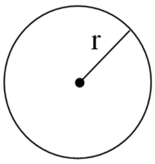
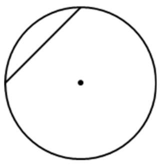
מעגלים - יסודות

מונחים במעגל

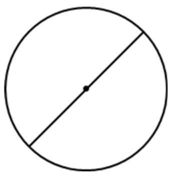
רדיוס - קו ישר המחבר את מרכז המעגל לנקודה כלשהי על היקף המעגל.
הרדיוס מסומן באות r.
כל הרדיוסים במעגל מסוים שווים זה לזה.



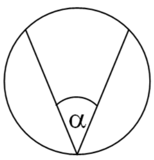
מיתר - קו ישר המחבר שתי נקודות על היקף המעגל.



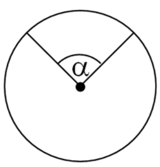
קוטר - מיתר העובר דרך מרכז המעגל.
אורכו של הקוטר הוא $2r$.
הקוטר הוא המיתר הארוך ביותר במעגל.



זווית היקפית - זווית הכלואה בין שני מיתרים.

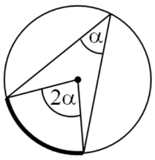


זווית מרכזית - זווית הכלואה בין שני רדיוסים.



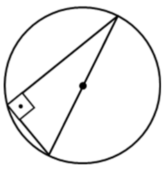
זוויות במעגל

זווית מרכזית שווה לפעמיים הזווית ההיקפית הנשענת על אותה קשת.



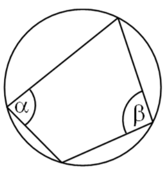
זוויות היקפיות הנשענות על אותה קשת, או על קשתות שוות, שוות זו לזו.

זווית היקפית הנשענת על קוטר שווה ל- $90°$.



במרובע חסום במעגל, סכום זוויות נגדיות שווה ל- $180°$.

$$\alpha + \beta = 180°$$



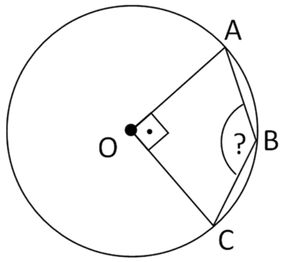
הכלל הראשי הוא שהזווית המרכזית כפולה מהזווית ההיקפית הנשענת על אותה קשת.
שאר הכללים האחרים נובעים ממנו:

זוויות היקפיות שוות - על הקשת של זווית מרכזית מסוימת אפשר לבנות אינסוף זוויות היקפיות שכולן שוות למחצית מהזווית המרכזית, ולכן כולן שוות זו לזו.

זווית היקפית על קוטר - על הקוטר, הזווית המרכזית שווה ל- $180°$, ולכן הזווית ההיקפית שלה שווה לחצי ממנה - $90°$.

סכום זוויות נגדיות במרובע חסום - אם נעביר רדיוסים ממרכז המעגל לשני הקודקודים האחרים של המרובע, נקבל שתי זוויות מרכזיות (אחת מכל צד) - אחת שווה ל-2α ואחת שווה ל-2β.
יחד, שתי הזוויות המרכזיות שוות ל- $360°$ ולכן $\alpha + \beta = 180°$ (בדיוק חצי מהן).

דוגמה:



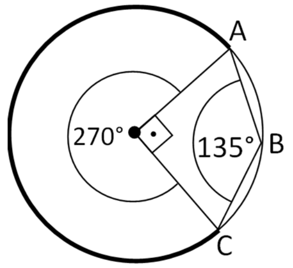
בסרטוט שלפניכם מעגל שמרכזו O.

נתון: $\sphericalangle AOC = 90^\circ$

על-פי נתונים אלה ונתוני הסרטוט, מה גודלה של הזווית המסומנת בסימן שאלה?

(1) 90°
(2) 135°
(3) 145°
(4) 150°

פתרון -

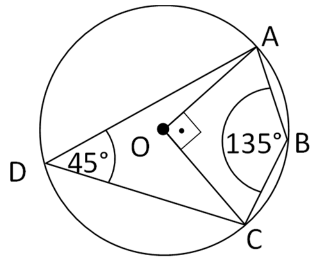


הזווית המשלימה את הזווית הישרה ל- 360° היא בת 270° (הזווית שנשענת על הקשת המודגשת).

