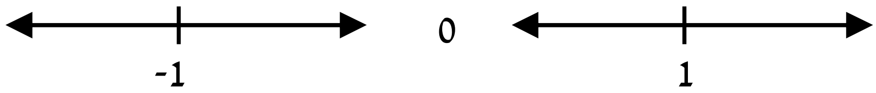


חלוקה בשבר חיובי מגדילה את המספר:



שיטת הציר

שיטת הציר עוזרת לנו לדעת במהירות מה קורה למספרים בכל אחד מהתחומים כאשר מעלים אותם בחזקה:



כאשר החץ מראה **ימינה** ← המספר **גדל**
כאשר החץ מראה **שמאלה** → המספר **קטן**

דוגמאות:

תחום השברים החיוביים - חץ שמאלה → חזקה גדֵלה - מספר קטֵן:

$$\left(\frac{2}{5}\right)^2 < \left(\frac{2}{5}\right)^1$$

תחום השברים השליליים - חץ ימינה ← חזקה גדֵלה - מספר גדֵל:

$$\left(-\frac{3}{4}\right)^1 < \left(-\frac{3}{4}\right)^3$$

אין צורך לזכור מה קורה כאשר מוציאים שורש,
מאחר שתמיד ניתן להפוך שורש לחזקה לפי הכלל:

$$\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$$

היררכיה

המספר שנמצא בתחום גדול יותר (ימני יותר), תמיד יהיה גדול יותר, ללא קשר לחזקה או לשורש (למעט חזקות חריגות).

דוגמה:

ניתן להתעלם מהפעולה ולהתייחס רק למספר עצמו:

<u>שבר מדומה (גדול מ-1)</u> <u>שבר רגיל (קטן מ-1)</u>

$$\sqrt{\frac{7}{8}} < \sqrt[5]{\frac{7}{6}}$$

חזקות חריגות

קיימות חזקות חריגות אשר מעבירות את המספר לתחום אחר.
מספר שלילי עם חזקה זוגית - הופכת אותו לחיובי: $(-3)^4 \Rightarrow 3^4$
חזקה שלילית - מתקבל ההופכי של המספר: $5^{-3} \Rightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^3$

דוגמה:

$$\sqrt[5]{\frac{4}{7}} \quad ? \quad \left(\frac{3}{5}\right)^{-3}$$

פתרון -
ניפטר מהחזקה השלילית (לפי חוקי חזקות):

$$\sqrt[5]{\frac{4}{7}} \quad < \quad \left(\frac{5}{3}\right)^{3}$$

הביטוי הימני הוא שבר חיובי ואילו הביטוי השמאלי נמצא בתחום המספרים שגדולים מ-1, ולכן גדול יותר.

פעולה זהה

כאשר מבצעים פעולה זהה על 2 מספרים, ניתן לבטל אותה. המספר שהיה גדול יותר לפני הפעולה, גדול יותר גם אחריה.
שימו לב! אם הפעולה המבוצעת היא חזקה חריגה (חזקה שלילית או חזקה זוגית למספר שלילי), לפני שמבטלים אותה חייבים להעביר את המספר לתחום הנכון בהתאם לפעולה.

דוגמה:

$$7^{-3} \quad ? \quad 6^{-3}$$

פתרון -
לפני שנבטל את הפעולה, ניפטר מהחזקה השלילית:

$$\left(\frac{1}{7}\right)^{3} \quad < \quad \left(\frac{1}{6}\right)^{3}$$

כעת, מכיוון שהפעולה זהה, ניתן לבטל אותה.

השוואת גדלים

הסוג הנפוץ של שאלות ציר המספרים הוא השוואה בין ביטויים שונים ומציאת הגדול/הקטן מביניהם.

שלבי עבודה:

1. **המרת שורשים** - אם יש בתשובות שורשים נמיר אותם לחזקות
2. **חריגים** - נבדוק אם יש מספר שלילי בחזקה זוגית (אם כן, נתייחס אליו כאל מספר חיובי)
3. **סכמת ציר** - נבדוק כיצד החזקה משפיעה על כל אחת מהתשובות

דוגמה:

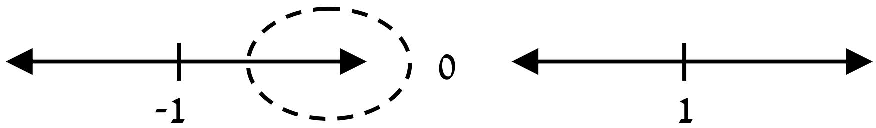
נתון : $-1 < x < 0$

איזה מהביטויים הבאים הוא **הקטן** ביותר?

(1) x^4 (2) x^3 (3) $\sqrt[5]{x}$ (4) x^{-1}

פתרון -

נסרטט את הציר ונקיף בעיגול את התחום של x :



נהפוך את השורשים שבתשובות לחזקות:

(1) x^4 (2) x^3 (3) $x^{\frac{1}{5}}$ (4) x^{-1}

המספר בתשובה (1) הוא חריג (מספר שלילי עם חזקה זוגית), ולכן הוא חיובי, והתשובה נפסלת.
בתחום השברים השליליים, ככל שהחזקה גדולה יותר, כך המספר גדול יותר (החץ פונה ימינה). אנו מחפשים את המספר הקטן ביותר, ולכן צריכים את החזקה הקטנה ביותר. תשובה (4) נכונה.

שימו לב! אין חשיבות לחזקה השלילית - השיטה של הציר "לוקחת" את זה בחשבון, ואין צורך להפוך את המספר ולבטל את המינוס.

מציאת התחום

בשאלות מסוג זה, אנו מתבקשים לעבוד הפוך. בדרך כלל יינתנו לנו 2 אי-שוויונים אשר בעזרתם עלינו למצוא את התחום של x.
דרך הפתרון תהיה לבחון את האי-שוויון ולהסיק ממנו על התחום של x. ניתן גם לפתור במהירות יחסית על ידי הצבת מספרים מתוך התחומים בתוך האי-שוויון. אם המספר לא מקיים את האי-שוויון ניתן לפסול את התחום שבו הוא נמצא.

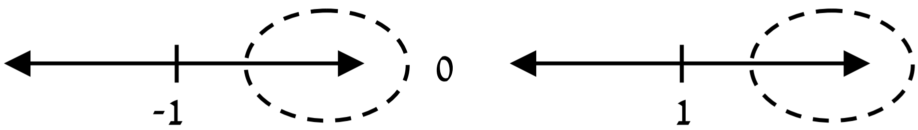
דוגמה:
נתון : $x < x^3 < x^2$

איזו מהתשובות הבאות נכונה בהכרח?

(1) $1 < x$ (2) $0 < x < 1$

(3) $-1 < x < 0$ (4) $x < -1$

פתרון -
מבדיקת החלק השמאלי של האי-שוויון $(x^1 < x^3)$ אנו רואים שכאשר החזקה גדלה, המספר גדל. נסמן על הציר :



ניתן לפסול את תשובה (2) ואת תשובה (4).
מבדיקה של חלקו הימני של האי-שוויון $(x^3 < x^2)$ אנו רואים כי ניתן לפסול גם את תשובה (1), ולכן תשובה (3) נכונה.

חזק על חזק - חלש על חלש

חלק מהשאלות העוסקות בהשוואה בין ביטויים ניתנות לפתרון על ידי הבנה של גודל האיברים המרכיבים כל אחד מהביטויים.

חזק על חזק - חלש על חלש - כאשר אנו משווים בין ביטויים המורכבים ממספר איברים חיוביים, נשווה תמיד בין האיברים הגדולים של שני הביטויים ובין האיברים הקטנים של שני הביטויים.

דוגמה:

נתון: $1 < x < y < z < w$

איזו מהטענות הבאות **אינה** נכונה?

(1) $x \cdot y < z \cdot w$

(2) $x \cdot z < y \cdot w$

(3) $y < z \cdot x$

(4) $x \cdot w < z$

פתרון -

נבדוק את התשובות:

(1) נשווה על פי עקרון "**חזק על חזק - חלש על חלש**":
נתון כי $y < w$ וגם $x < z$ ולכן המכפלה של $z \cdot w$ גדולה מהמכפלה של $x \cdot y$ - התשובה נפסלת.

(2) נשווה על פי עקרון "**חזק על חזק - חלש על חלש**":
נתון כי $z < w$ וגם $x < y$ ולכן המכפלה של $y \cdot w$ גדולה מהמכפלה של $x \cdot z$ - התשובה נפסלת.

(3) מכיוון ש-x גדול מ-1, כאשר נכפול אותו ב-z נקבל תוצאה גדולה יותר מ-z, שמלכתחילה היה גדול יותר מ-y - התשובה נפסלת.

(4) מכיוון ש-x גדול מ-1, כאשר נכפול אותו ב-w נקבל תוצאה גדולה יותר מ-w, שמלכתחילה היה גדול יותר מ-z, ולכן המכפלה $x \cdot w$ תהיה גדולה מ-z - תשובה נכונה.

תרגול שאלות מבחינות אמת

.1 נתון: $0 < a < b < 1$

איזה מהמספרים הבאים **בהכרח** גדול מ-1?

(1) $\frac{b}{a}$

(2) $a \cdot b$

(3) a^b

(4) $a + b$

.2 איזה מהמספרים הבאים הוא **הגדול** ביותר?

(1) $\left(\frac{1}{2}\right)^2$

(2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$

(3) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$

(4) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$

.3 נתון: $b < a$

אילו מהשינויים הבאים ב-a וב-b בהכרח יגדילו את $(a - b)$?

(1) הקטנת a ב-1 והקטנת b ב-1

(2) הקטנת a ב-1 והגדלת b ב-1

(3) הגדלת a ב-1 והקטנת b ב-1

(4) הגדלת a ב-1 והגדלת b ב-1

פתרתי ____________ שאלות ב ____________ דקות, ____________ תשובות נכונות

4. נתון: $1 < x < y$

איזה מהמספרים הבאים הוא **הגדול** ביותר?

(1) y^3

(2) xy^2

(3) x^2y

(4) x^3

---

5. נתון: $0 < |a| < 1$

$x = a^2$

איזו מהטענות הבאות נכונה בהכרח?

(1) $0 < x < |a|$

(2) $|a| < x < 1$

(3) $1 < x < \frac{1}{|a|}$

(4) $\frac{1}{|a|} < x$

---

6. נתון: $0 < x < y < \frac{1}{2}$

ערכו של איזה מהביטויים הבאים הוא **הגדול** ביותר?

(1) $x^2 + y^2$ (2) $2y$ (3) $x + y$ (4) $\frac{y}{x}$

---

7. נתון: $-1 < x < 0$

ערכו של איזה מהביטויים הבאים הוא **הגדול** ביותר?

(1) $\frac{1}{x}$ (2) x^3 (3) $3x$ (4) x

פתרתי ______________ שאלות ב ______________ דקות, ______________ תשובות נכונות

8. נתון: $x^3 < x < x^2$

באיזה תחום ערכים נמצא x **בהכרח**?

(1) $1 < x$

(2) $0 < x < 1$

(3) $-1 < x < 0$

(4) $x < -1$

---

9. נתון: $2a < x < a$

איזה מן הביטויים הבאים הוא **הגדול** ביותר?

(1) a^2

(2) x^2

(3) $(x - a)^3$

(4) a^3

---

10. נתון: $-1 < K < 0 < M < 1$

איזה מהביטויים הבאים הוא **הקטן** ביותר?

(1) 0

(2) $K \cdot M$

(3) $K^2 \cdot M^2$

(4) $K^3 \cdot M^3$

פתרתי ____________ שאלות ב ____________ דקות, ____________ תשובות נכונות

תשובות

שאלה	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
תשובה	1	4	3	1	1	4	2	4	2	2

פתרתי 10 שאלות - ______________ נכונות, ______________ אחוזי הצלחה

1. תשובה (1) נכונה. שאלה 2 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הצבת מספרים

אנו יכולים להציב מספרים במקום a ו-b אשר יתאמו את הנתונים. על פי הנתון, a ו-b הם שברים חיוביים (גדולים מ-0 וקטנים מ-1). כמו כן, ידוע לנו ש-a קטן מ-b. נציב בתשובות: $a = \frac{1}{4}$ ו- $b = \frac{1}{2}$, ונפסול תשובות שאינן גדולות מ-1. נשים לב שמכיוון שהשתמשנו בהצבת מספרים במקום הנעלמים, עלינו לפסול 3 תשובות בטרם נוכל לסמן תשובה נכונה.

<u>נבדוק את תשובה (1):</u>

$$\frac{b}{a} \Rightarrow \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}}$$

ניעזר בקשתות:

$$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = \frac{1 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 2$$

התוצאה גדולה מ-1, **מתאים.**

<u>נבדוק את תשובה (2):</u>

$$a \cdot b \Rightarrow \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

התוצאה קטנה מ-1, התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (3):</u>

$$a^{\,b} \Rightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$$

שימו לב שאין צורך להשלים את החישוב כדי להבין שהתוצאה קטנה מ-1, שהרי שורש של שבר תמיד יהיה שבר. התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (4):</u>

$$a + b \Rightarrow \frac{1}{4} + \frac{1}{2}$$

נרחיב את $\frac{1}{2}$ פי 2 כדי להגיע למכנה 4:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{3}{4}$$

התוצאה קטנה מ-1, התשובה נפסלת.

פסלנו 3 תשובות ועל כן תשובה (1) נכונה.

דרך ב' – הבנה

כאמור, a ו-b הם שברים חיוביים ו-a קטן מ-b.

נבדוק את תשובה (1): $\frac{b}{a}$ ⇐ כאמור, a קטן מ-b. כאשר המכנה קטן מהמונה, ושניהם חיוביים, השבר בהכרח גדול מ-1, **תשובה נכונה.**

בשלב זה ניתן לסמן את תשובה (1) ואין צורך להמשיך לבדוק את שאר התשובות. למען שלמות ההסבר נפסול אותן:

נבדוק את תשובה (2): $a \cdot b$ ⇐ כידוע, כפל בשבר מקטין את הגודל המוכפל. כלומר, התוצאה תהיה שבר הקטן מ-a ומ-b וקטן מ-1. התשובה נפסלת.

נבדוק את תשובה (3): $a^{\ b}$ ⇐ חזקת שבר היא למעשה שורש. כלומר, בביטוי הנ"ל אנו מוציאים שורש לשבר. פעולה זו אמנם מגדילה את השבר, אך מותירה אותו שבר. התשובה נפסלת.

טיפ: בבדיקת תשובות, כדאי להתחיל בתשובות הנוחות יותר. אם תשובה (3) אינה נוחה עבורכם לבדיקה, ניתן להמשיך ליתר התשובות. במקרה הנ"ל אין צורך בפסילת 3 תשובות אלא רק במציאת התשובה הנכונה, ועל כן אין טעם לבזבז זמן על תשובות מסובכות.

נבדוק את תשובה (4): $a + b$ ⇐ סכום של שני שברים חיוביים יכול להיות גדול מ-1, אולם גם יכול להיות קטן מ-1. נשאלנו מה **בהכרח** גדול מ-1 ועל כן התשובה נפסלת.

.2 תשובה (4) נכונה. שאלה 5 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – חישוב
ניתן לחשב את התשובות יחסית בקלות לפי העבודה עם חוקי חזקות, וכך למצוא את התשובה שערכה הוא הגדול ביותר.

(1) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2} \Rightarrow \frac{1}{4}$

(2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ שבר חיובי קטן מ-1

(3) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow \left(\frac{2}{1}\right)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \approx 1.4$

(4) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \Rightarrow \left(\frac{2}{1}\right)^{2} = 2^{2} = 4$

לאחר שחישבנו את ערכן של ארבע התשובות, ניתן לקבוע כי תשובה (4) היא הגדולה ביותר.

דרך ב' – הבנה
$\frac{1}{2}$ הוא שבר חיובי פשוט. עלינו לקבוע כיצד על חזקה משפיעה על גודלו.

<u>נבדוק את תשובה (1) :</u> העלאה של שבר פשוט בחזקה שגדולה מ-1 מקרבת את השבר ל-0 – אנו למעשה מחשבים חלק מתוך חלק. לכן פעולה זו מקטינה את $\frac{1}{2}$.

<u>נבדוק את תשובה (2) :</u> חזקת $\frac{1}{2}$ היא למעשה הוצאת שורש. שורש מבצע את הפעולה ההפוכה מחזקה, לכן אם חזקה מקטינה את $\frac{1}{2}$, שורש יגדיל אותו. עם זאת, התוצאה תישאר עדיין שבר פשוט (שורש של איבר הקטן מ-1 לא יכול לגדול מעבר ל-1).

<u>נבדוק את תשובה (3) :</u> חזקה שלילית הופכת את המונה והמכנה. לפיכך, $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$ הופך ל-$2^{\frac{1}{2}}$. כאמור, חזקת $\frac{1}{2}$ היא למעשה שורש ולכן אנו מחשבים שורש ל-2. 2 הוא מספר הגדול מ-1 ולכן שורש מקטין אותו, אך לא מקטין אותו למספר הקטן מ-1.

<u>נבדוק את תשובה (4) :</u> חזקה שלילית הופכת את המונה והמכנה. לפיכך, $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$ הופך ל-2^{2}. 2 הוא מספר הגדול מ-1 ולכן חזקה מגדילה אותו. כלומר תשובה זו גדולה מ-2.

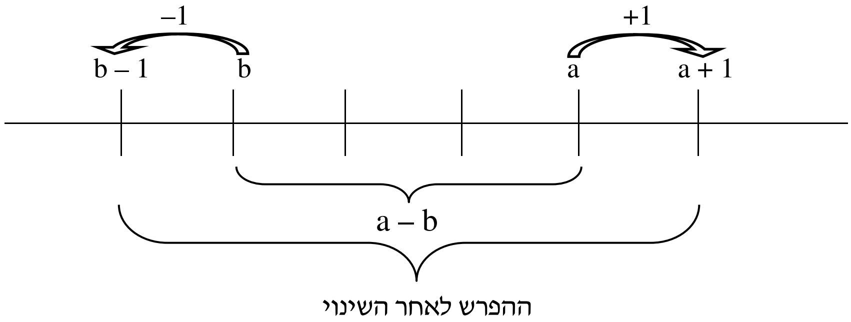
לאחר שחישבנו את כול התשובות, מצאנו שתשובה (4) היא הגדולה ביותר (היחידה שגדולה מ-2).

דרך ג' – שיטת הציר
נעבוד לפי ההבנה של תחומי מספרים. $\frac{1}{2}$ הוא בתחום המספרים שבין 0 ל-1. זהו תחום הפוך – תחום שבו ככל שהחזקה קטנה יותר כך ערך הביטוי גדול יותר. לכן, כדי למצוא את התשובה שערכה הוא הגדול ביותר, נחפש באיזו תשובה $\frac{1}{2}$ עולה בחזקה הקטנה ביותר.
נראה ש- (2-) הוא המעריך הקטן ביותר מבין המעריכים שבתשובות ולכן תשובה (4) היא הגדולה ביותר.

.3 תשובה (3) נכונה. שאלה 6 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הבנה

נתון כי $a > b$. אנו נשאלים איזו פעולה מבין הפעולות שבתשובות תגדיל את ההפרש בין a ל-b ($a – b$). נבין שכדי להגדיל את ההפרש בין הנעלמים, עלינו לקחת מספר גדול יותר ולהחסיר ממנו מספר קטן יותר, כלומר להגדיל את המחוסר ולהקטין את המחסר. ניתן לראות זאת על ציר המספרים:



נראה כי תשובה (3) מתאימה להבנה שהגענו אליה. כדי להגדיל את ההפרש, הגדלנו את a והקטנו את b.

דרך ב' – הצבת מספרים

נתון כי $a > b$. אנו נשאלים איזו פעולה מבין הפעולות שבתשובות תגדיל את ההפרש בין a ל-b ($a – b$). ניתן לבדוק את התשובות באמצעות הצבה נוחה: נציב $a = 2$, $b = 1$.

כעת ההפרש בין a ל-b הוא 1 ($2 – 1$).

נבדוק את התשובות ונראה איזו פעולה תביא להגדלת ההפרש בין a ל-b.

<u>נבדוק את תשובה (1):</u>

הקטנת a ב-1 ⇐ 1. הקטנת b ב-1 ⇐ 0. ההפרש החדש בין a ל-b הוא ⇐ 1 ($1 – 0$).
ההפרש לא גדל, התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (2):</u>

הקטנת a ב-1 ⇐ 1. הגדלת b ב-1 ⇐ 2. ההפרש החדש בין a ל-b הוא ⇐ -1 ($1 – 2$).
ההפרש קטן ולא גדל, התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (3):</u>

הגדלת a ב-1 ⇐ 3. הקטנת b ב-1 ⇐ 0. ההפרש החדש בין a ל-b הוא ⇐ 3 ($3 – 0$).
ההפרש גדל. **תשובה נכונה.**

טיפ: מכיוון שבדקנו את התשובות, ברגע שמצאנו תשובה נכונה אין צורך להמשיך לבדוק את שאר התשובות, אך למען שלמות ההסבר נפסול אותן:

<u>נבדוק את תשובה (4):</u>

הגדלת a ב-1 ⇐ 3. הגדלת b ב-1 ⇐ 2. ההפרש החדש בין a ל-b הוא ⇐ 1 ($3 – 2$).
ההפרש לא גדל, התשובה נפסלת.

4. תשובה (1) נכונה. שאלה 6 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הצבת מספרים

נתון כי $1 < x < y$. אנו מתבקשים לקבוע איזה ביטוי מבין הביטויים בתשובות הוא הגדול ביותר.
לצורך פתרון התרגיל, נציב x ו-y המקיימים את הנתון ונבדוק איזה ביטוי מקבל את הערך הגדול ביותר.
נציב $x = 2$, $y = 3$.

(1) $y^3 \;\Rightarrow\; 3^3 = 27$

(2) $xy^2 \;\Rightarrow\; 2 \cdot 3^2 = 18$

(3) $x^2y \;\Rightarrow\; 2^2 \cdot 3 = 12$

(4) $x^3 \;\Rightarrow\; 2^3 = 8$

לאחר שהצבנו את כל התשובות, מצאנו שתשובה (1) היא בעלת הערך הגדול ביותר.