הזווית המבוקשת נשענת גם היא על הקשת המודגשת, ומכיוון שהיא זווית היקפית, היא שווה למחצית מהזווית המרכזית -

חצי מ- $270^\circ \Leftarrow 135^\circ$

דרך נוספת -



נבנה זווית היקפית לזווית המרכזית שבסרטוט.
זווית היקפית שווה למחצית מהזווית המרכזית הנשענת על אותה קשת,
ולכן $\sphericalangle D = 45^\circ$.

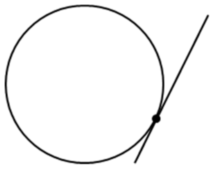
במרובע חסום במעגל, סכום זוויות נגדיות שווה ל- 180°, ולכן:

$$180^\circ = \sphericalangle D + \sphericalangle ABC$$
$$180^\circ = 45^\circ + \sphericalangle ABC$$
$$135^\circ = \sphericalangle ABC$$

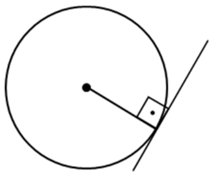
תשובה (2) נכונה.

משיקים למעגל

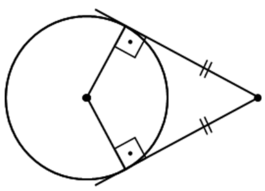
משיק - קו ישר העובר מחוץ למעגל ונוגע בהיקף המעגל בנקודה אחת בלבד הנקראת נקודת ההשקה.



הרדיוס מאונך למשיק בנקודת ההשקה.



שני משיקים היוצאים מאותה נקודה שווים זה לזה, ויוצרים דלתון עם הרדיוסים לנקודת ההשקה.

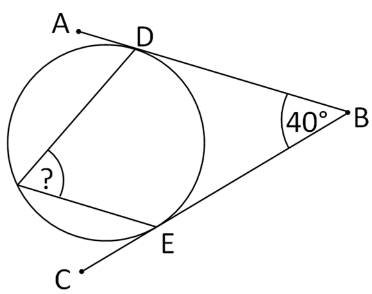


דוגמה:

הישרים AB ו-CB משיקים למעגל שבסרטוט בנקודות D ו-E בהתאמה (ראה סרטוט).

נתון: $\sphericalangle ABC = 40^\circ$

לפי נתונים אלה והנתונים שבסרטוט,
מה גודלה של הזווית המסומנת בסימן שאלה?

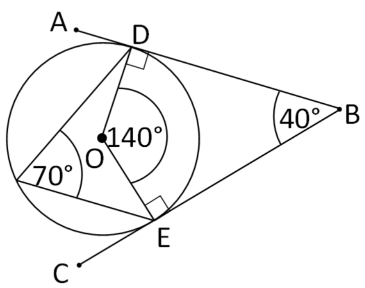


(1) 90° (2) 70° (3) 55° (4) 40°

פתרון -

נחבר את מרכז המעגל לנקודות ההשקה D ו-E.
הרדיוסים מאונכים למשיקים בנקודות ההשקה.
סכום זוויות במרובע DOEB הוא 360°, ולכן זווית $\sphericalangle DOE = 140^\circ$.

הזווית המבוקשת היא הזווית ההיקפית של $\sphericalangle DOE$ ולכן שווה לחצי ממנה - 70°.



תשובה (2) נכונה.

שטח והיקף מעגל

היקף מעגל = $2\pi r$	**שטח מעגל** = πr^2	$\pi \approx 3.14$

דוגמה:
נתון מעגל ששטחו בסמ"ר שווה להיקפו בס"מ.
מה אורכו של רדיוס המעגל?

(1) 1 (2) 2 (3) $\frac{1}{2}$ (4) 4

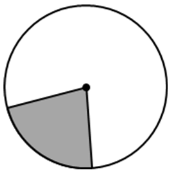
פתרון -
נבנה משוואה בהתאם לנתונים:

$$\pi r^2 = 2\pi r \quad \Rightarrow \quad r^2 = 2r \quad \Rightarrow \quad r = 2$$

תשובה (2) נכונה.

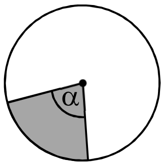
גזרה במעגל

גזרה - חלק מהמעגל הכלוא בין שני רדיוסים והקשת שביניהם.