דרך ב' – הבנה

x ו-y נמצאים בטווח המספרים שגדולים מ-1. לכן כאשר כופלים ב-x או ב-y, ערך הביטוי גדל. מכיוון ש-y גדול מ-x, הכפלה ב-y תגדיל את ערך הביטוי יותר מאשר הכפלה ב-x.
נביט בתשובות ונראה שכול אחת מהתשובות מורכבות מהכפלה של שלושה גורמים.
כאמור, הכפלה ב-y תביא לגדילה המקסימאלית מבין האפשרויות המוצעות, ולכן תשובה (1) שהיא הכפלה של הגורם y שלוש פעמים תביא לתוצאה הגדולה ביותר.
שאר התשובות מערבות הכפלה ב-x שהוא כידוע, קטן מ-y.

5. תשובה (1) נכונה. שאלה 7 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הצבת מספרים

בשאלה ישנם נתונים על a ו-x, ועלינו לקבוע איזו מהטענות שבתשובות נכונה בהכרח. אנו יכולים להציב ערכים עבור a ו-x, ולפסול כל תשובה שלא תתקיים.

$0 < |a| < 1$

הערך המוחלט של a הוא שבר. נציב $a = \frac{1}{2}$. נמצא את ערכו של x בהתאם להצבה זו:

$$x = a^2 \quad \Rightarrow \quad x = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

כעת נציב בתשובות ונפסול כל תשובה שלא תתקיים:

(1) $0 < x < |a| \;\Rightarrow\; 0 < \frac{1}{4} < \frac{1}{2} \quad \Rightarrow$ מתאים.

(2) $|a| < x < 1 \;\Rightarrow\; \frac{1}{2} < \frac{1}{4} < 1 \quad \Rightarrow$ לא מתאים, התשובה נפסלת.

(3) $1 < x < \frac{1}{|a|} \;\Rightarrow\; 1 < \frac{1}{4} < \frac{1}{\frac{1}{2}} \;\Rightarrow\; 1 < \frac{1}{4} < 2 \quad \Rightarrow$ לא מתאים, התשובה נפסלת.

(4) $\frac{1}{|a|} < x \;\Rightarrow\; \frac{1}{\frac{1}{2}} < \frac{1}{4} \;\Rightarrow\; 2 < \frac{1}{4} \quad \Rightarrow$ לא מתאים, התשובה נפסלת.

פסלנו 3 תשובות, ועל כן תשובה (1) נכונה.

דרך ב' – הבנה

נתבונן בנתונים ונסיק מהם מה נכון בהכרח באשר לקשר שבין x לבין הערך המוחלט של a.

נתון: $0 < |a| < 1$, כלומר a הוא שבר חיובי או שלילי. כמו כן, נתון: $x = a^2$, שבר המועלה בחזקת 2 קטֵן.

ולכן $x < |a|$. a^2 הוא בהכרח חיובי, ועל כן גם x חיובי - $0 < x$.

לסיכום: $0 < x < |a|$.

6. תשובה (4) נכונה. שאלה 8 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הצבת מספרים

נתון כי $0 < x < y < \frac{1}{2}$. אנו מתבקשים לקבוע איזו תשובה מבין התשובות המוצעות היא הגדולה ביותר.

נציב במקום הנעלמים שברים המקיימים את הנתון. שימו לב, מכיוון שבחלק מהתשובות אנו נדרשים לחבר את השברים, נעדיף להציב מספרים בעלי מכנה משותף, למשל $x = \frac{1}{8}$ ו-$y = \frac{1}{4} = \frac{2}{8}$.
עתה נציב בתשובות את ערכי הנעלמים שבחרנו ונחפש את התשובה בעלת הערך הגדול ביותר.

(1) $x^2 + y^2 \;\Rightarrow\; \left(\frac{1}{8}\right)^2 + \left(\frac{2}{8}\right)^2 = \frac{1}{64} + \frac{4}{64} = \frac{5}{64}$

(2) $2y \;\Rightarrow\; 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

(3) $x + y \;\Rightarrow\; \frac{1}{8} + \frac{2}{8} = \frac{3}{8}$

(4) $\frac{y}{x} \;\Rightarrow\; \frac{\frac{2}{8}}{\frac{1}{8}} = \frac{2 \cdot 8}{1 \cdot 8} = 2$

לאחר שהצבנו את התשובות, מצאנו שתשובות (1), (2) ו-(3) הן שברים פשוטים ואילו תשובה (4) גדולה מ-1. לכן, הביטוי בתשובה (4) הוא הגדול ביותר.

דרך ב' – הבנה

נתון ש-x ו- y הם שברים פשוטים חיוביים הקטנים מ-$\frac{1}{2}$. אנו נדרשים לקבוע איזו תשובה היא בעלת הערך הגדול ביותר. לצורך כך, נביט בתשובות וננסה להבין כיצד כל פעולה משפיעה עליהן.

נבדוק את תשובה (1): כאשר אנו מעלים שבר פשוט (קטן מ-1) בחזקה, אנו למעשה מקטינים את ערכו. משום שהפעולה שאנו מבצעים היא הכפלה בשבר. לכן בהשוואה לתשובה (3), ערכה של תשובה (1) קטן יותר. שכן כאמור, אם נעלה את שני השברים בחזקת 2, ואז נסכום אותם, אנו מחברים בין שני שברים הקטנים יותר מן השברים המקוריים.

נבדוק את תשובה (2): כופלים את y (הנעלם הגדול מבין השניים) ב-2. אך מכיוון ש-y קטן מחצי, לאחר שנכפול אותו ב-2 נקבל מכפלה הקטנה מ-1. (חצי כפול 2 שווה בדיוק 1, אז שבר הקטן מחצי כפול 2 ייתן מכפלה הקטנה מ-1).

נבדוק את תשובה (3): אנו סוכמים שני שברים הקטנים מחצי ולכן הסכום שלהם יהיה קטן מ-1.

נבדוק את תשובה (4): y גדול מ-x. לכן, כאשר נחלק את y ב-x נקבל שבר מדומה (שבר בו המונה גדול מהמכנה) – שבר שערכו גדול מ-1.

לאחר שהערכנו את ערכן של כל התשובות, נוכל לקבוע בוודאות, שתשובה (4) היא התשובה היחידה שגדולה מ-1 ולכן היא התשובה הגדולה ביותר.

7. תשובה (2) נכונה. שאלה 16 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הצבת מספרים

נתון כי $-1 < x < 0$. אנו מתבקשים לקבוע איזה ביטוי מבין הביטויים בתשובות הוא הגדול ביותר.
לצורך פתרון התרגיל, נציב x המקיים את הנתון ונבדוק איזה ביטוי מקבל את הערך הגדול ביותר.
נציב $x = -\frac{1}{2}$.

(1) $\frac{1}{x} \Rightarrow \frac{\frac{1}{1}}{-\frac{1}{2}} = -\frac{2}{1} = -2$

(2) $x^3 \Rightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{1}{8}$

(3) $3x \Rightarrow 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1\frac{1}{2}$

(4) $x \Rightarrow -\frac{1}{2}$

לאחר שהצבנו את כל התשובות, מצאנו שתשובה (2) היא בעלת הערך הגדול ביותר.

דרך ב' – הבנה

נתון כי $-1 < x < 0$. אנו מתבקשים לקבוע איזה ביטוי מבין הביטויים בתשובות הוא הגדול ביותר.

<u>נבדוק את תשובה (1):</u> $\frac{1}{x}$ זה המספר ההופכי של x. מכיוון ש-x הוא שבר פשוט שלילי, ההופכי שלו הוא שבר מדומה שלילי. לפיכך תשובה (1) מרחיקה את x מ-0 ובכך מביאה להקטנתו.

<u>נבדוק את תשובה (2):</u> כאשר אנו מעלים שבר פשוט בחזקה, אנו מחשבים חלק מתוך חלק ומקרבים אותו ל-0. לכן, פעולה זו מגדילה את ערכו של x.

<u>נבדוק את תשובה (3):</u> הכפלה של מספר באיבר הגדול מ-1 (במקרה זה 3) מביאה להרחקתו מ-0 ולהקטנת ערכו.

<u>נבדוק את תשובה (4):</u> בבדיקה לעיל, השווינו את הערך של הביטוי בתשובות לזה של x. ראינו שרק בתשובה (2), הפעולה שבוצעה הגדילה את ערכו של x, לכן ניתן לקבוע שתשובה (2) גדולה מ-x עצמו ומשאר התשובות (שהן קטנות מ-x).

דרך ג' – שיטת הציר

נתון כי $-1 < x < 0$. אנו מתבקשים לקבוע איזה ביטוי מבין הביטויים בתשובות הוא הגדול ביותר.
x נמצא בתחום השברים השליליים שהוא תחום ישר – ככל שהחזקה גדלה כך הערך המספרי של האיבר גדל.
תשובה (1) היא $\frac{1}{x}$. כדי לעבוד עם שיטת הציר, נצטרך להמירה ל-x בחזקת משהו. ידוע כי חזקה שלילית הופכת מונה ומכנה, ולכן $\frac{1}{x} \Leftarrow x^{-1}$.
תשובות (1), (2) ו-(4) הן x בחזקת מספר ולכן נוכל להשוות ביניהן לפי שיטת הציר. כאמור, ככל שהחזקה של x תגדל כך ערך האיבר יגדל. מבין האופציות הנ"ל, המעריך 3 הוא המעריך הגדול ביותר ולכן תשובה (2) גדולה מתשובות (1) ו-(4).

תשובה (3) אינה ניתנת להשוואה באמצעות שיטת הציר משום שהפעולה בה היא כפל ולא חזקה. לכן נבין כיצד הפעולה משפיעה על x שהוא שבר פשוט שלילי. הכפלה ב-3 מרחיקה את השבר השלילי מ-0 ובכך מקטינה אותו, ואילו העלאה של שבר בחזקה מקרבת אותו ל-0 ומגדילה אותו. לכן בהשוואה בין תשובה (2) לתשובה (3), תשובה (2) גדולה יותר.

8. תשובה (4) נכונה. שאלה 17 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הצבת תשובות

נתון כי $x^3 < x < x^2$. אנו מתבקשים לקבוע באיזה תחום מספרים נמצא x.

נציב ערכים של x לפי הטווחים בתשובות ונבדוק איזה טווח מקיים את הנתון.

טיפ: בהצבת תשובות, כדאי להתחיל בתשובות הנוחות יותר.

לא מתאים, התשובה נפסלת $\Rightarrow$ (1) $x = 2 \Rightarrow 2^3 < 2 < 2^2 \Rightarrow 8 < 2 < 4$

מתאים $\Rightarrow$ (4) $x = -2 \Rightarrow (-2)^3 < -2 < (-2)^2 \Rightarrow -8 < -2 < 4$

טיפ: מכיוון שהצבנו את התשובות, ברגע שמצאנו תשובה נכונה אין צורך להמשיך לבדוק את שאר התשובות, אך למען שלמות ההסבר נפסול אותן:

לא מתאים, התשובה נפסלת $\Rightarrow$ (2) $x = \frac{1}{2} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^3 < \frac{1}{2} < \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow \frac{1}{8} < \frac{1}{2} < \frac{1}{4}$

לא מתאים, התשובה נפסלת $\Rightarrow$ (3) $x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)^3 < -\frac{1}{2} < \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow -\frac{1}{8} < -\frac{1}{2} < \frac{1}{4}$

דרך ב' – הבנה

נבחן את מערכת האי-שוויונות הנתונה בשאלה.

ניתן לראות ש-x^2 גדול הן מ-x^1 הן מ-x^3. היינו מצפים שחזקה תגדיל את המספר או שמא תקטין אותו, אך בתרגיל זה לכאורה אין חוקיות כלל, שהרי 2 קטן מ-3 וגדול מ-1, אולם כאשר x עולה בחזקת 2 הוא הופך להכי גדול. עם זאת, 2 הוא מספר זוגי ואנו יודעים שחזקה זוגית הופכת מספר שלילי למספר חיובי. לפיכך, ניתן להבין שחוסר החוקיות בסדר החזקות נובע מכך ש-x הוא שלילי וחזקת 2 הופכת אותו לחיובי.

עתה נשאר לנו לקבוע האם x נמצא בתחום השברים הפשוטים השליליים או במספרים הקטנים מ-1-.

לצורך כך נבחן את חלקה השמאלי של מערכת האי-שוויונות: $x^3 < x^1$.

בחלק השלילי של ציר המספרים, הגדלים עובדים הפוך מאשר בחלק החיובי. ככל שהערך המספרי גדול יותר, כך המספר קטן יותר. כלומר כדי ש-x^1 יהיה גדול מ-x^3, הערך המספרי שלו צריך להיות קטן יותר. מכאן ניתן להבין שהחזקה השלישית הגדילה את ערכו המספרי של x. לפיכך, x חייב להיות בעל ערך מספרי שגדול מ-1 (בצד השלילי של ציר המספרים) כדי שהחזקה תגדיל את ערכו המספרי (שכן חזקה מקטינה שברים), כלומר $\Leftarrow$ $x < -1$.

דרך ג' – שיטת הציר

נבחן את מערכת האי-שוויונות הנתונה בשאלה.

נתחיל מחלקה השמאלי: $x^3 < x^1$.

לפי הנתון, x נמצא בתחום הפוך – ככל שהחזקה <u>קטנה</u>, כך ערך הביטוי <u>גדל</u>.

התחומים שמקיימים עקרון זה הם: $0 < x < 1$, $x < -1$.

נעבור לבדוק את חלקה הימני של מערכת האי-שוויונות: $x^1 < x^2$.

לכאורה מכאן אנו מבינים שהתחום בו המספרים נמצאים הוא תחום ישר – ככל שהחזקה גדלה, כך גם הביטוי גדל, אך כבר הוכחנו שמדובר בתחום הפוך. נשים לב, שהמעריך 2 הוא מעריך זוגי. אנו יודעים שבמספרים שליליים, חזקה זוגית מגדילה את האיבר (הופכת אותו לחיובי).

על כן, תחום המספרים הנתון צריך להיות שלילי. מבין שתי האופציות שהגענו אליהן בחלק הקודם של ההסבר, רק תחום אחד הוא שלילי $\Leftarrow$ $x < -1$.

9. תשובה (2) נכונה. שאלה 19 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הצבת מספרים

נתון: $2a < x < a$. ננסה למצוא הצבה המקיימת את האי-שוויון ונראה כי הוא מתקיים רק כאשר a שלילי. נציב $a = -2$ ונקבל ש-x נמצא בין (-2) לבין (-4). לפיכך, נציב את x כ-(-3).

נציב את הנעלמים במקום התשובות ($a = -2$, $x = -3$) ונבדוק לאיזו תשובה יהיה הערך הגדול ביותר.

(1) $a^2 = (-2)^2 = 4$

(2) $x^2 = (-3)^2 = 9$

(3) $(x - a)^3 = \left(-3 - (-2)\right)^3 = (-3 + 2)^3 = (-1)^3 = -1$

(4) $a^3 = (-2)^3 = -8$

לפי ההצבה שביצענו קיבלנו כי הביטוי בתשובה (2) הוא הגדול ביותר, ולכן זו התשובה הנכונה.

דרך ב' – הבנה

נתחיל לסדר את הנתון כדי ללמוד על ערכם של הנעלמים. נראה כי ישנם שני אגפים שבהם יש את אותו הנעלם - a, לכן נפתור את האי-שוויון בהתחשב באגפים אלו בלבד:

$2a < a$

$a < 0$

לפיכך, a שלילי, ולכן גם x שלילי (הוא קטן מ-a).

עתה, כדי לקבוע איזו תשובה הכי גדולה, נבדוק באיזה תחום מספרים נמצאת תשובה (3) ואז נראה כיצד משפיעות החזקות על כל תשובה.

מכיוון ש-x קטן מ-a ושניהם קטנים מ-0 הערך המספרי של x (בערך מוחלט) גדול משל a. לכן כאשר נחסר מ-x את a נקבל מספר שלילי.

לפיכך, תשובות (3) ו-(4) הן איברים שליליים בחזקה אי-זוגית ולכן הם יישארו שליליים. לעומת זאת, האיברים בתשובות (1) ו-(2) עולים בחזקה זוגית ולכן הם יהפכו לחיוביים. אנו מחפשים את הביטוי הגדול ביותר, ולכן תשובות (3) ו-(4) נפסלות.

כעת, משום שערכו המוחלט של x גדול משל a, כאשר הם יעלו בריבוע תוצאת הביטוי x^2 תהיה גדולה מערכו של a^2.

10. תשובה (2) נכונה. שאלה 20 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הצבת מספרים

נתון כי $-1 < K < 0 < M < 1$. אנו מתבקשים לקבוע איזה ביטוי מבין הביטויים בתשובות הוא הקטן ביותר.
לצורך פתרון התרגיל, נציב M ו-K המקיימים את הנתון ונבדוק איזה ביטוי מקבל את הערך הקטן ביותר.
נציב $M = \frac{1}{2}$, $K = -\frac{1}{2}$.

(1) 0

(2) $K \cdot M \;\; \Rightarrow -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$

(3) $K^2 \cdot M^2 \;\; \Rightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$

(4) $K^3 \cdot M^3 \;\; \Rightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} = -\frac{1}{64}$

לאחר שהצבנו את כל התשובות, מצאנו שתשובה (2) היא בעלת הערך הקטן ביותר.

דרך ב' – הבנה

לפי הנתון ניתן להבין ש-M הוא שבר פשוט חיובי ו-K הוא שבר פשוט שלילי. אנו מתבקשים לקבוע איזה ערך מבין הערכים שבתשובות הוא הקטן ביותר. נבחן את התשובות ונראה מה אנחנו יכולים לקבוע לגבי ערך הביטוי.

תשובה (2) היא הכפלה של שבר חיובי בשבר שלילי ולכן המכפלה שלילית.
תשובה (3) היא העלאה בריבוע של שני הנעלמים. חזקה זוגית הופכת איבר שלילי לאיבר חיובי, ולכן תוצאת המכפלה בתשובה (3) היא חיובית.
תשובה (4) היא העלאה בחזקה שלישית של שני השברים. חזקה אי-זוגית אינה משפיעה על הסימן של השבר ולכן המכפלה תישאר שלילית.

מההסתכלות הכללית הנ"ל, הצלחנו לקבוע שתשובות (2) ו-(4) הן תשובות שליליות ואילו התשובות האחרות הן חיוביות או אפס. לפיכך, עלינו להכריע איזו תשובה הכי קטנה רק מבין (2) ו-(4).

כאמור, הכפלת שבר חיובי בשבר שלילי תביא לתוצאה שהיא שבר שלילי.
בתשובה (4) מעלים את השבר המתקבל ממכפלת הנעלמים בחזקת שלוש:

$$K^3 \cdot M^3 = (K \cdot M)^3$$

כאשר מעלים שבר שלילי בחזקה אי זוגית אנחנו למעשה מחשבים חלק מחלק והשבר מתקרב ל-0 ובכך גדל. מכאן שתשובה (4) גדולה יותר מתשובה (2). משמע, תשובה (2) היא הקטנה ביותר.

תרגילים באותיות

בשאלות אלו אנו מקבלים תרגיל חשבון בו הספרות הוחלפו באותיות A, B ו-C, ואנו מתבקשים לענות על שאלה כלשהי בנוגע לתרגיל.

חשוב לשים לב האם האותיות מייצגות ספרות שונות או לא
(תמיד יהיה רשום בנתוני השאלה)

טכניקת עבודה

1. **כתיבה במאונך** - נרשום את התרגיל במאונך כדי שיהיה קל יותר להסיק מסקנות לגבי האותיות ואילו ספרות הן מייצגות.
2. **ספרת אחדות** - בדרך כלל נבדוק תחילה את ספרת האחדות של המספרים המופיעים בתרגיל, ונראה מה נוכל להסיק מהן.
3. **ספרה שמאלית** - לאחר בדיקת ספרת האחדות, נפנה לספרה השמאלית ביותר של המספרים, ונראה מה נוכל ללמוד ממנה.
4. **הצבה** - לאחר שסיימנו לדלות את כל מה שאנחנו יכולים על הספרות והאותיות, נשאר לנו רק להציב ולנסות למצוא את התשובה, בהתאם למגבלות שמצאנו.

דוגמה:

A, B, C ו-D הן אותיות המייצגות ספרות שונות מתוך הספרות 0 עד 9.

נתון : $AB + AD = CDB$

$A + C + D = ?$

פתרון -

ראשית נכתוב את התרגיל במאונך :

$+\,AB$
$\underline{\;\;AD}$
CDB

מבדיקת ספרת האחדות ניתן להסיק כי $D = 0$ (הוספנו את D ל-B ונשארנו עם B, זאת אומרת שלא התווסף ל-B כלום, בעצם הוספנו אפס).

מבדיקת הספרות השמאליות אנו רואים כי $A + A = CD$.

כאשר מחברים שני מספרים חד-ספרתיים, ספרת העשרות של התוצאה (C) חייבת להיות 1.

מצאנו D מייצגת את 0 ו-C מייצגת את 1, ולכן ההצבה היחידה האפשרית היא ש-A מייצגת את 5 ($5 + 5 = 10$).

והתרגיל המלא :

$+\,5B$
$\underline{\;\;50}$
$10B$

$A + C + D = 5 + 1 + 0 = 6$

ספרה שמאלית לא יכולה להיות שווה 0

ספרות מיוחדות

ישנן כמה ספרות מיוחדות בעלות תכונות שונות, שההיכרות עמן יכולה לסייע לנו בפתרון השאלות.

ספרות מיוחדות - 0 , 1 , 5 , 6

1) כאשר מעלים אותן בריבוע (מכפילים אותן בעצמן), ספרת האחדות לא משתנה:

$6 \cdot 6 = 36$ $\quad 5 \cdot 5 = 25$ $\quad 1 \cdot 1 = 1$ $\quad 0 \cdot 0 = 0$

2) כאשר כופלים את 0 בכל מספר שהוא, התוצאה תמיד תהיה 0.

3) כאשר כופלים את 1 בכל מספר שהוא, התוצאה תהיה המספר עצמו.

4) כאשר כופלים את 5 במספרים זוגיים, ספרת האחדות של התוצאה תהיה 0, וכאשר מכפילים את 5 במספרים אי-זוגיים, ספרת האחדות תהיה 5:

ספרת אחדות $= 0 \quad \Leftarrow \quad$ זוגי $\cdot 5$

ספרת אחדות $= 5 \quad \Leftarrow \quad$ א"ז $\cdot 5$

5) כאשר כופלים את 6 במספרים זוגיים, ספרת האחדות של התוצאה תהיה זהה לספרת האחדות של המספר בו כפלנו:

$6 \cdot 8 = 48$ $\quad 6 \cdot 6 = 36$ $\quad 6 \cdot 4 = 24$ $\quad 6 \cdot 2 = 12$

דוגמה:

נתון: $BA \cdot A = CA$

מה מהבאים **יכול להיות** הערך של A ?

(1) 0 (2) 2 (3) 3 (4) 5

פתרון -

ניתן לראות כי ספרת האחדות כפול עצמה נשארת זהה, ולכן היא חייבת להיות אחת מהספרות המיוחדות. מכיוון שהצבה של אפס אינה מתאימה (התוצאה היתה צריכה להיות אפס), האות A יכולה לייצג רק את הספרות 1, 5 או 6 ולכן התשובה הנכונה היא תשובה (4).

הצבת מספרים

בהרבה מקרים, הדרך המהירה ביותר לפתור את השאלה היא להציב מספרים במקום לנסות ולפתור בדרך מתמטית.

דוגמה:

תוצאת הביטוי $AB - BA$ מתחלקת בהכרח ב-

(1) 11 (2) 6 (3) 9 (4) 4

פתרון -

נציב מספרים ונפסול תשובות:

נציב: $AB = 51 \leftarrow 51 - 15 = 36 \leftarrow$ נפסול את תשובה (1).

נציב: $AB = 52 \leftarrow 52 - 25 = 27 \leftarrow$ נפסול את (2) ואת (4).

תשובה (3) נכונה.

הצגה אלגברית

הצגה אלגברית היא פירוק של המספר לספרות בהתאם למיקום כל ספרה (אחדות, עשרות, מאות וכדומה). באמצעות הצגה אלגברית ניתן לפתור חלק מהשאלות בצורה מתמטית במקום בהצבה. ברוב המקרים דרך זו תהיה ארוכה יותר מהצבת מספרים, אך כדאי להבין מהי הצגה אלגברית של מספר.

למשל, המספר 27 מורכב מ-2 עשרות ומ-7 אחדות. על-מנת להגיע למספר עצמו, נכפול את 2 ב-10 ונוסיף את 7:

$$27 = 2 \cdot 10 + 7$$

$$538 = 5 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 8$$

$$AB = A \cdot 10 + B$$

$$ABC = A \cdot 100 + B \cdot 10 + C$$

ניתן להיעזר בשיטה זו לפתרון חלק מהתרגילים. נפתור את השאלה הקודמת בשיטה זו:

$$AB - BA = (A \cdot 10 + B) - (B \cdot 10 + A) = 10A + B - 10B - A = 9A - 9B = 9(A - B)$$

ניתן לראות כי התוצאה תמיד תתחלק ב-9.

מומלץ להפוך תרגיל חיסור לתרגיל חיבור

$$\begin{array}{cr} & AA \\ - & BB \\ \hline & BB \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{cr} & BB \\ + & BB \\ \hline & AA \end{array}$$

כאשר מחברים שני מספרים, וספרת האחדות של התוצאה שווה לספרת האחדות של אחד המספרים - ספרת האחדות של המספר השני היא 0:

$$\begin{array}{cr} & A\mathbf{B} \\ + & A\mathbf{C} \\ \hline & DC\mathbf{B} \end{array} \quad \Rightarrow \quad C = 0$$

אם מספר הספרות של תוצאת תרגיל חיבור גדול ממספר הספרות של המספרים המחוברים - הספרה השמאלית של התוצאה = 1

$$\begin{array}{cr} & \_\,\_ \\ + & \_\,\_ \\ \hline & \_\,\_\,\_ \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{cr} & \_\,\_ \\ + & \_\,\_ \\ \hline & 1\_\,\_ \end{array}$$

תרגול שאלות מבחינות אמת

1. A הוא מספר חיובי דו-ספרתי, B הוא מספר חיובי תלת-ספרתי.

מה נכון בנוגע למספר $(A + B)$?

(1) הוא יכול להיות תלת-ספרתי בלבד
(2) הוא יכול להיות ארבע-ספרתי בלבד
(3) הוא יכול להיות דו-ספרתי או תלת-ספרתי
(4) הוא יכול להיות תלת-ספרתי או ארבע-ספרתי

---

2. האותיות A ו-B מייצגות שתי ספרות שונות זו מזו מבין הספרות 1 עד 9.

נתון:

$$\begin{array}{r} AB \\ \times \quad 2 \\ \hline B0 \end{array}$$

$B - A = ?$

(1) 1
(2) 2
(3) 3
(4) 4

---

3. A, B ו-C הן אותיות המייצגות ספרות **עוקבות**, $A < B < C$.

נתון:

$$\begin{array}{r} C \\ + \quad B \\ \hline 1A \end{array}$$

$A + B + C = ?$

(1) 27 (2) 24 (3) 21 (4) 18

---

4. A ו-B הן אותיות המייצגות ספרות שונות מתוך הספרות 1 עד 9.

נתון: $AB - BA = 9$

$A - B = ?$

(1) 1
(2) 2
(3) 3
(4) 4

פתרתי ______________ שאלות ב ______________ דקות, ______________ תשובות נכונות

5. A ו-B הן אותיות המייצגות ספרות בין 1 ל-9.

נתון:
$$\begin{array}{r} AB \\ \times\quad B \\ \hline B9 \end{array}$$

$A + B = ?$

(1) 10 (2) 9 (3) 5 (4) 4

---

6. A, B ו-C הן שלוש ספרות עוקבות כך ש- $A < B < C$.

נתון:
$$\begin{array}{r} ABC \\ +\ AAA \\ \hline E00 \end{array}$$

(הערה: E00 הוא מספר תלת ספרתי שספרת האחדות וספרת העשרות שלו הן אפס.)

$A = ?$

(1) 5 (2) 2 (3) 3 (4) 4

---

7. x הוא מספר ארבע-ספרתי שהוא סכום של שלושה מספרים תלת-ספרתיים.

מה מהבאים יכולה להיות ספרת האלפים של x?

(1) 5
(2) 2
(3) 3
(4) 4

---

8. A, B, C ו-D הן אותיות המייצגות ספרות עוקבות ($A < B < C < D$).
AB ו-CD הם שני מספרים דו-ספרתיים.
נתון: $k = AB + CD + 9$

באיזה מהמספרים הבאים k מתחלק בהכרח?

(1) 11
(2) 2
(3) 3
(4) 9

---

9. n הוא המספר התלת-ספרתי הגדול ביותר שסכום הספרות שלו 11.
m הוא המספר התלת-ספרתי הקטן ביותר שסכום הספרות שלו 11.

$n - m = ?$

(1) 702
(2) 721
(3) 801
(4) 882

---

10. x הוא מספר דו-ספרתי שספרת האחדות שלו היא 5. אם הופכים את סדר הספרות של x, מתקבל מספר הגדול פי 2 מ-$(x + 1)$.

מה סכום הספרות של המספר x ?

(1) 7 (2) 9 (3) 11 (4) 13

---

11. A, B ו-C הן אותיות המייצגות ספרות בין 1 ל-9.

$$\frac{AB + BC + CA}{A + B + C} = ?$$

(1) 11
(2) 22
(3) 9
(4) אי-אפשר לדעת לפי הנתונים

---

12. נתונים שני מספרים תלת-ספרתיים שונים המורכבים מאותן ספרות.
ספרת העשרות בשני המספרים שווה.
באחד המספרים ספרת המאות גדולה ב-3 מספרת האחדות.

מה ההפרש בין שני המספרים התלת-ספרתיים?

(1) 207
(2) 297
(3) 311
(4) 313

פתרתי ____________ שאלות ב ____________ דקות, ____________ תשובות נכונות

.13 האותיות A ו-B מייצגות שתי ספרות שונות זו מזו מבין הספרות 1 עד 9.

נתון:
$$\begin{array}{r} AB \\ + \quad B \\ \hline BA \end{array}$$

$A = ?$

(1) 1 (2) 5 (3) 6 (4) 8

.14 A, B ו-C הן אותיות המייצגות ספרות שונות בין 1 ל-9.

נתון:
$$\begin{array}{r} ABC \\ - \; BBB \\ \hline 99 \end{array}$$

$A - C = ?$

(1) 1
(2) 2
(3) 3
(4) 4

.15 A ו-B הן אותיות המייצגות ספרות **שונות** בין 0 ל-8.

נתון:
$$\begin{array}{r} 1A \\ \times \quad B \\ \hline AB \end{array}$$

$A = ?$

(1) 6
(2) 7
(3) 3
(4) 4

.16 A, B ו-C הן אותיות המייצגות ספרות שונות בין 0 ל-9.

נתון:
$$\begin{array}{r} AA \\ \times \; BB \\ \hline ACA \end{array}$$

איזה מן המספרים הבאים יכול להיות AA ?

(1) 77
(2) 66
(3) 55
(4) 44

פתרתי ____________ שאלות ב ____________ דקות, ____________ תשובות נכונות

17. A ו-B הן אותיות המייצגות שתי ספרות **שונות** מתוך הספרות 1 עד 6.

נתון: שארית החלוקה של המספר AB ב-11 קטנה מ-3.

A לא יכול להיות שווה ל-

(1) 1
(2) 2
(3) 5
(4) 6

---

18. A ו-B הן אותיות המייצגות ספרות בין 1 ל-9.
המספר AB הוא מספר דו-ספרתי **ראשוני**.

נתון: סכום הספרות של AB גדול **פי** 5 מספרת האחדות שלו.

$A + B = ?$

(1) 11
(2) 10
(3) 7
(4) 5

---

19. A ו-B הן אותיות המייצגות ספרות שונות מתוך הספרות 0 עד 9.

נתון: $BB = \frac{BBBB}{BAB}$, $B \neq 0$

$A = ?$

(1) 1
(2) 2
(3) 5
(4) 0

---

20. A ו-B הן אותיות המייצגות ספרות בין 1 ל-9.

$$\begin{array}{r} 1AB \\ -\ BA \\ \hline B1 \end{array}$$

$A + B = ?$

(1) 11 (2) 13 (3) 15 (4) 17

פתרתי ____________ שאלות ב ____________ דקות, ____________ תשובות נכונות

תשובות

שאלה	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
תשובה	4	3	2	1	4	4	2	1	3	1

שאלה	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
תשובה	1	2	4	2	1	4	4	4	4	4

פתרתי 20 שאלות - ______________ נכונות, ______________ אחוזי הצלחה

1. תשובה (4) נכונה. שאלה 2 מתוך 20 בפרק.

A הוא מספר חיובי דו-ספרתי, ו-B הוא מספר חיובי תלת-ספרתי. עלינו לקבוע כמה ספרות יכולות להיות במספר (A + B). לשם כך, נמצא את התחום האפשרי עבור (A + B).

הערך המינימלי האפשרי יהיה סכומם של המספר הדו-ספרתי הקטן ביותר, $A = 10$, ושל המספר התלת-ספרתי הקטן ביותר, $B = 100$. כלומר, 110.

הערך המקסימלי האפשרי יהיה סכומם של המספר הדו-ספרתי הגדול ביותר, $A = 99$, ושל המספר התלת-ספרתי הגדול ביותר, $B = 999$. כלומר, 1,098.

לפיכך, המספר (A + B) יכול להיות תלת-ספרתי או ארבע-ספרתי.

---

2. תשובה (3) נכונה. שאלה 3 מתוך 20 בפרק.

עלינו למצוא את ההפרש בין B ל-A. לשם כך, נחפש מספרים המקיימים את התרגיל הנתון. מהתבוננות בספרת האחדות, נגלה כי המכפלה של B ב-2 צריכה להסתיים ב-0. הספרות היחידות שיכולות לקיים זאת הן 0 ו-5. ידוע לנו שהאותיות A ו-B מייצגות ספרות שונות מבין הספרות 1 עד 9, ולכן לא ייתכן ש-B מייצגת את הספרה 0. משמע, $B = 5$.

$$\begin{array}{r} AB \\ \times\ \ 2 \\ \hline B\,0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{r} A5 \\ \times\ \ 2 \\ \hline 5\,0 \end{array}$$

לכן, A מייצגת את הספרה 2, שכן $25 \cdot 2 = 50$. כעת ניתן למצוא את ההפרש בין B ל-A:

$$B - A = 5 - 2 = 3$$

.3 תשובה (2) נכונה. שאלה 5 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – ניסוי וטעייה
חיבורן של שתי ספרות יצר סכום דו-ספרתי. על כן, ניתן להסיק כי שתי הספרות הללו הן גדולות (סכומן גדול מ-10). בעקבות מסקנה זו נתחיל בבדיקת 3 הספרות העוקבות הגדולות ביותר:
7, 8 ו-9.

$9 + 8 = 17$

קיבלנו פסוק אמת, ועל כן הספרות שבחרנו אכן מקיימות את הנתונים. כעת נמצא את סכומן של 3 הספרות:
$7 + 8 + 9 = 24$

דרך ב' – הצבת תשובות
בתשובות נתון סכומן של 3 ספרות עוקבות. באמצעות הסכום ניתן למצוא את הספרה האמצעית – שהיא גם הממוצע של הספרות הללו.

נבדוק את תשובה (1):
סכום הספרות הוא 27 ולכן הממוצע שלהן הוא 9 $\left(\frac{27}{3}\right)$. כלומר, הספרה האמצעית היא 9 ועל כן 3 הספרות הן: 8, 9 ו-10. 10 הוא לא ספרה, ולכן התשובה נפסלת.

נבדוק את תשובה (2):
סכום הספרות הוא 24 ולכן הממוצע שלהן הוא 8 $\left(\frac{24}{3}\right)$. כלומר, הספרה האמצעית היא 8 ועל כן 3 הספרות הן: 7, 8 ו-9. נציב ספרות אלו במשוואה: $9 + 8 = 17$. קיבלנו פסוק אמת, ועל כן זו **התשובה הנכונה**.

טיפ: מכיוון שהצבנו את התשובות, ברגע שמצאנו תשובה נכונה אין צורך להמשיך לבדוק את שאר התשובות, אך למען שלמות ההסבר נפסול אותן:

נבדוק את תשובה (3):
סכום הספרות הוא 21 ולכן הממוצע שלהן הוא 7 $\left(\frac{21}{3}\right)$. כלומר, הספרה האמצעית היא 7 ועל כן 3 הספרות הן: 6, 7 ו-8. נציב ספרות אלו במשוואה: $8 + 7 = 16$. קיבלנו פסוק שקר, ועל כן התשובה נפסלת.

נבדוק את תשובה (4):
סכום הספרות הוא 18 ולכן הממוצע שלהן הוא 6 $\left(\frac{18}{3}\right)$. כלומר, הספרה האמצעית היא 6 ועל כן 3 הספרות הן: 5, 6 ו-7. נציב ספרות אלו במשוואה: $7 + 6 = 15$. קיבלנו פסוק שקר, ועל כן התשובה נפסלת.

.4 תשובה (1) נכונה. שאלה 5 מתוך 20 בפרק.

נאמר ש-A ו-B הן ספרות שונות המקיימות את הנתון הבא: $AB - BA = 9$. אנו מתבקשים למצוא את ההפרש בין A ל-B. אין מגבלות עבור הספרות למעט היותן שונות זו מזו, ולכן ננסה להציב מספרים שיקיימו את הנתון. ישנן 4 תשובות מספריות, ולכן הצבה אחת תספיק בוודאות.

נתחיל ממספרים קטנים, כאשר A גדול מ-B (לפי התשובות, ההפרש צריך להיות חיובי).
נציב: $A = 2$,$B = 1$. כלומר, $21 - 12 = 9$. מספרים אלו מקיימים את הנתונים. ההפרש ביניהם הוא 1 ועל כן זו התשובה הנכונה.

---

5. תשובה (4) נכונה. שאלה 6 מתוך 20 בפרק.

עלינו למצוא את סכום הספרות A ו-B. ננסה למצוא זוג מספרים המקיימים את התרגיל הנתון. נתמקד בספרת האחדות ונסיק ממנה מידע באשר לנעלמים. על סמך התרגיל הנתון, מכפלת הספרה B בעצמה מסתיימת ב-9 (או שווה ל-9). בלוח הכפל ישנם שני מצבים שהמכפלה של איבר בעצמו נותנת ספרת אחדות 9:

$3 \cdot 3 = 9$
$7 \cdot 7 = 49$

לכן, ייתכן ש-B מייצגת את הספרה 3. נבדוק זאת:

$$\begin{array}{r} AB \\ \times\ \ B \\ \hline B9 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{r} A3 \\ \times\ \ 3 \\ \hline 39 \end{array}$$

לפיכך, A מייצגת את הספרה 1, וסכומן של A ו-B הוא 4 ($A + B = 1 + 3$).

מצאנו שהמצב מתאפשר כאשר $B = 3$. לכן זוהי התשובה הנכונה וניתן לסמנה. אין צורך לבדוק מה קורה כאשר $B = 7$.

6. תשובה (4) נכונה. שאלה 9 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הצבת התשובות

לפנינו חיבור של שני מספרים תלת ספרתיים שסכומם תלת ספרתי. המספרים מבוטאים באמצעות הספרות העוקבות A, B ו-C. ספרת האחדות וספרת העשרות של הסכום היא 0. עלינו לקבוע מה ערכה של הספרה A.
מכיוון שהספרות A, B ו-C הן ספרות עוקבות, אם נדע מהי הספרה A נוכל להסיק מה ערכן של B ו-C. נציב את התשובות ונבדוק איזו תשובה מקיימת את התרגיל הנתון.

<u>נבדוק את תשובה (1):</u> $A = 5 \Rightarrow B = 6 , C = 7$.
תרגיל החיבור שנוצר הוא: $555 + 567$. התוצאה תהיה בת ארבע ספרות (שכן היא תהיה גדולה מ-1,000) ולכן אינה מתאימה למבנה E00. התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (2):</u> $A = 2 \Rightarrow B = 3 , C = 4$.
תרגיל החיבור שנוצר הוא: $222 + 234$. ספרת האחדות של התוצאה היא 6 ולא 0 ולכן התוצאה לא מתאימה למבנה המבוקש E00 (כמו כן, ספרת העשרות תהיה 5 ולא 0). התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (3):</u> $A = 3 \Rightarrow B = 4 , C = 5$.
תרגיל החיבור שנוצר הוא: $333 + 345$. ספרת האחדות של התוצאה היא 8 ולא 0 ולכן התוצאה לא מתאימה למבנה המבוקש E00 (כמו כן, ספרת העשרות תהיה 7 ולא 0). התשובה נפסלת.

טיפ: כיוון שפסלנו 3 תשובות, ניתן לסמן את תשובה (4) מבלי לבדוק אותה. למען שלמות ההסבר, נבדוק את נכונותה.

<u>נבדוק את תשובה (4):</u> $A = 4 \Rightarrow B = 5 , C = 6$.
תרגיל החיבור שנוצר הוא: $444 + 456$. התוצאה המתקבלת היא 900, והיא אכן מתאימה למבנה E00.
תשובה נכונה.

דרך ב' – הערכת סדר גודל

לפנינו תרגיל חיבור ובו הספרות העוקבות A, B ו-C, ועלינו למצוא את ערכה של הספרה A. נבדוק את ספרת האחדות של המספרים וננסה להסיק ממנה מידע באשר ל-A. נבחין בכך שסכומן של הספרות A ו-C מסתיים ב-0. כלומר, סכומן של A ו-C הוא 10.

נתון ש-A, B ו-C הן ספרות עוקבות, כך ש- $A < B < C$. לפיכך, C גדול ב-2 מ-A. הספרות היחידות שההפרש ביניהן הוא 2 וסכומן הוא 10 הן 4 ו-6. על כן, $A = 4$. ניתן לפתור זאת גם באופן אלגברי:

$$C = A + 2$$

$$A + C = 10 \quad \Rightarrow \quad A + A + 2 = 10$$

$$2A = 8$$

$$A = 4$$

7. תשובה (2) נכונה. שאלה 10 מתוך 20 בפרק.

אנו מתבקשים לקבוע מה יכולה להיות ספרת האלפים של x, שהוא מספר ארבע-ספרתי המהווה סכום של שלושה מספרים תלת-ספרתיים. כדי לקבוע מה יכולה להיות ספרת האלפים של x, נמצא את הטווח האפשרי עבור x.

ערך ה-x המינימלי האפשרי הוא 1,000 , שכן זהו המספר הארבע-ספרתי הקטן ביותר. הוא יכול להיות סכומם של המספרים 500, 300 ו-200 למשל.

ערך ה-x המקסימלי האפשרי יהיה סכומם של 3 מספרים תלת-ספרתיים גדולים ככל הניתן. כלומר:

$$999 + 999 + 999 = 3 \cdot 999 = 2{,}997$$

מצאנו שספרת האלפים של x יכולה להיות 2 (ואינה יכולה להיות גדולה מ-2).

---

8. תשובה (1) נכונה. שאלה 11 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הצבת מספרים

נתון שהאותיות A, B, C ו-D מייצגות ספרות עוקבות.

$$k = AB + CD + 9$$

עלינו לקבוע באיזה מספר k מתחלק בהכרח. נציב מספרים נוחים במקום האותיות הנתונות ונבדוק באיזה מספר k שנוצר מתחלק. נציב: $A = 1$, $B = 2$, $C = 3$, $D = 4$. כעת נבדוק מה ערכו של k:

$$k = AB + CD + 9 \quad \Rightarrow \quad k = 12 + 34 + 9 = 55$$

כעת נבדוק את התשובות ונבדוק באיזה מספר k מתחלק. נשים לב שמכיוון שהשתמשנו בהצבת מספרים, עלינו לפסול 3 תשובות בטרם נוכל לסמן תשובה נכונה.

55 מתחלק ב-11, ואינו מתחלק ב-2, ב-3 או ב-9. לכן, תשובה (1) נכונה.

דרך ב' – פתרון מתמטי

עלינו לקבוע באיזה מספר k מתחלק בהכרח. k שווה לסכומם של המספרים AB, CD ו-9. נבטא את AB ואת CD באופן אלגברי.

AB שווה ל-A עשרות ו-B אחדות. כלומר:

$$AB = 10A + B$$

מאחר ש-B היא הספרה העוקבת ל-A, היא גדולה ממנה ב-1:

$$AB = 10A + (A + 1) = 11A + 1$$

CD שווה ל-C עשרות ו-D אחדות. כלומר:

$$CD = 10C + D$$

מאחר ש-D היא הספרה העוקבת ל-C, היא גדולה ממנה ב-1:

$$CD = 10C + (C + 1) = 11C + 1$$

כעת נבטא את k באופן אלגברי:

$$k = AB + CD + 9 \quad \Rightarrow \quad k = 11A + 1 + 11C + 1 + 9 = 11A + 11C + 11$$

נוציא גורם משותף 11:

$$k = 11\,(A + C + 1)$$

11 הוא אחד הגורמים של k. משמע, k בהכרח מתחלק ב-11.