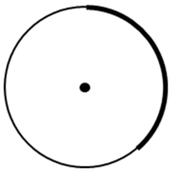


שטח גזרה שווה לחלק היחסי של הגזרה מתוך שטח המעגל.

$$\frac{\alpha}{360}\cdot\pi r^2$$

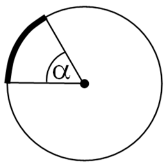


קשת - חלק מהיקף המעגל.



אורך קשת - שווה לחלק היחסי של קשת הגזרה מתוך היקף המעגל.

$$\frac{\alpha}{360}\cdot 2\pi r$$



<u>זוויות שכדאי לזכור בחישובי גזרות:</u>

$120°$ ← $\frac{1}{3}$ מעגל

$90°$ ← $\frac{1}{4}$ מעגל

$72°$ ← $\frac{1}{5}$ מעגל

$60°$ ← $\frac{1}{6}$ מעגל

$45°$ ← $\frac{1}{8}$ מעגל

$40°$ ← $\frac{1}{9}$ מעגל

$36°$ ← $\frac{1}{10}$ מעגל

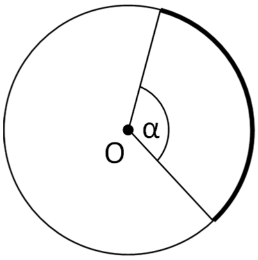
$30°$ ← $\frac{1}{12}$ מעגל

$240°$ ← $\frac{2}{3}$ מעגל

$270°$ ← $\frac{3}{4}$ מעגל

$144°$ ← $\frac{2}{5}$ מעגל

דוגמה:



בסרטוט שלפניכם מעגל שמרכזו O ורדיוסו 3 ס״מ.
אורכה של הקשת המודגשת הוא 2π ס״מ.

על פי נתונים אלה ונתוני הסרטוט,
$\alpha = ?$

(1) 100° (2) 120° (3) 150° (4) 90°

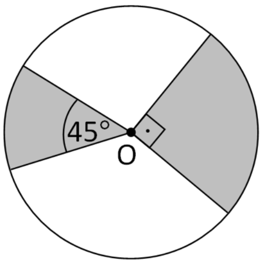
פתרון -

נחשב את היקף המעגל: $2\pi r = 2\pi \cdot 3 = 6\pi$

אורך הקשת המודגשת הוא $\frac{1}{3}$ מהיקף המעגל, ולכן זווית α צריכה להיות $\frac{1}{3}$ מתוך $360^\circ \Leftarrow 120^\circ$.

תשובה (2) נכונה.

דוגמה:



בסרטוט שלפניכם מעגל שמרכזו O ורדיוסו 4 ס״מ.

על-פי נתונים אלה ונתוני הסרטוט,
מה גודל השטח הכהה (בסמ״ר)?

(1) 8π
(2) 2π
(3) 6π
(4) 4π

פתרון -

החלק הכהה הימני הוא $\frac{1}{4}$ משטח המעגל (זווית בת 90°).
החלק הכהה השמאלי הוא $\frac{1}{8}$ משטח המעגל (זווית בת 45°).
בסך הכל, החלק הכהה הוא $\frac{3}{8}$ משטח המעגל.
נחשב את שטח המעגל:

$$\pi r^2 = \pi \cdot 4^2 = 16\pi$$

נחשב כמה הם $\frac{3}{8}$ מתוך שטח המעגל:

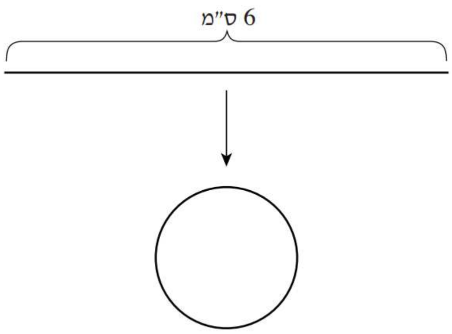
$$\frac{3}{8} \cdot 16\pi = 6\pi$$

תשובה (3) נכונה.

תרגול יסודות

1. לקחו חוט שאורכו 6 ס"מ ויצרו מעגל על ידי חיבור קצותיו (ראו סרטוט).

מה רדיוס המעגל שנוצר (בס"מ)?