.9 תשובה (3) נכונה. שאלה 13 מתוך 20 בפרק.

עלינו לבנות את n, המספר התלת ספרתי הגדול ביותר שסכום ספרותיו 11. כדי שהמספר יהיה גדול ככל הניתן, נשאף שספרת המאות תהיה כמה שיותר גדולה, לאחר מכן ספרות העשרות וכן הלאה.
בספרת המאות אנו יכולים להציב 9 – הספרה הגדולה ביותר. כעת נותר לנו 2, ועל כן נציב בספרת העשרות 2. מפני שכבר הגענו לסכום ספרות 11, ספרת האחדות תהיה 0. המספר שבנינו הוא 920.

כעת נבנה את m, המספר התלת-ספרתי הקטן ביותר שסכום ספרותיו 11. בבנייתו, נעשה תהליך הפוך; הפעם ניתן כמה שיותר מתוך סכום זה דווקא לספרת האחדות, לאחר מכן לספרת העשרות וכן הלאה. בספרת האחדות אנו יכולים להציב 9 – הספרה הגדולה ביותר, וכעת נותר לנו 2. היינו רוצים לתת לספרת העשרות את "כל ה-2", אך עלינו לזכור שבמספר תלת-ספרתי ספרת המאות אינה יכולה להיות 0. לכן, ניתן לספרת המאות 1 (את המינימום אפשרי), ואת ה-1 הנותר ניתן לספרת העשרות. המספר שבנינו הוא 119.

נציב את המספרים שקיבלנו בביטוי:

$$n - m = 920 - 119 = 801$$

.10 תשובה (1) נכונה. שאלה 14 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הצבת התשובות
נתון כי x הוא מספר דו-ספרתי שספרת האחדות שלו היא 5, וכן כי אם נהפוך את סדר הספרות, יתקבל מספר הגדול פי 2 מ- $(x + 1)$. עלינו למצוא את סכום הספרות של x. כאמור, ידוע כי ספרת האחדות של x היא 5, ולכן מסכום הספרות ניתן להסיק מה ספרת העשרות. נבדוק את התשובות ונחפש תשובה המתאימה לכל הנתונים.

<u>נבדוק את תשובה (1):</u>
אם סכום הספרות של x הוא 7, הרי שספרת העשרות שלו היא 2 $(7 - 5)$. כלומר, $x = 25$.
נהפוך את סדר הספרות: 52. המספר שהתקבל אכן גדול פי 2 מ-26 $(x + 1 \Rightarrow 25 + 1)$.
תשובה נכונה.

טיפ: מכיוון שהצבנו את התשובות, ברגע שמצאנו תשובה נכונה אין צורך להמשיך לבדוק את שאר התשובות, אך למען שלמות ההסבר נפסול אותן:

<u>נבדוק את תשובה (2):</u>
אם סכום הספרות של x הוא 9, הרי שספרת העשרות שלו היא 4 $(9 - 5)$. כלומר, $x = 45$.
נהפוך את סדר הספרות: 54. המספר שהתקבל אינו גדול פי 2 מ-46 $(x + 1 \Rightarrow 45 + 1)$.
התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (3):</u>
אם סכום הספרות של x הוא 11, הרי שספרת העשרות שלו היא 6 $(11 - 5)$. כלומר, $x = 65$.
נהפוך את סדר הספרות: 56. המספר שהתקבל אינו גדול פי 2 מ-66 $(x + 1 \Rightarrow 65 + 1)$.
התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (4):</u>
אם סכום הספרות של x הוא 13, הרי שספרת העשרות שלו היא 8 $(13 - 5)$. כלומר, $x = 85$.
נהפוך את סדר הספרות: 58. המספר שהתקבל אינו גדול פי 2 מ-86 $(x + 1 \Rightarrow 85 + 1)$.
התשובה נפסלת.

דרך ב' – הצגה אלגברית

x הוא מספר דו-ספרתי שספרת האחדות שלו היא 5. עלינו למצוא את סכום ספרותיו. לשם כך, תחילה עלינו למצוא את ספרת העשרות שלו. נציב A בתור ספרת העשרות. כלומר: $x = A5$. כדי למצוא את ערכו של A, נבטא את כל אחד מהמספרים שבנתונים באופן אלגברי, ונבנה משוואה הקושרת ביניהם.

נבטא את x באופן אלגברי. x שווה ל-A עשרות ו-5 אחדות, כלומר:

$$x = 10A + 5$$

נתון שאילו נהפוך את סדר הספרות של x נקבל מספר הגדול פי 2 מ- $(x + 1)$. נהפוך את סדר הספרות של x ⇐ 5A . מספר זה שווה ל-5 עשרות ו-A אחדות:

$$50 + A$$

כאמור, הוא גדול פי 2 מ- $(x + 1)$. נבנה משוואה המתארת קשר זה. ניתן למסכן:

$$50 + A = 2 \cdot (x + 1)$$

נציב את ערך x שביטאנו לעיל באמצעות A כדי ליצור משוואה ובה נעלם אחד:

$$50 + A = 2 \cdot (10A + 5 + 1) \quad \Rightarrow \quad 50 + A = 2 \cdot (10A + 6)$$

נפתח סוגריים:

$$50 + A = 20A + 12$$

נסדר אגפים:

$$38 = 19A$$

נחלק ב-19:

$$A = 2$$

מצאנו כי ספרת העשרות של x (A) היא 2, וידוע לנו שספרת האחדות שלו היא 5. לכן, סכום הספרות של x הוא 7.

---

11. תשובה (1) נכונה. שאלה 15 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הצבת מספרים

נציב: $A,B,C = 1$

$$\frac{AB + BC + CA}{A + B + C} \Rightarrow \frac{11 + 11 + 11}{1 + 1 + 1} = \frac{33}{3} = 11$$

כעת ניתן לפסול את תשובות (2) ו-(3). כדי לפסול את תשובה (4) נערוך הצבה נוספת.

נציב לדוגמה: $A = 1\ ,\ B = 2\ ,\ C = 3$.

$$\frac{AB + BC + CA}{A + B + C} \Rightarrow \frac{12 + 23 + 31}{1 + 2 + 3} = \frac{66}{6} = 11$$

כיוון שהתוצאה היא 11 בשנית, סביר להניח שהתשובה הנכונה היא (1).

דרך ב' – הצגה אלגברית

נבטא את ערכו של כל מספר באופן אלגברי. לשם כך, יש לכפול את ספרת העשרות ב-10 ולהוסיף את ספרת האחדות. (לדוגמה: ערכו של המספר 26 הוא $2 \cdot 10 + 6$).

$$AB = 10A + B\ ,\ BC = 10B + C\ ,\ CA = 10C + A$$

נציב ערכים אלה בביטוי הנתון:

$$\frac{AB + BC + CA}{A + B + C} \Rightarrow \frac{10A + B + 10B + C + 10C + A}{A + B + C}$$

כעת, משום שהצגנו את המספרים באופן אלגברי, ניתן לפשטו כביטוי רגיל:

$$\frac{10A + B + 10B + C + 10C + A}{A + B + C} = \frac{11A + 11B + 11C}{A + B + C} = \frac{11(A + B + C)}{A + B + C} = 11$$

---

12. תשובה (2) נכונה. שאלה 15 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הצבת מספרים

עלינו לקבוע מה ההפרש בין שני המספרים התלת-ספרתיים המתוארים. לשם כך, נציב מספרים המתאימים לתיאור ונבדוק מה ההפרש ביניהם.
נתון כי שני המספרים מורכבים מאותן ספרות, ושספרת העשרות בשניהם שווה. משמע, ספרת המאות במספר אחד היא ספרת האחדות במספר השני ולהיפך. כמו כן, נתון שבאחד המספרים ספרת המאות גדולה ב-3 מספרת האחדות. נציב במקום מספר זה את המספר 401. לכן, המספר השני הוא 104.

כעת ניתן לחשב את ההפרש ביניהם:

$401 - 104 = 297$

דרך ב' – הבנה

נתונים שני מספרים תלת ספרתיים הבנויים מאותן ספרות, אך בסדר שונה. עלינו לקבוע מה ההפרש בין שני המספרים. ספרת העשרות בשני המספרים זהה. נתון שספרת המאות באחד המספרים גדולה ב-3 מספרת האחדות שלו. מאחר שהמספרים בנויים מאותן ספרות בסדר שונה, הרי שספרת המאות במספר אחד היא ספרת האחדות במספר השני ולהיפך. כדי לקבוע מה ההפרש ביניהם, נתמקד בספרות המאות ובספרות האחדות, שכן הן יוצרות את ההבדל בין שני המספרים (משמע, את ההפרש ביניהם).

הסקנו שספרת המאות במספר אחד גדולה ב-3 מספרת המאות במספר השני. הבדל זה מביא לכך שהמספר הראשון גדול ב-3 מאות מהמספר השני. כלומר, ב-300.
ספרת האחדות במספר הראשון קטנה ב-3 מספרת האחדות של המספר השני. הבדל זה מביא לכך שהמספר הראשון קטן ב-3 מהמספר השני.
נסכם את ההבדלים שמצאנו. המספר הראשון גדול ב-300 וקטן ב-3 מהמספר השני. כלומר, המספר הראשון גדול ב-297 ($300 - 3$) מהמספר השני.

13. תשובה (4) נכונה. שאלה 16 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הצבת תשובות

תחילה, יש לשים לב שניתן לפסול את תשובות (1) ו-(2); אנו נשאלים לערכו של A, כאשר הוא מהווה את ספרת האחדות של התוצאה המתקבלת מחיבור של שתי ספרות זהות (B). התוצאה אינה יכולה להיות 1 או 5 כיוון שחיבור של שתי ספרות זהות בהכרח ייתן תוצאה זוגית. ניתן להציג זאת גם באופן אלגברי:

$$B + B = 2B$$

2B בהכרח מתחלק ב-2, כלומר A זוגי.

נבדוק את תשובה (3): כדי שספרת האחדות של התוצאה תהיה 6, B יכול להיות שווה 3. נציב את הספרות בתרגיל הנתון:

$63 + 3 \stackrel{?}{=} 36 \quad \Rightarrow$ פסוק שקר

אפשרות נוספת לקבל 6 בספרת האחדות היא ש-B יהיה שווה 8. נציב את הספרות בתרגיל הנתון:

$68 + 8 \stackrel{?}{=} 86 \quad \Rightarrow$ פסוק שקר

אין ספרות נוספות שיכולות לגרום לספרת האחדות להיות 6 ולכן התשובה אינה נכונה.

טיפ: פסלנו 3 תשובות ועל כן ניתן לסמן את תשובה (4) מבלי לבדוק אותה, אך למען שלמות ההסבר נבדוק את נכונותה:

נבדוק את תשובה (4): כדי שספרת האחדות של התוצאה תהיה 8, B יכול להיות שווה 4. נציב את הספרות בתרגיל הנתון:

$84 + 4 \stackrel{?}{=} 48 \quad \Rightarrow$ פסוק שקר

אפשרות נוספת לקבל 8 בספרת האחדות היא ש-B שווה 9. נציב את הספרות בתרגיל הנתון:

$89 + 9 \stackrel{?}{=} 98$

$98 = 98 \quad \Rightarrow$ **פסוק אמת, תשובה נכונה**

דרך ב' – הבנה / ניסוי וטעייה

לפני שנציב, עלינו לבחון את התרגיל הנתון כדי להציב באופן חכם.

ידוע לנו שהאותיות A ו-B מייצגות ספרות שונות. ספרת העשרות במספר העליון היא A וספרת העשרות בתוצאה היא B. כלומר, הן ספרות שונות. מכך ניתן להבין שבחיבור של ספרות האחדות B + B עבר 1 לעשרות. על כן, נתחיל בהצבת ספרות גדולות.

בנוסף, ניתן להסיק מכך ש-B גדול מ-A ב-1. זאת מפני שבחיבור ספרות האחדות עבר 1 לעשרות ולכן $A + 1 = B$.

נציב $A = 8, B = 9$:

$89 + 9 = 98$

תשובה (4) נכונה.

14. תשובה (2) נכונה. שאלה 18 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הצבת מספרים

לפנינו תרגיל חיסור ובו מספרים הבנויים מ-A, B ו-C, ספרות שונות בין 1 ל-9. עלינו לקבוע מה ההפרש בין A ל-C. כאשר נתון תרגיל חיסור, כדאי להפוך אותו לתרגיל חיבור:

$$\begin{array}{r} ABC \\ -\ \underline{BBB} \\ 99 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{r} BBB \\ +\ \underline{\ \ 99} \\ ABC \end{array}$$

מכיוון שהספרה B לא נמצאת בביטוי בשאלה, יהיה נוח להציב מספר במקומה. נציב $B = 2$:

$$\begin{array}{r} BBB \\ +\ \underline{\ \ 99} \\ ABC \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{r} 222 \\ +\ \underline{\ \ 99} \\ A2C \end{array}$$

התוצאה היא 321, והיא מתאימה למבנה A2C. במקרה זה $A = 3$ ו- $C = 1$. לכן:

$$A - C = 3 - 1 = 2$$

דרך ב' – הבנה

כאמור, כאשר נתון תרגיל חיסור, מומלץ להמיר אותו לתרגיל חיבור:

$$\begin{array}{r} ABC \\ -\ \underline{BBB} \\ 99 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{r} BBB \\ +\ \underline{\ \ 99} \\ ABC \end{array}$$

נתמקד בספרת האחדות של התרגיל שלפנינו, כדי להסיק ממנה מידע באשר ל-A ול-C.
הסכום של B ו-9 מסתיים ב-C. מכאן ניתן להסיק שהספרה C קטנה ב-1 מ-B. זאת מפני שהוספת 9 לכל ספרה בין 1 ל-9, תביא לסכום שספרת האחדות שלו קטנה ב-1 מהספרה המקורית.
(לדוגמה: $\underline{\mathbf{1}} + 9 = 1\underline{\mathbf{0}}$, $\underline{\mathbf{2}} + 9 = 1\underline{\mathbf{1}}$, $\underline{\mathbf{3}} + 9 = 1\underline{\mathbf{2}}$, $\underline{\mathbf{4}} + 9 = 1\underline{\mathbf{3}}$ וכן הלאה).

כעת נתמקד בספרת המאות. לפנינו תרגיל חיבור ובו מספר תלת-ספרתי שספרת המאות שלו היא B, ולמספר זה מוסיפים 99. ספרת המאות של הסכום היא A.
כאשר אנו מוסיפים 99 למספר כלשהו, ספרת המאות שלו יכולה לא להשתנות כלל (למשל במקרה הבא $\underline{\mathbf{1}}00 + 99 = \underline{\mathbf{1}}99$), או שהיא יכולה לגדול ב-1, במקרה שחיבור האחדות והעשרות מצטבר לסכום השווה ל-100 או יותר. למשל במקרה הבא:

$$\underline{\mathbf{1}}11 + 99 = \underline{\mathbf{2}}10$$

ידוע לנו ש-A ו-B הן ספרות שונות, ולכן אנו יודעים שלא ייתכן שספרת המאות לא השתנתה עקב הוספת 99.
כלומר, ספרת המאות המתקבלת בתוצאה, A, בהכרח גדולה ב-1 מספרת המאות המקורית, B.

לסיכום, ידוע לנו ש-C **קטנה ב-1** מ-B, וכן ש-A **גדולה ב-1** מ-B. על כן, A **גדולה ב-2** מ-C. כלומר:

$$A - C = 2$$

15. תשובה (1) נכונה. שאלה 18 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הצבת התשובות

לפנינו תרגיל כפל ובו האותיות A ו-B המייצגות ספרות שונות בין 0 ל-8. עלינו למצוא את ערכה של A. ניתן להציב את ערכי A שבתשובות ולבדוק האם קיים ערך B מתאים המקיים את התרגיל ואת הנתונים.

<u>נבדוק את תשובה (1):</u> $A = 6$

$$\begin{array}{r} 1\,A \\ \times\ \underline{\quad B} \\ AB \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{r} 1\,6 \\ \times\ \underline{\quad B} \\ 6\,B \end{array}$$

נחפש ספרה מתאימה עבור B, שכאשר נכפול בה את 16 התוצאה תהיה כ-60.

נציב $B = 4$ $\Leftarrow$ $16 \cdot 4 = 64$, **מתאים**:

$$\begin{array}{r} 1\,6 \\ \times\ \underline{\quad B} \\ 6\,B \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{r} 1\,6 \\ \times\ \underline{\quad 4} \\ 6\,4 \end{array}$$

תשובה נכונה.

טיפ: מכיוון שהצבנו את התשובות, ברגע שמצאנו תשובה נכונה אין צורך להמשיך לבדוק את שאר התשובות, אך למען שלמות ההסבר נפסול אותן:

<u>נבדוק את תשובה (2):</u> $A = 7$

$$\begin{array}{r} 1\,A \\ \times\ \underline{\quad B} \\ AB \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{r} 1\,7 \\ \times\ \underline{\quad B} \\ 7\,B \end{array}$$

נחפש ספרה מתאימה עבור B, שכאשר נכפול בה את 17 התוצאה תהיה כ-70.

נציב $B = 4$ $\Leftarrow$ $17 \cdot 4 = 68$, קטן מדי, לא מתאים.

נציב $B = 5$ $\Leftarrow$ $17 \cdot 5 = 85$, גדול מדי, לא מתאים.

אין ספרה אחרת שעשויה להתאים ולכן התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (3):</u> $A = 3$

$$\begin{array}{r} 1\,A \\ \times\ \underline{\quad B} \\ AB \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{r} 1\,3 \\ \times\ \underline{\quad B} \\ 3\,B \end{array}$$

נחפש ספרה מתאימה עבור B, שכאשר נכפול בה את 13 התוצאה תהיה כ-30.

לא ניתן להציב $B = 3$ מפני ש-A ו-B מייצגות ספרות שונות זו מזו.

נציב $B = 4$ $\Leftarrow$ $13 \cdot 4 = 52$, לא מתאים.

אין ספרה אחרת שעשויה להתאים ולכן התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (4):</u> $A = 4$

$$\begin{array}{r} 1\,A \\ \underline{\quad B} \\ AB \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{r} 1\,4 \\ \times\ \underline{\quad B} \\ 4\,B \end{array}$$

נחפש ספרה מתאימה עבור B, שכאשר נכפול בה את 14 התוצאה תהיה כ-40.

נציב $B = 3$ $\Leftarrow$ $14 \cdot 3 = 42$, לא מתאים.

אין ספרה אחרת שעשויה להתאים ולכן התשובה נפסלת.

דרך ב' – הצבת מספרים

לפנינו תרגיל כפל ובו האותיות A ו-B המייצגות ספרות שונות בין 0 ל-8. עלינו למצוא את ערכה של A. לשם כך, נחפש זוג מספרים A ו-B המתאימים לנתונים. כדי ללמוד על ערכיהם, נתמקד בספרת האחדות.

$$\begin{array}{r} 1\,A \\ \times \quad \underline{\mathbf{B}} \\ A\mathbf{B} \end{array}$$

ניתן לראות כי המכפלה של A ב-B מסתיימת ב-B. ידוע לנו שישנן ספרות מיוחדות שיכולות לקיים זאת ולכן נציב תחילה אותן במקום A. כאשר כופלים את הספרה 1 במספר כלשהו, ספרת האחדות של התוצאה (A**<u>B</u>**) שווה לספרת האחדות של המספר בו כפלנו (**<u>B</u>**). מאחר שאין תשובה שלפיה A = 1, נבחן מספרים מיוחדים אחרים.

התכונה שתיארנו לעיל מתקיימת גם עבור 6. כאשר כופלים את 6 במספרים זוגיים, ספרת האחדות של התוצאה שווה לספרת האחדות של המספר בו כפלנו. נציב A = 6 ונחפש B המתאים לו:

$$\begin{array}{r} 1\,A \\ \times \quad \underline{B} \\ AB \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{r} 1\,6 \\ \times \quad \underline{B} \\ 6\,B \end{array}$$

נחפש ספרה מתאימה עבור B, שכאשר נכפול בה את 16 התוצאה תהיה כ-60.

נציב B = 4 $\Leftarrow$ $16 \cdot 4 = 64$, **מתאים**:

$$\begin{array}{r} 1\,6 \\ \times \quad \underline{B} \\ 6\,B \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{r} 1\,6 \\ \times \quad \underline{4} \\ 6\,4 \end{array}$$

תשובה (1) נכונה.

.16 תשובה (4) נכונה. שאלה 19 מתוך 20 בפרק.

$$\begin{array}{r} AA \\ \times \; \underline{BB} \\ ACA \end{array}$$

בשאלות מסוג זה עלינו תחילה לנתח את התרגיל ולהפיק ממנו רמזים.
מספר דו-ספרתי כפול מספר-דו ספרתי מביא למספר תלת-ספרתי. עלינו להבין שהמספרים הדו-ספרתיים צריכים להיות קטנים יחסית. המספר הכי קטן המופיע בתשובות הוא 44, ולכן האופציות האפשריות ל-BB הן 11 או 22 בלבד (44 כפול 33 זה כבר מספר ארבע ספרתי). בנוסף, ניתן לראות שכאשר כופלים את ספרת האחדות A בספרת האחדות B מתקבלת ספרת האחדות A, לכן ניתן להסיק ש-BB חייב להיות 11.

כעת, על ידי ניסוי וטעיה נפסול תשובות. מומלץ להתחיל בתשובה עם המספר הנמוך ביותר, כדי לקצר את החישובים. $11 \cdot 44 = 484$.
אכן מסתדר היטב עם האותיות שבתרגיל (ספרת המאות וספרת האחדות זהות, ואילו ספרת העשרות שונה מהן).
תשובה נכונה.

כמו כן, ניתן לראות שכאשר כופלים מספר ב-11, אנו למעשה כופלים את המספר ב-10 ומוסיפים לו את המספר עצמו פעם נוספת ($44 \cdot 11 = 44 \cdot 10 + 44$). מספרים גדולים יביאו לכך שספרת המאות תשתנה, ועל כן AA צריך להיות מספר קטן יחסית.

---

17. תשובה (4) נכונה. שאלה 19 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הצבת התשובות

נתון שהאותיות A ו-B מייצגות ספרות שונות מתוך הספרות 1 עד 6. שארית החלוקה של AB ב-11 קטנה מ-3. כלומר, שארית החלוקה של AB ב-11 שווה ל-0, 1 או 2. עלינו למצוא לאיזו ספרה A לא יכול להיות שווה. נבדוק את התשובות ונפסול כל תשובה שיכולה להיות הערך של A.

<u>נבדוק את תשובה (1) :</u> $A = 1 \Leftarrow AB = 1B$.
במצב זה, B יכול להיות 2 למשל. שארית החלוקה של 12 ב-11 היא 1. ההצבה מתאימה לנתונים ולכן A יכול להיות שווה ל-1. התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (2) :</u> $A = 2 \Leftarrow AB = 2B$.
22 מתחלק ב-11, B יכול להיות 3 למשל. שארית החלוקה של 23 ב-11 היא 1 ($1 + 2 \cdot 11 = 23$). ההצבה מתאימה לנתונים ולכן A יכול להיות שווה ל-2. התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (3) :</u> $A = 5 \Leftarrow AB = 5B$.
55 מתחלק ב-11, B יכול להיות שווה ל-6. שארית החלוקה של 56 ב-11 היא 1 ($1 + 5 \cdot 11 = 56$). ההצבה מתאימה לנתונים ולכן A יכול להיות שווה ל-5. התשובה נפסלת.

טיפ: כיוון שפסלנו 3 תשובות, ניתן לסמן את תשובה (4) מבלי לבדוק אותה. למען שלמות ההסבר, נבדוק את נכונותה.

<u>נבדוק את תשובה (4) :</u> $A = 6 \Leftarrow AB = 6B$.
66 מתחלק ב-11, אולם B לא יכול להיות שווה ל-A, שכן האותיות הללו מייצגות ספרות שונות.
כמו כן, B לא יכול להיות גדול מ-6, שכן הוגדר ש-A ו-B מייצגות ספרות בין 1 ל-6.

אילו ננסה להציב מספרים בין 1 ל-5 עבור B, נגלה כי שארית החלוקה תמיד תהיה גדולה מ-3 :
$B = 0 \Leftarrow AB = 60$. 55 מתחלק ב-11, ולכן 60 ($5 + 55$) מתחלק ב-11 עם שארית 5.
$B = 1 \Leftarrow AB = 61$. 55 מתחלק ב-11, ולכן 61 ($6 + 55$) מתחלק ב-11 עם שארית 6.

עד שנגיע למספר הבא שמתחלק ב-11 ללא שארית (66), שארית החלוקה תלך ותגדל. כלומר, שארית החלוקה לא תהיה קטנה מ-3. לא ייתכן ש-A שווה ל-6. **תשובה נכונה.**

דרך ב' – הבנה

נתון שהאותיות A ו-B מייצגות ספרות שונות מתוך הספרות 1 עד 6. שארית החלוקה של AB ב-11 קטנה מ-3. כלומר, שארית החלוקה של AB ב-11 שווה ל-0, 1 או 2. עלינו למצוא לאיזו ספרה A לא יכול להיות שווה.

כדי שהמספר AB יתחלק ב-11 ללא שארית, על הספרות A ו-B להיות שוות (למשל, $AB = 33$). זה לא ייתכן על סמך הגדרות השאלה.

כדי שהמספר AB יתחלק ב-11 עם שארית 1, הוא צריך להיות המספר העוקב של מספר המתחלק ב-11 ללא שארית. כלומר, עליו להיות גדול ממנו ב-1 (למשל, 33 מתחלק ב-11 ללא שארית, ולכן 34 מתחלק ב-11 עם שארית 1). לפיכך, כאשר B גדול מ-A ב-1 בדיוק, שארית החלוקה ב-11 תהיה 1.

באופן דומה, כדי שהמספר AB יתחלק ב-11 עם שארית 2, הוא צריך להיות גדול מכפולה של 11 ב-2 (למשל, 33 מתחלק ב-11 ללא שארית, ולכן 35 מתחלק ב-11 עם שארית 2). לפיכך, כאשר B גדול מ-A ב-2 בדיוק, שארית החלוקה ב-11 תהיה 2.

נתבונן באפשרויות עבור A. אילו A יהיה שווה ל-6, B יצטרך להיות שווה ל-6, 7 או 8 כדי ששארית החלוקה של המספר המתקבל ב-11 תהיה קטנה מ-3 ($AB = 66, 67, 68$). כאמור, B לא יכולה להיות שווה ל-A, ולא יכולה להיות גדולה מ-6. לפיכך, לא ייתכן שהאות A מייצגת את הספרה 6.

18. תשובה (4) נכונה. שאלה 19 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הצבת תשובות

נתון שהמספר AB הוא מספר דו-ספרתי ראשוני, וכן שסכום הספרות של המספר $(A + B)$ גדול פי 5 מספרת האחדות שלו. נבדוק לפי איזו תשובה מתקבל מספר אשר יכול להיות המספר AB.

<u>נבדוק את תשובה (1)</u>: לפי תשובה זו סכום הספרות של המספר הוא 11. אנו יודעים כי סכום זה גדול פי 5 מספרת האחדות של המספר, ועל כן עלינו לחלק את הסכום ב-5 בכדי למצוא את ספרת האחדות. כעת, נשים לב שהסכום 11 אינו מתחלק ב-5, ועל כן לפי תשובה זו ספרת האחדות תצא מספר לא שלם. הדבר אינו אפשרי ולכן התשובה נפסלת. עתה אנו יכולים להבין כי סכום הספרות חייב להיות מספר אשר מתחלק ב-5, ועל כן <u>אנו יכולים לפסול גם את תשובה (3)</u> (7 אינו מתחלק ב-5, ולכן גם לפי תשובה זו ספרת האחדות תהיה מספר לא שלם).

<u>נבדוק את תשובה (2)</u>: לפי תשובה זו סכום הספרות של המספר הוא 10. אנו יודעים כי סכום זה גדול פי 5 מספרת האחדות של המספר, ועל כן ספרת האחדות של המספר היא 2 $\left(\frac{10}{5}\right)$. כבר בשלב זה ניתן לפסול תשובה זו; מספר שספרת האחדות שלו היא 2 הוא בהכרח מספר זוגי, ועל כן לא ייתכן שיהיה ראשוני כפי שאנו צריכים שיהיה (נזכור שהזוגי הראשוני היחיד הוא המספר 2, והוא אינו מספר דו-ספרתי). התשובה נפסלת.

טיפ: כיוון שפסלנו 3 תשובות, ניתן לסמן את תשובה (4) מבלי לבדוק אותה. למען שלמות ההסבר, נבדוק את נכונותה:

<u>נבדוק את תשובה (4)</u>: לפי תשובה זו סכום הספרות של המספר הוא 5. אנו יודעים כי סכום זה גדול פי 5 מספרת האחדות של המספר, ועל כן ספרת האחדות של המספר היא 1 $\left(\frac{5}{5}\right)$. כיוון שספרת האחדות היא 1, וסכום הספרות הוא 5, ספרת העשרות תהיה 4 $(5 - 1)$. המספר שהתקבל הוא: $AB = 41$. 41 הוא אכן מספר ראשוני דו-ספרתי. **תשובה נכונה.**

דרך ב' – ניסוי וטעייה

נתון שהמספר AB הוא מספר דו-ספרתי ראשוני, וכן שסכום הספרות של המספר $(A + B)$ גדול פי 5 מספרת האחדות שלו.

ננסה למצוא מספר אשר יכול להיות המספר AB. לשם כך, נבחר ספרת אחדות שאינה זוגית (שכן מלבד 2 כל מספר זוגי הוא בהכרח אינו ראשוני), נכפיל מספר זה פי 5, ונגלה סכום הספרות של המספר AB. בעזרת נתונים אלו נוכל למצוא גם את ספרת העשרות, ולגלות האם המספר שקיבלנו יכול להיות המספר AB.

נתחיל מספרת האחדות 1.

סכום הספרות גדול פי 5 מספרת האחדות ולכן יהיה 5 $(5 \cdot 1)$.

כיוון שספרת האחדות היא 1, וסכום הספרות הוא 5, ספרת העשרות תהיה 4 $(5 - 1)$. המספר שהתקבל הוא: $AB = 41$. 41 הוא אכן מספר ראשוני דו-ספרתי. מצאנו מספר אשר יכול להיות המספר AB, וסכום הספרות שלו (5) מופיע בתשובות. **תשובה (4) נכונה.**

19. תשובה (4) נכונה. שאלה 19 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הצבת מספרים

לפנינו תרגיל חילוק ובו האותיות A ו-B המייצגות ספרות שונות. מאחר שקשה להסיק מידע באשר לערכיהן מתרגיל זה, נהפוך אותו לתרגיל כפל:

$$\frac{\mathrm{BBBB}}{\mathrm{BAB}} = \mathrm{BB} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{BBBB} = \mathrm{BAB} \cdot \mathrm{BB}$$

נציג זאת במאונך למען הנוחות:

$$\begin{array}{r} \mathrm{BB} \\ \times \quad \underline{\mathrm{BAB}} \\ \mathrm{BBBB} \end{array}$$

נתמקד בספרת האחדות כדי להסיק ממנה מידע באשר ל-B. לפי התרגיל הנתון, המכפלה של B ב-B מסתיימת ב-B. המספרים המקיימים זאת הם 0, 1, 5 ו-6. נתון ש-B שונה מ-0 ולכן נציב אחד מיתר המספרים. $B = 1$:

$$\begin{array}{r} 1\,1 \\ \times \quad \underline{1\,A\,1} \\ 1\,1\,1\,1 \end{array}$$

מצאנו כי 11 כפול מספר מסוים שווה ל-1111. כדי למצוא את המספר הזה, נחלק את 1111 ב-11:

$$\frac{1111}{11} = \frac{1100 + 11}{11} = 100 + 1 = 101$$

מצאנו כי הספרה המתאימה עבור A היא 0.
תשובה (4) נכונה.

דרך ב' – הצגה אלגברית

לפנינו תרגיל חילוק ובו האותיות A ו-B המייצגות ספרות שונות. נוכל לפתור תרגיל זה באופן אלגברי, אם נחלק בין שני המספרים המורכבים מהאות B בלבד. על כן, נתאים את התרגיל לכך:

$$\frac{\mathrm{BBBB}}{\mathrm{BAB}} = \mathrm{BB} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{BBBB}}{\mathrm{BB}} = \mathrm{BAB}$$

עתה אנו יכולים להביע את התרגיל באמצעות הצגה אלגברית:

$$\frac{\mathrm{BBBB}}{\mathrm{BB}} = \mathrm{BAB} \;\Rightarrow\; \frac{1000\mathrm{B} + 100\mathrm{B} + 10\mathrm{B} + \mathrm{B}}{10\mathrm{B} + \mathrm{B}} = \mathrm{BAB} \;\Rightarrow\; \frac{1111 \cdot \mathrm{B}}{11 \cdot \mathrm{B}} = \mathrm{BAB} \;\Rightarrow\; 101 = \mathrm{BAB}$$

מצאנו כי המספר התלת-ספרתי BAB הוא 101, ועל כן האות A מייצגת את הספרה 0.

20. תשובה (4) נכונה. שאלה 20 מתוך 20 בפרק.

בשאלות מסוג זה, כאשר יש תרגיל חיסור מומלץ לשנותו לתרגיל חיבור:

$$\begin{array}{r} B1 \\ + \underline{\ BA} \\ 1AB \end{array}$$

ראשית, נסתכל על ספרת האחדות. ניתן להסיק ש-A ו-B הן ספרות עוקבות, כאשר A קטן מ-B ב-1 (שהרי $A + 1 = B$). משלב זה, ניתן להמשיך בכמה דרכים:

דרך א' – בלשות

נמשיך לנסות לדלות מידע מהתרגיל. בתרגיל קיים חיבור בין שני מספרים דו-ספרתיים, בעלי ספרת עשרות זהה, אשר יצר מספר תלת-ספרתי. לכן, ניתן להסיק שספרת העשרות B חייבת להיות לפחות 5 (אחרת, לא יתקבל סכום תלת-ספרתי). יתרה מכך, החיבור של $B + B$ יצר מספר שספרת האחדות שלו היא A, כלומר ספרת אחדות שקטנה מ-B רק ב-1 (כפי שהבנו לעיל). לכן, B צריכה להיות ספרה גדולה. נציב $B = 9$, ומכאן ש-$A = 8$, ונבדוק האם מתקבל פסוק אמת:

$91 + 98 \stackrel{?}{=} 189$

$189 = 189$

המספרים שהצבנו אכן תואמים את נתוני השאלה. נחשב את הסכום המבוקש:

$A + B = 8 + 9 = 17$

דרך ב' – הצבת תשובות

מהרגע שהבנו ש-A ו-B הן ספרות עוקבות, כאשר A קטן מ-B ב-1, ניתן למצוא מה צריכים להיות הערכים של גורמים אלו בהתאם לכל תשובה ולהציב ערכים אלו בתרגיל. התשובה שבה יתקבל פסוק אמת היא התשובה הנכונה.

<u>נבדוק את תשובה (1)</u>:

לפי תשובה זו, $A + B = 11$. שני המספרים העוקבים המתאימים הם $A = 5$ ו-$B = 6$. נציב אותם בתרגיל ונקבל:

$61 + 65 \stackrel{?}{=} 156$

$126 \neq 156$

פסוק שקר, התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (2)</u>:

לפי תשובה זו, $A + B = 13$. שני המספרים העוקבים המתאימים הם $A = 6$ ו-$B = 7$. נציב אותם בתרגיל ונקבל:

$71 + 76 \stackrel{?}{=} 167$

$147 \neq 167$

פסוק שקר, התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (3)</u>:

לפי תשובה זו, $A + B = 15$. שני המספרים העוקבים המתאימים הם $A = 7$ ו-$B = 8$. נציב אותם בתרגיל ונקבל:

$81 + 87 \stackrel{?}{=} 178$

$168 \neq 178$

פסוק שקר, התשובה נפסלת.

טיפ: פסלנו 3 תשובות, ועל כן ניתן לסמן את תשובה (4) מבלי לבדוק אותה. למען שלמות ההסבר נוכיח את נכונותה.

<u>נבדוק את תשובה (3)</u>:

לפי תשובה זו, $A + B = 17$. שני המספרים העוקבים המתאימים הם $A = 8$ ו-$B = 9$. נציב אותם בתרגיל ונקבל:

$91 + 98 \stackrel{?}{=} 189$

$189 = 189$

פסוק אמת, תשובה נכונה.

הגדרת פעולה

בבחינה הפסיכומטרית ישנן שאלות בהן מגדירים פעולה חדשה, ומבקשים מאתנו לפתור תרגיל המכיל את הפעולה החדשה שהוגדרה.

דוגמה:

הפעולה $ מוגדרת בעבור כל מספר a כך:

$$\$(a) = a^2 - a$$

$$\$(4) = ?$$

פתרון -

נציב את 4 במקום ה-a בפעולה שהוגדרה:

$$\$(4) = 4^2 - 4 \qquad \Longrightarrow \qquad 16 - 4 = 12$$

סדר פעולות חשבון

הפעולה החדשה שהוגדרה קודמת לכל הפעולות האחרות (כפל, חילוק, חיבור, חיסור, חזקה וכו'), למעט כאשר יש סוגריים.

דוגמה:

$$\$(a) \cdot \$(b) \neq \$(ab)$$
$$\$(a) + \$(b) \neq \$(a+b)$$

כאשר הפעולה המוגדרת מבוצעת מספר פעמים, עלינו להתחיל מהסוגריים הפנימיים, ולהתקדם החוצה.

דוגמה:

הפעולה $ מוגדרת בעבור כל מספר x כך:

$$\$(x) = x^2$$

$$\$(\$(3)) = ?$$

פתרון -

נחשב תחילה את הביטוי בתוך הסוגריים הפנימיים, ולאחר מכן נבצע את הפעולה על התוצאה שהתקבלה:

$$\$(3) = 3^2 = 9$$

כעת נציב את 9 במקום $\$(3)$, ונחשב את הסוגריים החיצוניים:

$$\$(\$(3)) = \$(9) = 9^2 = 81$$

פעולה על ביטוי

לעיתים, הפעולה מבוצעת על ביטוי ולא על מספר.

דוגמה:

הפעולה $ מוגדרת בעבור כל מספר x כך:

$$\$(2x) = x - 3$$

$$\$(10) = ?$$

פתרון -

בתרגיל זה, 10 אינו שווה ל-x אלא ל-2x, ולכן $x = 5$:

$$\$(10) = 5 - 3 = 2$$

תנאים

בשאלות אלו עלינו לבצע על המספר את הפעולה המתאימה לפי התנאים בהגדרת הפעולה.

דוגמה:

הפעולה $ מוגדרת בעבור כל מספר שלם x באופן הבא:

אם x אי זוגי: $\$(x) = 2x$

אם x זוגי: $\$(x) = x^2 - 5$

$$\$\left(\$\left(\$(3)\right)\right) = ?$$

פתרון -

ראשית נחשב את מה שנמצא בסוגריים הפנימיים.

3 הוא מספר אי-זוגי, ולכן נבצע את הפעולה הראשונה:

$$\$(3) = 2 \cdot 3 = 6$$

6 הוא מספר זוגי, ולכן נבצע את הפעולה השנייה:

$$\$(6) = 6^2 - 5 = 36 - 5 = 31$$

31 הוא מספר אי-זוגי, ולכן נבצע את הראשונה:

$$\$(31) = 2 \cdot 31 = 62$$

יכולנו גם לחשב את הכל בשורה אחת:

$$\$\left(\$\left(\$(3)\right)\right) = \$\left(\$(6)\right) = \$(31) = 62$$

פעולה מעגלית

לעיתים, הפעולה מוגדרת באופן כזה שעלינו להמשיך ולבצע אותה, עד שנגיע לתנאי עצירה כלשהו.

דוגמה:

לכל מספר זוגי וחיובי x הוגדרה הפעולה $ כך:

$$\$(x) = 5 - \$(x-2)$$

$$\$(0) = 0$$

$$\$(6) = ?$$

פתרון -

נבצע את הפעולה, ונמשיך לבצע אותה כל עוד x הוא זוגי וחיובי, עד שנגיע לתנאי העצירה $(x = 0)$:

$$\$(6) = 5 - \$(4)$$

$$\hookrightarrow 5 - \$(2)$$

$$\hookrightarrow 5 - \$(0)$$

$$\hookrightarrow 0$$

ברגע שהגענו ל- $\$(0)$, ניתן להציב במקום הביטוי את המספר אפס, ומשם להמשיך ולהציב את הערכים "ולטפס" חזרה עד ל- $\$(6)$.

$$\$(2) = 5 - \$(0) = 5 - 0 = 5$$

$$\$(4) = 5 - \$(2) = 5 - 5 = 0$$

$$\$(6) = 5 - \$(4) = 5 - 0 = 5$$

דוגמה:

לכל מספר שלם וחיובי x הוגדרה הפעולה $ כך:

אם $1 < x$: $\$(x) = \$(x-1)$

אם $x = 1$: $\$(x) = 0$

$\$(4) = ?$

פתרון -

נבצע את הפעולה עד שנגיע לתנאי העצירה:

$\$(4) = \$(3) = \$(2) = \$(1) = 0$

מציאת פעולה

ישנן שאלות בהן נתונה לנו התוצאה של פעולה על מספר מסוים, ואנו מתבקשים למצוא מה יכולה להיות הגדרת הפעולה שנעשתה.

דוגמה:

בנוגע לפעולה $ ידוע כי: $\$(3) = 24$

מה **לא יכולה** להיות הגדרת הפעולה $?

(1) $\$(x) = x^3 - 3$ (2) $\$(x) = x(2x+2)$

(3) $\$(x) = 10x - 5$ (4) $\$(x) = x^x - x$

פתרון -

על מנת למצוא מה יכולה או לא יכולה להיות הגדרת הפעולה, עלינו להציב בתשובות את המספר 3, ולבדוק באיזו מהפעולות לא נגיע ל-24:

$\$(x) = x^3 - 3 \quad \Rightarrow \quad \$(3) = 3^3 - 3 = 27 - 3 = 24$

$\$(x) = x(2x+2) \quad \Rightarrow \quad \$(3) = 3(2 \cdot 3 + 2) = 3 \cdot 8 = 24$

$\boldsymbol{\$(x) = 10x - 5 \quad \Rightarrow \quad \$(3) = 10 \cdot 3 - 5 = 30 - 5 = 25}$

$\$(x) = x^x - x \quad \Rightarrow \quad \$(3) = 3^3 - 3 = 27 - 3 = 24$

בידוד פעולה

בשאלות אלו, על מנת למצוא את הגדרת הפעולה החדשה, תחילה עלינו לבודד את הפעולה במשוואה הנתונה.

כיצד נבדיל מפעולה מעגלית?

הביטוי עליו מבוצעת הפעולה (לרוב נמצא בסוגריים) הוא אותו ביטוי בשני אגפי המשוואה.

דוגמה:

נתון: $2\$(x) - 5x = 4 + \$(x)$

$\$(4) = ?$

פתרון -

תחילה נבודד את הפעולה החדשה על ידי העברת אגפים, בדיוק כמו במשוואה רגילה:

$2\$(x) - 5x = 4 + \$(x) \quad \Rightarrow \quad 2\$(x) - \$(x) = 5x + 4$

$\$(x) = 5x + 4$

כעת נבצע את הפעולה החדשה על המספר 4:

$\$(4) = 5 \cdot 4 + 4 = 20 + 4 = 24$

משוואת פעולה חדשה / מה נכון בהכרח?

שאלות אלה נחשבות לקשות ביותר בנושא זה. הסיבה לכך היא שבדרך כלל צריך לבדוק בהן את התשובות (לרוב על ידי הצבת מספרים), ובדיקה זו לוקחת זמן רב.

דוגמה:

הפעולה \$ מוגדרת בעבור כל מספר שלם x באופן הבא:

$$\$(x) = x^2$$

מה מהבאים **אינו בהכרח** נכון?

(1) $\$(2x) = 2\$(x)$

(2) $\$(3x) = 9\$(x)$

(3) $\$(x) = \$\left(\$(\sqrt{x})\right)$

(4) $\$(x-4) = \$(4-x)$

פתרון -

נבצע את הפעולות בכל אחת מהתשובות ונבדוק באיזו מהן השוויון מתקיים:

$$\mathbf{\$(2x) = 2\$(x) \quad \Rightarrow \quad (2x)^2 = 2 \cdot x^2 \quad \Rightarrow \quad 4x^2 \neq 2x^2}$$

$$\$(3x) = 9\$(x) \quad \Rightarrow \quad (3x)^2 = 9 \cdot x^2 \quad \Rightarrow \quad 9x^2 = 9x^2$$

$$\$(x) = \$\left(\$(\sqrt{x})\right) \quad \Rightarrow \quad \$(x) = \$\left(\sqrt{x}^2\right) \quad \Rightarrow \quad \$(x) = \$(x)$$

$$\$(x-4) = \$(4-x) \Rightarrow \quad (x-4)^2 = (4-x)^2$$

מצאנו כי בתשובה (1) לא קיבלנו שוויון. תשובה (1) נכונה.

תרגול שאלות מבחינות אמת

1. לכל a ו-b המקיימים $0 \le b \le a$ הוגדרה הפעולה $ כך:

$$\$(a,b) = \sqrt{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$$

$$\frac{\$(81,16)}{\$(36,25)} = ?$$

(1) 1

(2) $\sqrt{5}$

(3) $\frac{1}{5}$

(4) 25

---

2. לכל זוג מספרים x ו-y $(x \neq y)$ הוגדרו הפעולות $ ו-# כך:

$\$(x,y) =$ המספר **הקטן** מתוך שני המספרים x ו-y

$\#(x,y) =$ המספר **הגדול** מתוך שני המספרים x ו-y

$$\#(\$(7,5)\ ,\ \$(8,4)) = ?$$

(1) 8

(2) 7

(3) 5

(4) 4

---

3. לכל שני מספרים x ו-y הוגדרה הפעולה $ כך: $\$(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$\$(\$(2,1),\ 2) = ?$$

(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 5

---

4. עבור כל x הוגדרה הפעולה $ כך: $\$(x) = x(x-1)$

$$\$(\$(2)) = ?$$

(1) 1

(2) 2

(3) 3

(4) 4

פתרתי ______________ שאלות ב ______________ דקות, ______________ תשובות נכונות

5. לכל מספר חיובי ושלם a הוגדרה הפעולה $ כך: $\$(a) = \frac{a}{a+1}$

$\$(1) \cdot \$(2) \cdot \$(3) \cdot \$(4) = ?$

(1) $\frac{1}{5}$

(2) $\frac{3}{10}$

(3) $\frac{10}{11}$

(4) $\frac{24}{25}$

---

6. לכל מספר x הוגדרה הפעולה $ כך: $\$(x) = x(x-1)(x-2)$

עבור כמה ערכים שונים של x מתקיים $\$(x) = 0$?

(1) 1

(2) 2

(3) 3

(4) 0

---

7. לכל מספר a הוגדרה פעולה $ המקיימת: $\$(a^2) = |a|$

$\$\left(\frac{1}{4}\right) = ?$

(1) $\frac{1}{16}$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) $\frac{1}{8}$ (4) $\frac{1}{4}$

---

8. לכל מספר a הוגדרה הפעולה $\$(a)$ כך:

$\$(a) = a^5 + a^4 + a^3 + a^2 + a + 1$

$\$(1) - \$(-1) = ?$

(1) 1

(2) 0

(3) 3

(4) 6

פתרתי ______________ שאלות ב ______________ דקות, ______________ תשובות נכונות

9. לכל שני מספרים a ו-b הוגדרה הפעולה $ כך:

אם $a \neq b$ אז $a \$ b = \frac{a+b}{a-b}$

אם $a = b$ אז $a \$ b = 0$

$(5 \$ 0) \$ 0 = ?$

(1) 1
(2) -1
(3) 0
(4) 5

---

10. לכל מספר x הוגדרה הפעולה (x) כך שמתקיים:

$\$(x) + 4 = 6x - \$(x)$

$\$(3) = ?$

(1) 7
(2) 6
(3) 5
(4) 4

---

11. לכל שני מספרים שלמים שאינם שליליים x ו-y, נגדיר את **השרשור** שלהם x~y כך:
המספר שנוצר על ידי כתיבת הספרות של x ואחריהן הספרות של y.
(למשל: $123{\sim}87 = 12387$).

איזו מהטענות הבאות **אינה** בהכרח נכונה בעבור כל x, y ו-z שלמים וחיוביים?

(1) $x < 3{\sim}x$
(2) $x{\sim}0 = 10 \cdot x$
(3) $(x{\sim}y){\sim}z = x{\sim}(y{\sim}z)$
(4) $x{\sim}y = y{\sim}x$

---

12. לכל מספר x הוגדרה הפעולה $ כך: $\$(x) = x^4 + 7x^2 + 10x - 8$

$\$(5) - \$(-5) = ?$

(1) 0
(2) 100
(3) 225
(4) 648

פתרתי ____________ שאלות ב ____________ דקות, ____________ תשובות נכונות

13. לכל מספר שלם וחיובי n הוגדרה הפעולה $ כך:

אם $n = 1$, $\$(n) = 3$

אם $n > 1$, $\$(n) = \$(n-1) + 1$

$\$(5) = ?$

(1) 7
(2) 8
(3) 9
(4) 10

---

14. עבור כל מספר x הוגדרו הפעולות הבאות:

$\$(x) = x + 2$

$\#(x) = x^2$

נתון: $\$(\#(a)) = \#(\$(a))$

$a = ?$

(1) -1 (2) $\frac{1}{2}$ (3) $-\frac{1}{2}$ (4) 0

---

15. לכל מספר שלם x בין 1 ל-9 הוגדרה $\$(x)$ כך:
מספר המספרים הדו-ספרתיים שספרת העשרות שלהם היא x, וספרת האחדות שלהם **גדולה** מ-x.

$\$(x) = ?$

(1) $6 - x$
(2) $x + 2$
(3) $x + 5$
(4) $9 - x$

---

16. לכל שני מספרים שלמים a ו-b השונים מ-0, הוגדרה הפעולה $\$(a,b)$ כך:

$\$(a,b) = \frac{a}{b} - \frac{b}{a}$

$\$(-1\,,\,3) = ?$

(1) $\$(3\,,\,1)$
(2) $\$(1\,,\,3)$
(3) $\$(-3\,,\,1)$
(4) $\$(3\,,\,-1)$

פתרתי ____________ שאלות ב ____________ דקות, ____________ תשובות נכונות

.17 לכל מספר x הוגדרה הפעולה $ כך: $\$(x) = \frac{x-1}{x}$

איזו מהטענות הבאות בנוגע לפעולה $ נכונה לכל a ו-b הגדולים מ-1?

(1) $\$(a) \cdot \$(b) < 1$

(2) אם $a < b$, אזי $\$(b) < \$(a)$

(3) $2 \cdot \$(a) = \$(2a)$

(4) $(\$(a))^2 = \$(a^2)$

.18 לכל מספר חיובי x הוגדרה הפעולה $ כך: $\$(x) = x^2 - 1$
נתונים שני מספרים חיוביים a ו-b.

איזו מן הטענות הבאות נכונה **בהכרח**?

(1) $\$(\$(a)) = a$

(2) $\$(a+b) = \$(a) + \$(b)$

(3) $\$(b) = (b-1) \cdot \$(\sqrt{b})$

(4) $\sqrt{\$(a)+1} = \frac{\$(a)}{a+1} + 1$

.19 לכל מספר x הוגדרה הפעולה $ כך: $\$(x) = (x-2)(x+1)$.

כמה מספרים a מקיימים את השוויון $\$(a) = \$(a+3)$?

(1) 1

(2) 2

(3) 3

(4) אין-סוף

.20 לכל a ו-b שלמים וחיוביים הוגדרה הפעולה $ כך: $\$(a,b) = c$, כאשר c היא השארית המתקבלת מחלוקת a ב-b.

$$\$(\$(38,8), \$(5,3)) = ?$$

(1) 1

(2) 2

(3) 3

(4) 0

פתרתי ____________ שאלות ב ____________ דקות, ____________ תשובות נכונות

תשובות

שאלה	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
תשובה	2	3	3	2	1	3	2	4	1	1

שאלה	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
תשובה	4	2	1	3	4	1	1	4	1	4

פתרתי 20 שאלות - ______________ נכונות, ______________ אחוזי הצלחה

.1 תשובה (2) נכונה. שאלה 2 מתוך 20 בפרק.

עלינו להציב בפעולה המוגדרת את המספרים שמופיעים בסוגריים:

$$\frac{\$(81,16)}{\$(36,25)} = \frac{\sqrt{\sqrt{81}-\sqrt{16}}}{\sqrt{\sqrt{36}-\sqrt{25}}} = \frac{\sqrt{9-4}}{\sqrt{6-5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{1}} = \sqrt{5}$$

.2 תשובה (3) נכונה. שאלה 3 מתוך 20 בפרק.

תוצאת הפעולה $ היא המספר הקטן מבין השניים, לכן:

$$\$(7,5) = 5$$
$$\$(8,4) = 4$$

כעת נציב את התוצאות שקיבלנו בביטוי:

$$\#\big(\$(7,5),\$(8,4)\big) = \#(5,4)$$

תוצאת הפעולה # היא המספר הגדול מבין השניים, ולכן:

$$\#(5,4) = 5$$

.3 תשובה (3) נכונה. שאלה 4 מתוך 20 בפרק.

על מנת למצוא את הערך של $\$(\$(2,1),2)$, נמצא קודם את $\$(2,1)$:

$$\$(2,1) = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$$

ולכן:

$$\$(\$(2,1),2) = \$(\sqrt{5},2)$$

כעת נמצא את $\$(\sqrt{5},2)$:

$$\$(\sqrt{5},2) = \sqrt{(\sqrt{5})^2+2^2} = \sqrt{5+4} = 3$$

.4 תשובה (2) נכונה. שאלה 5 מתוך 20 בפרק.

הוגדרה פעולה חדשה $ כך: $\$(x) = x(x-1)$

כדי לחשב כמה זה $\big(\$(2)\big)\$$, נתחיל מלמצוא כמה זה $\$(2)$:

$$\$(2) = 2(2-1) = 2\cdot 1 = 2$$

כלומר $\$(2) = 2$, עתה עלינו לחשב פעם נוספת כמה זה $\$(2)$, אך מכיוון שכבר חישבנו זאת ניתן להבין כי גם כעת תוצאת הפעולה היא 2.

.5 תשובה (1) נכונה. שאלה 6 מתוך 20 בפרק.

הוגדרה הפעולה $\$(a)$, ועלינו למצוא את ערך הביטוי הבא:

$$\$(1)\cdot\$(2)\cdot\$(3)\cdot\$(4)$$

נפשט כל אחד מחלקי הביטוי על סמך הפעולה שהוגדרה:

$$\$(1) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$\$(2) = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}$$

$$\$(3) = \frac{3}{3+1} = \frac{3}{4}$$

$$\$(4) = \frac{4}{4+1} = \frac{4}{5}$$

כעת נציב את הערכים שמצאנו בביטוי המבוקש:

$$\$(1)\cdot\$(2)\cdot\$(3)\cdot\$(4) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}$$

$$\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{3}}{\cancel{4}}\cdot\frac{\cancel{4}}{5} = \frac{1}{5}$$

.6 תשובה (3) נכונה. שאלה 9 מתוך 20 בפרק.

הפעולה $ מוגדרת כך: $\$(x) = x(x-1)(x-2)$.

אנו נשאלים עבור כמה ערכים שונים של x מתקיים $\$(x) = 0$. כלומר, אנו נשאלים כמה פתרונות יש למשוואה הבאה:

$$x(x-1)(x-2) = 0$$

כדי שתוצאה של מכפלה תהיה שווה ל-0, על אחד הגורמים או יותר להיות שווה ל-0. במשוואה שלעיל ישנם 3 גורמים: x, $x-1$, $x-2$. כלומר, יש לה 3 פתרונות (ניתן לראות כי בכל גורם יתקבל ערך x שונה כאשר נשווה את הגורם ל-0).

שימו לב שאין צורך למצוא את הפתרונות עצמם, אלא רק להבין שישנם שלושה. למען שלמות ההסבר נמצא את הפתרונות האפשריים:

$$x = 0$$

$$x-1 = 0 \quad\Rightarrow\quad x = 1$$

$$x-2 = 0 \quad\Rightarrow\quad x = 2$$

לפיכך, למשוואה יש 3 פתרונות – 0, 1 ו-2.

7. תשובה (2) נכונה. שאלה 10 מתוך 20 בפרק.

הגדרה הפעולה: $\$(a^2) = |a|$. עלינו למצוא את ערכו של $\$\left(\frac{1}{4}\right)$.
עלינו לשים לב שהפעולה מוגדרת עבור a^2, ולכן עלינו להתייחס ל-$\frac{1}{4}$ כאל a^2. כלומר:

$$a^2 = \frac{1}{4}$$

$$a = \sqrt{\frac{1}{4}} = \pm\frac{1}{2}$$

נקבל אם כך:

$$\$(a^2) = |a|$$

$$\$\left[\left(\pm\frac{1}{2}\right)^2\right] = \left|\pm\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$$

---

8. תשובה (4) נכונה. שאלה 11 מתוך 20 בפרק.

הפעולה $ הוגדרה כך: $\$(a) = a^5 + a^4 + a^3 + a^2 + a + 1$.
עלינו למצוא את ערך הביטוי $\$(1) – \$(-1)$.

תחילה, נמצא את ערך הביטוי $\$(1)$:

$$\$(1) = 1^5 + 1^4 + 1^3 + 1^2 + 1 + 1 = 6$$

עתה, נמצא את ערך הביטוי $\$(-1)$:

$$\$(-1) = (-1)^5 + (-1)^4 + (-1)^3 + (-1)^2 + (-1) + 1$$

$$\$(-1) = -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 = 0$$

כעת נציב את ערכי הביטויים בביטוי המבוקש:

$$\$(1) - \$(-1) = 6 - 0 = 6$$

---

9. תשובה (1) נכונה. שאלה 11 מתוך 20 בפרק.

הפעולה $a \$ b$ הוגדרה באופן שונה עבור a ו-b השווים זה לזה ו-a ו-b השונים זה מזה. עלינו למצוא את ערך הביטוי $(5 \$ 0) \$ 0$. תחילה, נפשט את הביטוי שבסוגריים. נשים לב ש-a ו-b שונים במקרה הראשון (הסוגריים הפנימיים):

$$5\$0 = \frac{5+0}{5-0} = \frac{5}{5} = 1$$

כעת נציב ערך זה בביטוי המקורי:

$$(5\$0)\$0 = 1\$0$$

גם כעת a ו-b שונים, ולכן נבצע את הפעולה $ המתאימה:

$$1\$0 = \frac{1+0}{1-0} = \frac{1}{1} = 1$$

.10 תשובה (1) נכונה. שאלה 13 מתוך 20 בפרק.

בשאלה זו נתונה משוואה המכילה את הפעולה בשני האגפים. לפני הצבת המספר (3) מומלץ לפשט את המשוואה ולסדר אותה:

$\$(x) + 4 = 6x - \$(x) \quad // \quad -4 \;+\; \$(x)$
$2\$(x) = 6x - 4 \quad // \quad :2$
$\$(x) = 3x - 2$

כעת נציב את x=3 בפעולה.

$\$(3) = 3 \cdot 3 - 2 = 7$

.11 תשובה (4) נכונה. שאלה 14 מתוך 20 בפרק.

השרשור של x ו-y ‏(x ~ y), שני מספרים שלמים לא שליליים, מוגדר ככתיבת הספרות של x ואחריהן הספרות של y. עלינו לקבוע איזו טענה **אינה** בהכרח נכונה. נבדוק את התשובות וננסה למצוא תשובה שלא מתקיימת עבור כל מספר. כלומר, נמצא מקרה בו היא אינה מתקיימת. אם נמצא מקרה כזה, המשמעות היא שהטענה אינה תמיד נכונה, ולכן זו תהיה התשובה הנכונה.

<u>נבדוק את תשובה (1):</u> $x < 3 \sim x$
כל מספר חיובי שנוסיף משמאלו את הספרה 3 יגדל, ולכן האי-שוויון שלעיל נכון בהכרח.
לדוגמה: $x = 1 \;\Leftarrow\; 1 < 31$. התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (2):</u> $x \sim 0 = 10 \cdot x$
כאשר אנו כופלים מספר ב-10, אנו למעשה מוסיפים 0 מימינו. לכן, משוואה זו נכונה בהכרח.
לדוגמה: $x = 1 \;\Leftarrow\; 10 = 10 \cdot 1$. התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (3):</u> $(x \sim y) \sim z = x \sim (y \sim z)$
בפעולת השרשור לסוגריים אין משמעות. הפעולה מוסיפה ספרות מימין למספר המקורי, אולם אין חשיבות מתי נוסיף כל ספרה, שכן סדר הספרות לא ישתנה בכל אופן. המשוואה נכונה בהכרח.
לדוגמה: $x = 1 \;,\; y = 2 \;,\; z = 3 \;\Leftarrow\; 10 \cdot 1 = (12) \sim 3 = 1 \sim (23) \;\Leftarrow\; 123 = 123$.
התשובה נפסלת.

טיפ: כיוון שפסלנו 3 תשובות, ניתן לסמן את תשובה (4) מבלי לבדוק אותה. למען שלמות ההסבר, נבדוק את נכונותה:

<u>נבדוק את תשובה (4):</u> $x \sim y = y \sim x$
משוואה זו אינה מתקיימת בהכרח, מפני שבפעולת השרשור יש חשיבות לסדר השרשור.
לדוגמה: $x = 1 \;,\; y = 2 \;\Leftarrow\; 12 \neq 21$. **תשובה נכונה.**

.12 תשובה (2) נכונה. שאלה 15 מתוך 20 בפרק.

נציב את המספרים בתרגיל במקום x בפעולה המוגדרת, ולאחר מכן נחסר ביניהם:

$$\$(5) = 5^4 + 7 \cdot 5^2 + 10 \cdot 5 - 8$$
$$\$(-5) = (-5)^4 + 7 \cdot (-5)^2 + 10 \cdot (-5) - 8$$

אנו יכולים להבין כי אין צורך לחשב את התוצאות המדויקות של פעולות אלו; מדובר במספרים גדולים מאוד שברור שאיננו צריכים לחשב את ערכם. אנו יכולים להבין כי כל גורם אשר זהה בשני הביטויים שקיבלנו יתבטל כאשר נחסר בין שני הביטויים. על כן, נחפש אילו גורמים זהים בשני הביטויים. ניתן לראות ש-5^4 שווה ל-$(-5)^4$, וכן ש-$(-5)^2$ שווה ל-5^2. זאת משום שהחזקה הזוגית הופכת את התוצאה לחיובית. כלומר, שני הגורמים הראשונים בשתי הפעולות זהים זה לזה, ומכאן שאלו יתבטלו כאשר נחסר בין שני הביטויים. כמו כן, גם הגורם האחרון (8-) זהה בשניהם ולכן יתבטל.

מכאן שהשוני היחיד בין שני הביטויים שאליהם הגענו הוא (50+) בראשון לעומת (50-) בשני. לכן, כאשר נחסר בין שני הביטויים נקבל:

$$\$(5) = 5^4 + 7 \cdot 5^2 + \mathbf{50} - 8$$
$$\$(-5) = 5^4 + 7 \cdot 5^2 - \mathbf{50} - 8$$
$$\Downarrow$$
$$\$(5) - \$(-5) = 50 - (-50) = 100$$

נראה את החיסור ביניהם גם באופן מלא:

$$5^4 + 7 \cdot 5^2 + 10 \cdot 5 - 8 - [(-5)^4 + 7 \cdot (-5)^2 + 10 \cdot (-5) - 8] =$$
$$5^4 + 7 \cdot 5^2 + 50 - 8 - (5^4 + 7 \cdot 5^2 - 50 - 8) =$$
$$5^4 + 7 \cdot 5^2 + 50 - 8 - 5^4 - 7 \cdot 5^2 + 50 + 8 =$$
$$50 + 50 = 100$$

.13 תשובה (1) נכונה. שאלה 16 מתוך 20 בפרק.

הפעולה \$ הוגדרה באופן הבא עבור מספרים שלמים וחיוביים:

אם $n = 1$, $\$(n) = 3$

אם $n > 1$, $\$(n) = \$(n-1) + 1$

עלינו לקבוע מה ערך הביטוי $\$(5)$. ניתן להבחין בכך שהפעלת הפעולה \$ על כל מספר למעט 1, מצריכה אותנו להפעיל אותה על המספר הקודם. כלומר:

$$\$(5) = \$(4) + 1$$

לכן, כדי לקבוע מה ערך הביטוי $\$(5)$, עלינו למצוא תחילה את ערכו של הביטוי $\$(4)$:

$$\$(4) = \$(3) + 1$$

בשביל למצוא את הערך של $\$(4)$ עלינו למצוא את $\$(3)$:

$$\$(3) = \$(2) + 1$$

בשביל למצוא את הערך של $\$(3)$ עלינו למצוא את $\$(2)$:

$$\$(2) = \$(1) + 1$$

בשביל למצוא את הערך של $\$(2)$ עלינו למצוא את $\$(1)$. כאשר $n = 1$, הפעולה $\$(n) = 3$, כלומר:

$$\$(1) = 3$$

לאחר שמצאנו את $\$(1)$, נוכל לחזור אחורה בכול השלבים ולמצוא את ערכו של $\$(5)$.

$$\$(2) = \$(1) + 1 \quad \Rightarrow \quad \$(2) = 3 + 1 = 4$$
$$\$(3) = \$(2) + 1 \quad \Rightarrow \quad \$(3) = 4 + 1 = 5$$
$$\$(4) = \$(3) + 1 \quad \Rightarrow \quad \$(4) = 5 + 1 = 6$$
$$\$(5) = \$(4) + 1 \quad \Rightarrow \quad \$(5) = 6 + 1 = 7$$

---

14. תשובה (3) נכונה. שאלה 16 מתוך 20 בפרק.

הוגדרו שתי פעולות $ ו-# באופן הבא:

$$\$(x) = x + 2$$

$$\#(x) = x^2$$

עלינו למצוא את ערך הנעלם a באמצעות המשוואה הנתונה:

$$\$\big(\#(a)\big) = \#\big(\$(a)\big)$$

תחילה, נפשט את הביטויים שבסוגריים הפנימיים:

$$\$(a^2) = \#(a + 2)$$

$$a^2 + 2 = (a + 2)^2$$

נפתח את הסוגריים לפי נוסחת כפל מקוצר:

$$a^2 + 2 = a^2 + 4 + 4a$$

נסדר אגפים:

$$-2 = 4a$$

נחלק ב-4:

$$a = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

15. תשובה (4) נכונה. שאלה 18 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הצבת מספרים

הפעולה $ הוגדרה עבור ספרות בין 1 ל-9 באופן הבא:
מספר המספרים הדו-ספרתיים שספרת העשרות שלהם היא x, וספרת האחדות שלהם גדולה מ-x. התבקשנו לקבוע מה ערך הביטוי (x)$. לשם כך, נציב מספר עבור x ונפעיל עליו את הפעולה $.

נציב $x = 5$ ונמצא את ערך הביטוי (5)$. כלומר, עלינו למצוא את מספר המספרים הדו-ספרתיים שספרת העשרות שלהם היא 5, וספרת האחדות שלהם גדולה מ-5. המספרים המתאימים הם:
56, 57, 58, 59 . בסך הכול ארבעה מספרים.

כעת, נציב גם בתשובות $x = 5$, ונחפש תשובה השווה ל-4. נשים לב שמכיוון שהשתמשנו בהצבת מספרים, עלינו לפסול 3 תשובות בטרם נוכל לסמן תשובה נכונה.

לא מתאים, התשובה נפסלת	$\Rightarrow$	(1) $6 - x \Rightarrow 6 - 5 = 1$
לא מתאים, התשובה נפסלת	$\Rightarrow$	(2) $x + 2 \Rightarrow 5 + 2 = 7$
לא מתאים, התשובה נפסלת	$\Rightarrow$	(3) $x + 5 \Rightarrow 5 + 5 = 10$
מתאים	$\Rightarrow$	(4) $9 - x \Rightarrow 9 - 5 = 4$

פסלנו 3 תשובות ועל כן תשובה (4) נכונה.

דרך ב' – הבנה

הפעולה $ מוגדרת כמספר המספרים הדו-ספרתיים שספרת העשרות שלהם היא x, וספרת האחדות שלהם גדולה מ-x. (עבור x שלם בין 1 ל-9).

מספר המספרים הדו-ספרתיים שספרת העשרות שלהם היא x הוא תמיד 10, ללא תלות ב-x. נבטא אותם:
x0 , x1 , x2 , x3 , x4 , x5 , x6 , x7 , x8 , x9

ספרת האחדות של המספרים המבוקשים צריכה להיות גדולה מ-x.כלומר, מתוך 10 האפשרויות שלפנינו, עלינו להפחית את כל המספרים שספרת האחדות שלהם שווה ל-x או קטנה ממנו. אם למשל
$x = 1$, עלינו להפחית את 2 המספרים הראשונים (x0 , x1). אם $x = 2$, עלינו להפחית את 3 המספרים הראשונים (x0 , x1 , x2), וכך הלאה. כלומר, תמיד נצטרך להפחית $(x + 1)$ מספרים. נבטא זאת באופן אלגברי:

$$10 - (x + 1) = 10 - x - 1 = 9 - x$$

16. תשובה (1) נכונה. שאלה 18 מתוך 20 בפרק.

הפעולה $ הוגדרה עבור a ו-b שונים מ-0 באופן הבא: $\$(a,b) = \frac{a}{b} - \frac{b}{a}$.

עלינו לקבוע לאיזה מהביטויים בתשובות שווה הביטוי $(-1 , 3)$\$. תחילה, נפשט אותו באמצעות הגדרות הפעולה:

$$\$(-1\,,3) = \frac{-1}{3} - \left(\frac{3}{-1}\right) = -\frac{1}{3} - (-3) = -\frac{1}{3} + 3 = 2\frac{2}{3}$$

כעת נפשט את הביטויים שבתשובות ונחפש תשובה שערך הביטוי המוצג בה הוא $2\frac{2}{3}$.

<u>נבדוק את תשובה (1):</u>

$$\$(3\,,1) = \frac{3}{1} - \left(\frac{1}{3}\right) = 3 - \frac{1}{3} = 2\frac{2}{3}$$

מתאים, **תשובה נכונה.**

טיפ: מכיוון שהצבנו את התשובות, ברגע שמצאנו תשובה נכונה אין צורך להמשיך לבדוק את שאר התשובות, אך למען שלמות ההסבר נפסול אותן:

<u>נבדוק את תשובה (2):</u>

$$\$(1\,,3) = \frac{1}{3} - \frac{3}{1} = \frac{1}{3} - 3 = -2\frac{2}{3}$$

לא מתאים, התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (3):</u>

$$\$(-3\,,1) = \frac{-3}{1} - \left(\frac{1}{-3}\right) = -3 - \left(-\frac{1}{3}\right) = -3 + \frac{1}{3} = -2\frac{2}{3}$$

לא מתאים, התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (4):</u>

$$\$(3\,,-1) = \frac{3}{-1} - \left(\frac{-1}{3}\right) = -3 - \left(-\frac{1}{3}\right) = -3 + \frac{1}{3} = -2\frac{2}{3}$$

לא מתאים, התשובה נפסלת.

17. תשובה (1) נכונה. שאלה 19 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הצבת מספרים

הפעולה $ הוגדרה כך: $\$(x) = \frac{x-1}{x}$.

עלינו לקבוע איזו טענה נכונה בהכרח עבור שני מספרים a ו-b הגדולים מ-1. כדי להימנע מפישוט מסורבל של כל אחת מהתשובות, נציב מספרים נוחים במקום a ו-b.

נציב בתשובות $a = 2$, $b = 3$ ונחפש טענה נכונה. נשים לב שמכיוון שהשתמשנו בהצבת מספרים, עלינו לפסול 3 תשובות בטרם נוכל לסמן תשובה נכונה.

<u>נבדוק את תשובה (1):</u>

$$\$(a) \cdot \$(b) < 1 \quad \Rightarrow \quad \$(2) \cdot \$(3) < 1$$

נמצא את ערכי הביטויים $\$(2)$ ו-$\$(3)$:

$$\$(2) = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\$(3) = \frac{3-1}{3} = \frac{2}{3}$$

נציב את ערכי הביטויים במשוואה המקורית:

$$\$(2) \cdot \$(3) < 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} < 1$$

$$\frac{1}{3} < 1$$

הטענה נכונה, **מתאים.**

שימו לב: בשלב זה ניתן להבחין בכך ש-$\$(a)$ ו-$\$(b)$ תמיד יהיו שברים חיוביים. מכפלתם של שני שברים חיוביים תמיד תהיה שבר חיובי. לפיכך, המכפלה של $\$(a)$ ו-$\$(b)$ קטנה מ-1. אם הבחנתם בכך, תוכלו לסמן את התשובה, ולהימנע מבדיקת יתר התשובות.

<u>נבדוק את תשובה (2):</u>

אם $a < b$, אזי $\$(b) < \$(a)$ $\Leftarrow$ $2 < 3$ ולכן $\$(3) < \$(2)$

$$\$(3) < \$(2)$$

נציב את ערכי הביטויים $\$(2)$ ו-$\$(3)$ שמצאנו לעיל:

$$\frac{2}{3} < \frac{1}{2}$$

הטענה אינה נכונה, התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (3):</u>

$$2 \cdot \$(a) = \$(2a) \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot \$(2) \stackrel{?}{=} \$(4)$$

נמצא את ערך הביטוי $\$(4)$:

$$\$(4) = \frac{4-1}{4} = \frac{3}{4}$$

נציב את ערכי הביטויים $\$(2)$ ו-$\$(4)$ שמצאנו לעיל:

$$2 \cdot \frac{1}{2} \stackrel{?}{=} \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad 1 \neq \frac{3}{4}$$

הטענה אינה נכונה, התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (4):</u>

$$\left(\$(a)\right)^2 = \$(a^2) \quad \Rightarrow \quad \left(\$(2)\right)^2 = \$(4)$$

נציב את ערכי הביטויים $\$(2)$ ו-$\$(4)$ שמצאנו לעיל:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 \stackrel{?}{=} \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{4} \neq \frac{3}{4}$$

הטענה אינה נכונה, התשובה נפסלת.
פסלנו 3 תשובות ועל כן תשובה (1) נכונה.

דרך ב' – הבנה / הצבת תשובות

הפעולה $ הוגדרה כך: $\$(x) = \frac{x-1}{x}$.

עלינו לקבוע איזו טענה נכונה בהכרח עבור שני מספרים a ו-b הגדולים מ-1. נפשט את הביטויים בתשובות ונבדוק איזו טענה נכונה בהכרח.

<u>נבדוק את תשובה (1):</u>

הפעולה $ מביאה תמיד לתוצאה שהיא שבר פשוט, זאת משום שהמונה קטן ב-1 מהמכנה.

לפיכך, כאשר נבצע את הפעולה $\$(a)$ ואת הפעולה $\$(b)$ ונכפול ביניהן, נקבל מכפלה של שני שברים פשוטים.
הכפלה של שני שברים פשוטים מביאה תמיד למכפלה שהיא שבר פשוט בעצמה.

לפיכך: $\$(a) \cdot \$(b) < 1$. **תשובה נכונה.**

טיפ: מכיוון שהצבנו את התשובות, ברגע שמצאנו תשובה נכונה אין צורך להמשיך לבדוק את שאר התשובות

---

18. תשובה (4) נכונה. שאלה 20 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הצבת מספרים

הפעולה $ הוגדרה כך: $\$(x) = x^2 - 1$.

עלינו לקבוע איזו טענה נכונה בהכרח עבור שני מספרים חיוביים a ו-b. כדי להימנע מפישוט מסורבל של כל אחת מהתשובות, נציב מספרים נוחים במקום a ו-b. נשים לב שבאחת התשובות עלינו להפעיל את הפעולה $ על השורש של b, ולכן יהיה נוח להציב b בעל שורש ריבועי שלם.

נציב בתשובות $a = 1$, $b = 4$ ונחפש טענה נכונה. נשים לב שמכיוון שהשתמשנו בהצבת מספרים, עלינו לפסול 3 תשובות בטרם נוכל לסמן תשובה נכונה.

<u>נבדוק את תשובה (1):</u>

$$\$(\$(a)) = a \quad \Rightarrow \quad \$(\$(1)) \stackrel{?}{=} 1$$

נמצא את ערך הביטוי $\$(1)$:

$$\$(1) = 1^2 - 1 = 0$$

נציב אותו במשוואה המקורית:

$$\$(\$(1)) \stackrel{?}{=} 1 \quad \Rightarrow \quad \$(0) \stackrel{?}{=} 1$$

נבצע את הפעולה $ על 0:

$$0^2 - 1 \stackrel{?}{=} 1$$

$$-1 \neq 1$$

המשוואה לא נכונה בהכרח ולכן התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (2):</u>

$$\$(a+b) = \$(a) + \$(b) \quad \Rightarrow \quad \$(5) \stackrel{?}{=} \$(1) + \$(4)$$

מצאנו לעיל כי $\$(1) = 0$.

נמצא את ערך הביטוי $\$(4)$:

$$\$(4) = 4^2 - 1 = 15$$

נמצא את ערך הביטוי $\$(5)$:

$$\$(5) = 5^2 - 1 = 24$$

נציב את ערכי הביטויים במשוואה המקורית:

$$\$(5) \stackrel{?}{=} \$(1) + \$(4) \quad \Rightarrow \quad 24 \stackrel{?}{=} 0 + 15$$

$$24 \neq 15$$

המשוואה לא נכונה בהכרח ולכן התשובה נפסלת.

נבדוק את תשובה (3):

$\$(b) = (b-1)\cdot\$(\sqrt{b}) \quad\Rightarrow\quad \$(4) \stackrel{?}{=} (4-1)\cdot\$(\sqrt{4}) \quad\Rightarrow\quad \$(4) \stackrel{?}{=} 3\cdot\$(2)$

מצאנו לעיל כי $\$(4) = 15$.
נמצא את ערך הביטוי $\$(2)$:

$\$(2) = 2^2 - 1 = 3$

נציב את ערכי הביטויים במשוואה המקורית:

$\$(4) \stackrel{?}{=} 3\cdot\$(2) \quad\Rightarrow\quad 15 \stackrel{?}{=} 3\cdot 3$

$15 \neq 9$

המשוואה לא נכונה בהכרח ולכן התשובה נפסלת.

טיפ: כיוון שפסלנו 3 תשובות, ניתן לסמן את תשובה (4) מבלי לבדוק אותה. למען שלמות ההסבר, נבדוק את נכונותה.

נבדוק את תשובה (4):

$\sqrt{\$(a)+1} = \frac{\$(a)}{a+1} + 1 \quad\Rightarrow\quad \sqrt{\$(1)+1} \stackrel{?}{=} \frac{\$(1)}{1+1} + 1$

מצאנו לעיל כי $\$(1) = 0$.
נציב את ערך הביטוי במשוואה המקורית:

$\sqrt{\$(1)+1} \stackrel{?}{=} \frac{\$(1)}{1+1} + 1 \quad\Rightarrow\quad \sqrt{0+1} \stackrel{?}{=} \frac{0}{1+1} + 1$

$\sqrt{1} \stackrel{?}{=} 1$

$1 = 1$

תשובה נכונה.

דרך ב' – פתרון מתמטי

הפעולה $ הוגדרה כך: $\$(x) = x^2 - 1$.
עלינו לקבוע איזו טענה נכונה בהכרח עבור שני מספרים חיוביים a ו-b. לשם כך, נפשט כל ביטוי שבתשובות ונחפש ביטוי המהווה פסוק אמת ($0 = 0$). כלומר, הוא נכון עבור כל a ו-b חיוביים.

נבדוק את תשובה (1):

$\$(\$(a)) = a \quad\Rightarrow\quad \$(a^2-1) = a \quad\Rightarrow\quad (a^2-1)^2 - 1 = a$

נפתח את הסוגריים לפי נוסחת כפל מקוצר:

$a^4 + 1 - 2a^2 - 1 = a$

$a^4 - 2a^2 = a$

נסדר אגפים:

$a^4 - 2a^2 - a = 0$

נוציא גורם משותף a:

$a(a^3 - 2a - 1) = 0$

המשוואה לא נכונה בעבור כל a, שכן לא התקבל פסוק אמת. התשובה נפסלת.

נבדוק את תשובה (2):

$\$(a+b) = \$(a) + \$(b) \quad\Rightarrow\quad (a+b)^2 - 1 = a^2 - 1 + b^2 - 1$

נפתח את הסוגריים לפי נוסחת כפל מקוצר:

$a^2 + b^2 + 2ab - 1 = a^2 + b^2 - 2$

נסדר אגפים:

$2ab = -1$

המשוואה לא נכונה בעבור כל a ו-b, שכן לא התקבל פסוק אמת. התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (3):</u>

$$\$(b) = (b-1)\cdot\$(\sqrt{b}) \quad\Rightarrow\quad b^2-1 = (b-1)\cdot\left(\left(\sqrt{b}\right)^2-1\right)$$

$$b^2-1 = (b-1)\cdot(b-1) \quad\Rightarrow\quad b^2-1 = (b-1)^2$$

נפתח את הסוגריים לפי נוסחת כפל מקוצר:

$$b^2-1 = b^2+1-2b$$

נסדר אגפים:

$$2b = 2$$

$$b = 1$$

המשוואה לא נכונה בעבור כל b, שכן לא התקבל פסוק אמת. התשובה נפסלת.

טיפ: כיוון שפסלנו 3 תשובות, ניתן לסמן את תשובה (4) מבלי לבדוק אותה. למען שלמות ההסבר, נבדוק את נכונותה.

<u>נבדוק את תשובה (4):</u>

$$\sqrt{\$(a)+1} = \frac{\$(a)}{a+1}+1 \quad\Rightarrow\quad \sqrt{a^2-1+1} = \frac{a^2-1}{a+1}+1$$

$$\sqrt{a^2} = \frac{a^2-1^2}{a+1}+1$$

נתאר את המונה כמכפלה של שני גורמים לפי נוסחת כפל מקוצר:

$$a = \frac{(a-1)\cdot(a+1)}{a+1}+1$$

נצמצם $(a+1)$ במונה ובמכנה של השבר שלפנינו:

$$a = a-1+1$$

$$a = a \quad\Rightarrow\quad 0 = 0$$

קיבלנו פסוק אמת ולכן המשוואה נכונה עבור כל a. **תשובה נכונה.**

19. תשובה (1) נכונה. שאלה 20 מתוך 20 בפרק.

הפעולה $ הוגדרה כך: $\$(x) = (x-2)(x+1)$.
עלינו לקבוע כמה מספרים מקיימים את השוויון $\$(a) = \$(a+3)$. לשם כך, נפשט את המשוואה באמצעות הפעולה שהוגדרה.

$$\$(a) = \$(a+3)$$

$$(a-2)(a+1) = (a+3-2)(a+3+1)$$

$$(a-2)(a+1) = (a+1)(a+4)$$

דרך א'

$$(a-2)(a+1) = (a+1)(a+4)$$

נפתח סוגריים

$$a^2 - 2a + a - 2 = a^2 + a + 4a + 4$$

$$a^2 - a - 2 = a^2 + 5a + 4$$

נסדר אגפים:

$$-6 = 6a$$

נחלק ב-4:

$$-1 = a$$

מצאנו שהמשוואה מתקיימת עבור ערך a יחיד. לכן, תשובה (1) נכונה.

דרך ב'

$$(a-2)(a+1) = (a+1)(a+4)$$

נעביר את הביטוי שבאגף ימין לאגף שמאל:

$$(a-2)(a+1) - (a+1)(a+4) = 0$$

נוציא גורם משותף $(a+1)$:

$$(a+1)\cdot\big((a-2)-(a+4)\big) = 0$$

נפתח את הסוגריים הפנימיים:

$$(a+1)\cdot(a-2-a-4) = 0$$

$$(a+1)\cdot(-6) = 0$$

נחלק ב-6-:

$$a+1 = 0$$

$$a = -1$$

מצאנו שהמשוואה מתקיימת עבור ערך a יחיד. לכן, תשובה (1) נכונה.

---

20. תשובה (4) נכונה. שאלה 20 מתוך 20 בפרק.

תוצאת הפעולה $ היא שארית החלוקה של a ב-b.

$$\$(\$(38\ ,\ 8)\ ,\ \$(5\ ,\ 3)) = ?$$

$\$(38\ ,\ 8)$: 8 נכנס ב-38 4 פעמים $(4 \cdot 8 = 32)$ והשארית היא 6.
$\$(5\ ,\ 3)$: 3 נכנס ב-5 פעם אחת $(1 \cdot 3 = 3)$ והשארית היא 2.

נכתוב את התוצאות בביטוי:

$$\$(6\ ,\ 2) = ?$$

$\$(6\ ,\ 2)$: 2 נכנס ב-6 3 פעמים **ללא שארית**. לכן, התוצאה היא 0.

הבנה אלגברית - תרגול שאלות מבחינות אמת

.1 a, b ו-c הם מספרים **שלמים**.
נתון: $0 < c < b < a$

איזו מהאפשרויות הבאות בהכרח **אינה נכונה**?

(1) $a = 3$ וגם $b = 2$
(2) $b = 2$ וגם $c = 1$
(3) $a = 5$ וגם $b = 2$ וגם $c = 1$
(4) $a = 2$ וגם $b = 1$

.2 נתון: a, b ו-c הם שלושה מספרים **זוגיים** שונים.

$$c - a < 10$$
$$a < b < c$$
$$b - a = x$$

x יכול להיות -

(1) 1
(2) 2
(3) 8
(4) 10

.3 עמוס בחר 11 מספרים שלמים וחיוביים, השונים זה מזה.

בתוך קבוצת המספרים שבחר קיימים **בהכרח** שני מספרים ש**ההפרש** ביניהם מתחלק ב-

(1) 10
(2) 11
(3) 12
(4) 13

.4 a, b ו-c הם מספרים שלמים וחיוביים, $a < b < c$.
נתון: $a + b + c = 10$

מה הערך **הקטן** ביותר שהביטוי $(c - a)$ יכול לקבל?

(1) 1
(2) 2
(3) 3
(4) 4

פתרתי ____________ שאלות ב ____________ דקות, ____________ תשובות נכונות

5. a, b ו-c הם מספרים שלמים וחיוביים השונים זה מזה.

איזו מן הטענות הבאות בהכרח **אינה** נכונה בנוגע לשלושת המספרים $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{c}$ ו-$\frac{c}{a}$?

(1) רק אחד מהם קטן מ-1

(2) רק שניים מהם קטנים מ-1

(3) סכום שלושתם יחד גדול מ-1

(4) כל אחד משלושתם גדול מ-1

---

6. נתון: x הוא מספר זוגי, ו-y הוא מספר אי-זוגי $(x < y)$.

מה מספר המספרים הזוגיים בין x לבין y (לא כולל x)?

(1) $\frac{y-x}{2}$

(2) $\frac{y-x}{2}-1$

(3) $\frac{y-x+1}{2}+1$

(4) $\frac{y-x-1}{2}$

---

7. a, b ו-c הם שלושה מספרים שלמים השונים זה מזה.

נתון: $a+b+c=20$

איזו טענה מהטענות הבאות נכונה **בהכרח**?

(1) b אינו שווה לממוצע של a, b ו-c

(2) המספר הקטן מתוך a, b ו-c הוא אי-זוגי

(3) c אינו שווה ל-10

(4) סכום כל שניים מהמספרים גדול מהשלישי

---

8. נתון: a ו-x הם מספרים שלמים וחיוביים.

$a < x < 2a$

בהינתן a מסוים, כמה ערכים שונים יכול x לקבל?

(1) $a-1$

(2) a

(3) $a+1$

(4) $a+2$

פתרתי ____________ שאלות ב ____________ דקות, ____________ תשובות נכונות

9. נתון: $y = a^a$, $a \neq 0$

אם נגדיל את a פי 2, אזי y יגדל פי -

(1) a^a

(2) a^2

(3) $2^a \cdot a^a$

(4) $2^{2a} \cdot a^a$

---

10. על הלוח כתובים 12 מספרים חיוביים **שונים**, אשר כל אחד מהם מתחיל בספרה 4 ומסתיים בספרה 7.

איזו מהאפשרויות הבאות **לא** תיתכן?

(1) כל המספרים מורכבים מהספרות 4 ו-7 בלבד

(2) כל המספרים הם מספרים של 3 ספרות או פחות

(3) כל המספרים הם מספרים של 5 ספרות או יותר

(4) כל המספרים מתחלקים ב-9

פתרתי ____________ שאלות ב ____________ דקות, ____________ תשובות נכונות

תשובות

שאלה	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
תשובה	4	2	1	3	4	4	1	1	4	2

פתרתי 10 שאלות - ______________ נכונות, ______________ אחוזי הצלחה

1. תשובה (4) נכונה. שאלה 1 מתוך 20 בפרק.

נתון ש- a, b ו- c הם מספרים שלמים.
מאי-השוויון אנו מבינים שהם בהכרח חיוביים וש- a גדול מ- b הגדול מ- c.

כיוון שהשאלה מכוונת אותנו לתשובות, נבדוק אותן:

(1) אם $a = 3$ ו- $b = 2$, c יכול להיות 1, ולכן התשובה אפשרית. ⇐ התשובה נפסלת.

(2) אם $b = 2$ ו- $c = 1$, a יכול להיות כל מספר שלם שגדול מ-2, ולכן התשובה יכולה להיות נכונה. ⇐ התשובה נפסלת.

(3) הערכים $a = 5$, $b = 2$ ו- $c = 1$ מקיימים את הנתונים ולכן התשובה יכולה להיות נכונה. ⇐ התשובה נפסלת.

טיפ: פסלנו 3 תשובות ועל כן ניתן לסמן את תשובה (4) מבלי לבדוק אותה, אולם למען שלמות ההסבר נבדוק את נכונותה:

(4) אם $a = 2$ ו- $b = 1$, c צריך להיות מספר שלם בין 0 ל-1. מן הסתם אין מספר שמקיים תנאי זה, ועל כן התשובה בהכרח אינה נכונה. ⇐ **תשובה נכונה.**

.2 תשובה (2) נכונה. שאלה 3 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הצבת מספרים

נתון כי a, b ו-c הם מספרים זוגיים שונים. עוד נתון כי $a < b < c$. ההצבה המתבקשת ביותר לתרגיל היא להציב את המספרים 2, 4 ו- 6 לפי סדר האותיות. עלינו לוודא כי ההצבה הזו מקיימת גם את הנתון הנוסף:

$c - a < 10 \;\Rightarrow\; 6 - 2 < 10 \;\Rightarrow$ מתאים

x שווה להפרש בין b ל-a (b – a). נבדוק לפי ההצבה שלנו מה ההפרש בין המספרים הללו:

$b - a \;\Rightarrow\; 4 - 2 = 2$

כלומר, לפי ההצבה שביצענו, x יכול להיות 2.

דרך ב' – מינימום מקסימום / הבנה

נתון כי a, b ו-c הם מספרים זוגיים שונים. ידוע כי ההפרש בין c ל-a קטן מ-10 ($c - a < 10$). תחילה נבין, שההפרש בין המספרים חייב להיות זוגי משום ששניהם זוגיים (זוגי = זוגי – זוגי). לכן, אם ההפרש בין c ל-a הוא זוגי וקטן מ-10, הוא יכול להיות לכל היותר 8 (הזוגי הבא שקטן מ-10).

מכאן שההפרש בין b ל-a (x) צריך להיות זוגי גם כן וקטן מ-8 (משום ש-b קטן מ-c, ולכן ההפרש בין b ל-a יהיה קטן מההפרש בין c ל-a), כלומר x הוא לכל היותר 6.

מתוך ההבנה לעיל ניתן להבין שהתשובה האפשרית היחידה מבין התשובות המוצעות היא תשובה (2). כאמור, ההפרש בין שני זוגיים לא יכול להיות אי-זוגי ⇐ תשובה (1) נפסלת.
ונוסף על כך ההפרש בין b ל-a לא יכול להיות גדול מ-6 ⇐ תשובות (3) ו-(4) נפסלות.

.3 תשובה (1) נכונה. שאלה 13 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הצבת מספרים

עמוס בחר 11 מספרים חיוביים ושונים. לשם נוחות נניח שהוא בחר את המספרים:
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11.

שואלים אותנו על ההפרש בין שני מספרים בקבוצה, והתשובות הן מספרים יחסית גבוהים (10 ומעלה), לכן נבדוק את ההפרש בין המספרים בקצוות וננסה להגיע להפרשים שבתשובות.
נראה שההפרש המקסימלי בקבוצת המספרים שהצבנו מתקבל כאשר מחסרים מהמספר הגדול ביותר (11) את המספר הקטן ביותר (1). כלומר, ההפרש המקסימלי המתקבל בקבוצת המספרים שבחרנו הוא 10. אם זהו ההפרש המקסימלי, לא נוכל להגיע לתשובות האחרות ולכן הן לא נכונות **בהכרח.** מכיוון שפסלנו את שלוש התשובות הנותרות ניתן לסמן את תשובה (1) כתשובה הנכונה.

דרך ב' – הבנה

עמוס בחר 11 מספרים חיוביים ושונים. מכיוון שקיימות רק 10 ספרות שונות (0– 9), לפחות זוג אחד של מספרים יהיה בעל אותה ספרת אחדות (לא יכול להיות שלכל מספר תהיה ספרת אחדות שונה משום שכאמור, יש רק עשר ספרות שונות).

לפיכך, ברגע שנחסר בין שני המספרים בעלי ספרת האחדות הזהה, ספרת האחדות של ההפרש תהיה 0. אנו יודעים כי סימן ההתחלקות של 10 הוא מספר שספרת האחדות שלו היא 0, ולכן בוודאות יהיו בקבוצה שני מספרים שההפרש ביניהם מתחלק ב-10.

4. תשובה (3) נכונה. שאלה 14 מתוך 20 בפרק.

$a < b < c$, כאשר a, b ו-c הם מספרים חיוביים ושלמים.
נתון: $a + b + c = 10$

תחילה, נבין שעל מנת למצוא הערך הקטן ביותר לביטוי $(c - a)$ עלינו לבחור למצוא את ה-c הקטן ביותר וה-a הגדול ביותר שיקיימו את הנתונים (כך המספרים יהיו הכי "קרובים" אחד לשני).
c הוא המספר הגדול מבין השלושה. עלינו להבין ש-c חייב להיות גדול מ-4; כאשר $c = 4$ הסכום המקסימלי של שלושת המספרים יהיה: $2 + 3 + 4 = 9$, ועדיין אינו מגיע ל-10.
לכן, ה-c המינימלי שאנו יכולים לבחור בו הוא 5.

כעת, כאמור, עלינו למצוא מהו ה-a הגדול ביותר שניתן להציב כאשר $c = 5$; נותר עוד 5 לסכום של a ו-b (שהרי סכום כל השלושה הוא 10). על מנת לקבל את ה-a המקסימלי, נחלק את ה-5 הנותרים כך שנוכל לתת כמה שיותר ל-a (שחייב להיות קטן מ-b). ההצבה המתאימה היא:
$a = 2\ ,\ b = 3\ ,\ c = 5$. במקרה כזה:

$$c - a = 5 - 2 = 3$$

5. תשובה (4) נכונה. שאלה 15 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הצבת מספרים
אנו נשאלים איזו מהטענות בהכרח אינה נכונה. על כן, אנו יכולים להציב מספרים ולפסול כל טענה שנכונה לפי אחת מההצבות שעשינו. נציב מספרים שעונים על הנתונים, לדוגמה:

$a=1, b=2, c=3$

המספרים שמתקבלים הם:

$\frac{a}{b}=\frac{1}{2}$ $\quad\frac{b}{c}=\frac{2}{3}$ $\quad\frac{c}{a}=\frac{3}{1}=3$

כעת נבדוק אילו תשובות נפסלות לפי הצבה זו:

<u>נבדוק את תשובה (1)</u>:
הטענה בתשובה זו היא שרק אחד מהמספרים קטן מ-1. מבין המספרים שקיבלנו, גם $\frac{1}{2}$ וגם $\frac{2}{3}$ הם מספרים שקטנים מ-1. טענה זו אינה נכונה במקרה זה, ועל כן יכול להיות שהיא בהכרח אינה נכונה. תשובה זו **אינה** נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (2)</u>:
הטענה בתשובה זו היא שרק שניים מהמספרים קטנים מ-1. באמת רק שניים מהם קטנים מ-1 $\left(\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right)$. טענה זו מתקיימת ולכן התשובה נפסלת (אנו מחפשים איזו טענה בהכרח **אינה** נכונה).

<u>נבדוק את תשובה (3)</u>:
הטענה בתשובה זו היא שסכום שלושתם יחד גדול מ-1. $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+3 \Leftarrow$ אכן גדול מ-1. טענה זו מתקיימת ולכן התשובה נפסלת (אנו מחפשים איזו טענה בהכרח אינה נכונה).

<u>נבדוק את תשובה (4)</u>:
הטענה בתשובה זו היא שכל אחד משלושתם גדול מ-1. רק המספר 3 גדול מ-1, ואילו שני המספרים האחרים קטנים מ-1. טענה זו אינה נכונה במקרה זה, ועל כן יכול להיות שהיא בהכרח אינה נכונה. תשובה זו **אינה** נפסלת.

פסלנו רק שתי תשובות, ועל כן עלינו לבצע הצבה נוספת. לשם כך, נציב לדוגמה:

$a=3, b=2, c=1$

המספרים שמתקבלים הם:

$\frac{a}{b}=\frac{3}{2}$ $\quad\frac{b}{c}=\frac{2}{1}=2$ $\quad\frac{c}{a}=\frac{1}{3}$

<u>נבדוק את תשובה (1)</u>:
הטענה בתשובה זו היא שרק אחד מהמספרים קטן מ-1. אכן בהצבה זו רק $\frac{1}{3}$ קטן מ-1. טענה זו מתקיימת ולכן התשובה נפסלת (אנו מחפשים איזו טענה בהכרח אינה נכונה).

פסלנו 3 תשובות ולכן תשובה (4) נכונה. למען שלמות ההסבר, נראה כי זו מתאימה גם לפי הצבה זו.

<u>נבדוק את תשובה (4)</u>:
הטענה בתשובה זו היא שכל אחד משלושתם גדול מ-1. אחד המספרים הוא $\frac{1}{3}$, אשר אינו גדול מ-1. טענה זו אינה נכונה גם במקרה זה.

דרך ב' – הבנה
נתון ש-a, b ו-c הם מספרים שלמים, חיוביים ושונים זה מזה.
לפי הטענה בתשובה (4), כל אחד משלושת המספרים $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{c}$, $\frac{c}{a}$ גדול מ-1.
על מנת ששבר יהיה גדול מ-1, על המונה להיות גדול מהמכנה. כיוון שבכל אחד מהמספרים המתוארים יש מונה שונה (a, b או c), ואחד מהנעלמים האלו בוודאות הקטן ביותר מבין השלושה, הרי שלא ייתכן שבכל אחד מהשברים יהיה מונה גדול מהמכנה. לכן, יהיה לפחות מספר אחד שערכו יהיה קטן מ-1. כלומר, טענה זו בהכרח אינה נכונה.

6. תשובה (4) נכונה. שאלה 16 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הצבת מספרים

נתון כי y הוא אי-זוגי ו-x הוא זוגי כאשר $x < y$. אנו מתבקשים לחשב כמה מספרים זוגיים נמצאים בין x ל-y (לא כולל את x).

לצורך כך, נציב במקום הנעלמים מספרים נוחים ונבדוק כמה מספרים זוגיים מתקבלים בטווח שהצבנו.
נציב לדוגמה ש- $y = 3$, וש- $x = 2$. בין 2 ל-3 אין מספרים זוגיים (לא כולל את 2).

נציב בתשובות $y = 3$, $x = 2$ ונחפש תשובה השווה ל-0 (שכן יש אפס מספרים זוגיים בין 2 ל-3). נשים לב שמכיוון שהשתמשנו בהצבת מספרים, עלינו לפסול 3 תשובות בטרם נוכל לסמן תשובה נכונה.

(1) $\frac{y-x}{2} \Rightarrow \frac{3-2}{2} = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ לא מתאים, התשובה נפסלת

(2) $\frac{y-x}{2} - 1 \Rightarrow \frac{3-2}{2} - 1 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ לא מתאים, התשובה נפסלת

(3) $\frac{y-x+1}{2} + 1 \Rightarrow \frac{3-2+1}{2} + 1 = \frac{2}{2} + 1 = 2$ $\Rightarrow$ לא מתאים, התשובה נפסלת

טיפ: כיוון שפסלנו 3 תשובות, ניתן לסמן את תשובה (4) מבלי לבדוק אותה. למען שלמות ההסבר, נבדוק את נכונותה:

(4) $\frac{y-x-1}{2} \Rightarrow \frac{3-2-1}{2} = \frac{0}{2} = 0$ $\Rightarrow$ **מתאים**

פסלנו 3 תשובות ועל כן תשובה (4) נכונה.

דרך ב' – הבנה

נתון כי y הוא אי-זוגי ו-x הוא זוגי, כאשר $x < y$. אנו נשאלים כמה מספרים זוגיים נמצאים בין x ל-y (לא כולל את x).

תחילה נחשב כמה מספרים (זוגיים ואי-זוגיים) נמצאים בטווח שבין x ל-y, ולאחר מכן נחלק את המספר ב-2 כדי למצוא את הזוגיים בלבד.

כדי למצוא כמה מספרים קיימים בין x ל-y עלינו להתחיל מחישוב ההפרש ביניהם ⇐ $y - x$.
עתה אנו צריכים לחסר מההפרש איבר אחד, משום שכאשר אנו מחשבים הפרש בין שני מספרים אנו למעשה מכלילים את אחד הקצוות בספירה, ולכן כדי למצוא כמה מספרים שלמים נמצאים בין x ל-y נחסר איבר אחד מההפרש ⇐ $y - x - 1$.
ניתן להבין עיקרון זה ע"י הצבה מספרית: ההפרש בין 8 ל-6 למשל הוא 2, אך אם אנחנו רוצים לבדוק כמה מספרים נמצאים בין 8 ל-6 עלינו לחסר מההפרש 1 (רק המספר 7 נמצא ביניהם, ולא שני מספרים).

משום שטווח המספרים שלנו מתחיל ממספר אי-זוגי (המספר הבא אחרי x) ונגמר במספר זוגי (המספר שלפני y), יש שוויון בין מספר האיברים הזוגיים לבין מספר האיברים האי-זוגיים. על כן, כדי למצוא את מספר האיברים הזוגיים בטווח, נחלק את מספר האיברים הכולל שמצאנו ב-2 ⇐ $\frac{y-x-1}{2}$.

.7 תשובה (1) נכונה. שאלה 17 מתוך 20 בפרק.

a, b ו-c הם שלושה מספרים שלמים ושונים שסכומם 20. נשאלנו איזו מהתשובות נכונה בהכרח.

נבדוק את תשובה (1): סכומם של a, b ו-c הוא 20. לכן, הממוצע שלהם הוא $\frac{20}{3}$. אין צורך לחשב את הממוצע במדויק משום שניתן לראות כי המנה היא איננה מספר שלם (20 לא מתחלק ב-3). מפני שידוע ש-b הוא מספר שלם, לא יתכן כי הוא שווה לממוצע של a, b ו-c, שהוא כאמור מספר לא שלם. **תשובה נכונה.**

טיפ: מכיוון שבדקנו את התשובות, ברגע שמצאנו תשובה נכונה אין צורך להמשיך לבדוק את שאר התשובות, אך למען שלמות ההסבר נפסול אותן:

נבדוק את תשובה (2): המספר הקטן מבין השלושה עשוי להיות דווקא מספר זוגי, למשל בשלשה: 2, 4, 14. התשובה נפסלת.

נבדוק את תשובה (3): c עשוי להיות דווקא שווה ל-10. למשל: $a = 1$, $b = 9$, $c = 10$. התשובה נפסלת.

נבדוק את תשובה (4): סכום כל שני מספרים לא בהכרח גדול מהשלישי, למשל בשלשה: 2, 4, 14.
$4 + 2$ לא גדול מ-14. התשובה נפסלת.

.8 תשובה (1) נכונה. שאלה 18 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הצבת מספרים

נתון כי a ו-x הם מספרים שלמים וחיוביים, וכי $a < x < 2a$. אנו נשאלים כמה ערכים x יכול לקבל בהינתן a מסוים. לצורך פתרון התרגיל, נציב a כלשהו ונבדוק כמה ערכי x נקבל.

נציב למשל $a = 2$. לפי ההצבה שבחרנו 2a שווה 4 $(2 \cdot 2)$. לפיכך, x הוא מספר שלם בין 2 ל-4 $\Leftarrow x = 3$.
לכן, כאשר $a = 2$, יש ערך אפשרי אחד בלבד ל-x.

נציב בתשובות $a = 2$, ונחפש תשובה השווה ל-1 (שכן מצאנו שכאשר $a = 2$ ישנו ערך אחד המקיים את x). נשים לב שמכיוון שהשתמשנו בהצבת מספרים, עלינו לפסול 3 תשובות בטרם נוכל לסמן תשובה נכונה.

(1)	$a - 1 \Rightarrow 2 - 1 = 1$	$\Rightarrow$	**מתאים**
(2)	$a \Rightarrow 2$	$\Rightarrow$	לא מתאים, התשובה נפסלת
(3)	$a + 1 \Rightarrow 2 + 1 = 3$	$\Rightarrow$	לא מתאים, התשובה נפסלת
(4)	$a + 2 \Rightarrow 2 + 2 = 4$	$\Rightarrow$	לא מתאים, התשובה נפסלת

פסלנו 3 תשובות ועל כן תשובה (1) נכונה.

דרך ב' – הבנה אלגברית

תחילה נבין כמה מספרים נמצאים בטווח שבין a ל-2a. ההפרש בין 2a ל-a הוא a $(2a - a)$. אך, כאשר אנו מחשבים הפרש בין שני מספרים אנו למעשה מכלילים את אחד הקצוות בספירה, ולכן כדי למצוא כמה מספרים שלמים נמצאים בין a ל-2a עלינו לחסר איבר אחד מההפרש $\Leftarrow a - 1$.

ניתן להבין עיקרון זה גם ע"י הצבה מספרית: ההפרש בין 8 ל-6 למשל הוא 2, אך אם אנחנו רוצים לבדוק כמה מספרים נמצאים בין 8 ל-6 עלינו לחסר מההפרש 1 (רק המספר 7 נמצא ביניהם, ולא שני מספרים).

---

9. תשובה (4) נכונה. שאלה 20 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הצבת מספרים

נתון כי $y = a^a$. אנו מתבקשים לחשב בכמה יגדל y אם a יגדל פי 2.

לצורך כך, נציב כי $a = 1$ ונמצא את ערכו הנוכחי של y.

$$y = a^a \;\Rightarrow\; y = 1^1 = 1$$

עתה, נגדיל את a פי 2 ($a = 2$) ונחשב פי כמה גדל ערכו של y:

$$y = a^a \;\Rightarrow\; y = 2^2 = 4$$

לאחר שהגדלנו את a פי 2, ערכו של y גדל פי 4.

נציב בתשובות $a = 1$, ונחפש תשובה השווה ל-4. נשים לב שמכיוון שהשתמשנו בהצבת מספרים, עלינו לפסול 3 תשובות בטרם נוכל לסמן תשובה נכונה.

(1) $a^a \;\Rightarrow\; 1^1 = 1 \;\Rightarrow$ לא מתאים, התשובה נפסלת

(2) $a^2 \;\Rightarrow\; 1^2 = 1 \;\Rightarrow$ לא מתאים, התשובה נפסלת

(3) $2^a \cdot a^a \;\Rightarrow\; 2^1 \cdot 1^1 = 2 \cdot 1 = 2 \;\Rightarrow$ לא מתאים, התשובה נפסלת

טיפ: כיוון שפסלנו 3 תשובות, ניתן לסמן את תשובה (4) מבלי לבדוק אותה. למען שלמות ההסבר, נבדוק את נכונותה:

(4) $2^{2a} \cdot a^a \;\Rightarrow\; 2^{2\cdot 1} \cdot 1^1 = 4 \cdot 1 = 4 \;\Rightarrow$ **מתאים**

פסלנו 3 תשובות ועל כן תשובה (4) נכונה.

דרך ב' – פתרון מתמטי

נתון כי $y = a^a$. אנו מתבקשים לחשב בכמה יגדל y אם a יגדל פי 2. לצורך כך נגדיל את a ל-2a, ונקבל:

$$y = (2a)^{2a}$$

נפתח את הסוגריים לפי חוקי חזקות:

$$y = 2^{2a} \cdot a^{2a}$$

כדי לראות פי כמה גדול y המקורי, נבודד את ערכו (a^a) מהביטוי החדש:

$$y = 2^{2a} \cdot a^{2a} = 2^{2a} \cdot (a^a)^2 = 2^{2a} \cdot a^a \cdot a^a$$

עתה ניתן לראות שערכו המקורי של y (a^a) גדל פי הביטוי – $2^{2a} \cdot a^a$.

10. תשובה (2) נכונה. שאלה 20 מתוך 20 בפרק.

על הלוח כתובים 12 מספרים חיוביים שונים. נתון שכל אחד מהם מתחיל בספרה 4 ומסתיים בספרה 7. נבדוק את התשובות ונקבע איזו טענה לא תיתכן:

<u>נבדוק את תשובה (1)</u>:

כל המספרים מורכבים מהספרות 4 ו-7 בלבד.

מאחר שאין הגבלה על אורך המספרים, אפשרות זו תיתכן. המספרים יכולים להיות 47, 477, 4777 וכן הלאה. התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (2)</u>:

כל המספרים מורכבים מ-3 ספרות או פחות.

יש מספר דו-ספרתי אחד המקיים את הנתונים – 47.

באשר למספרים התלת-ספרתיים, כל מספר חייב להיות בנוי כך – 7 _ 4. בעבור הספרה האמצעית ישנן 10 אפשרויות ולכן ישנם 10 מספרים תלת-ספרתיים המקיימים את הנתונים.

בסך הכול מדובר יש 11 מספרים אפשריים, ועל כן לא ייתכן שכתובים 12 מספרים שונים. הטענה לא תיתכן, ומכאן שזו **התשובה הנכונה**.

טיפ: ברגע שמצאנו תשובה נכונה אין צורך להמשיך לבדוק את שאר התשובות, אך למען שלמות ההסבר נפסול אותן:

<u>נבדוק את תשובה (3)</u>:

כל המספרים הם מספרים של 5 ספרות או יותר.

בדומה לטענה הראשונה, גם כאן ניתן להרכיב מספרים שכאלה מפני שאין הגבלה על אורך המספרים. למשל – 40007, 411117 וכן הלאה. התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (4)</u>:

כל המספרים מתחלקים ב-9.

כדי שמספר יתחלק ב-9, סכום הספרות צריך להתחלק ב-9. ניתן להרכיב את המספרים הבאים למשל – 477, 4077, 40077 וכן הלאה. התשובה נפסלת.