(1) π

(2) $\frac{2}{\pi}$

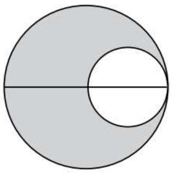
(3) $\frac{3}{\pi}$

(4) $\frac{4}{\pi}$

---

2. בסרטוט שלפניכם קוטר המעגל הקטן הוא רדיוס המעגל הגדול, ואורכו 2 ס"מ.

מה גודל השטח הכהה (בסמ"ר)?



(1) π

(2) 2π

(3) 3π

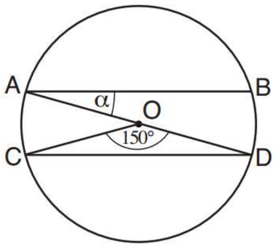
(4) 4π

---

3. בסרטוט שלפניכם הנקודה O היא מרכז המעגל, ו-AD הוא קוטר במעגל.

נתון: $\sphericalangle COD = 150°$

$AB \parallel CD$



$\alpha = ?$

(1) $10°$

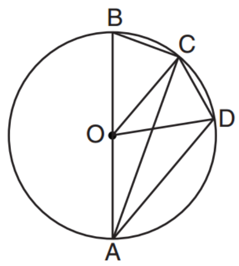
(2) $15°$

(3) $30°$

(4) $25°$

.4 בסרטוט שלפניכם מעגל שמרכזו O וקוטרו AB.
נתון: $\sphericalangle BAC = \sphericalangle CAD$

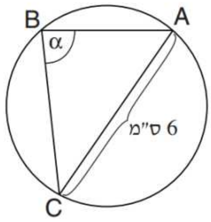
איזו מהטענות הבאות בהכרח **אינה** נכונה?



(1) $BC = CD$
(2) $AC = AD$
(3) $\sphericalangle ACB = 90°$
(4) $\sphericalangle BOC = \sphericalangle COD$

.5 בסרטוט שלפניכם מעגל ששטחו 9π סמ"ר.
ABC הוא משולש החסום במעגל.

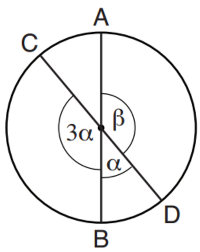
לפי נתונים אלה והנתונים שבסרטוט,
$\alpha = ?$



(1) $45°$
(2) $60°$
(3) $75°$
(4) $90°$

.6 AB ו-CD הם קטרים במעגל.

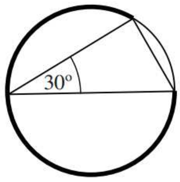
על פי נתון זה ונתוני הסרטוט,
$\beta = ?$



(1) $100°$
(2) $115°$
(3) $120°$
(4) $135°$

7. בסרטוט שלפניך משולש חסום במעגל.

על פי נתון זה ונתוני הסרטוט,
איזה חלק מהיקף המעגל היא הקשת המודגשת?



(1) $\frac{4}{5}$

(2) $\frac{7}{12}$

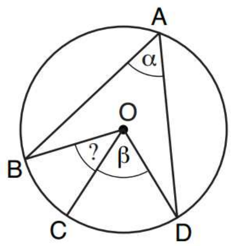
(3) $\frac{5}{6}$

(4) $\frac{3}{4}$

---

8. A, B, C ו-D הן נקודות על היקף המעגל שבסרטוט.
הנקודה O היא מרכז המעגל.

על פי נתונים אלה ונתוני הסרטוט,
$\sphericalangle BOC = ?$



(1) $2\alpha - 2\beta$

(2) $\alpha + 2\beta$

(3) $\beta - \alpha$

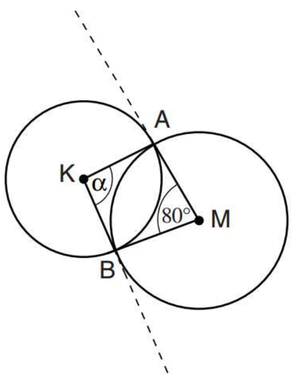
(4) $2\alpha - \beta$

---

9. K ו-M הם מרכזי מעגלים הנחתכים בנקודות A ו-B.
MA משיק בנקודה A למעגל שמרכזו K.
KB משיק בנקודה B למעגל שמרכזו M.

לפי נתונים אלה והנתונים שבסרטוט,

$\alpha = ?$



(1) $80°$

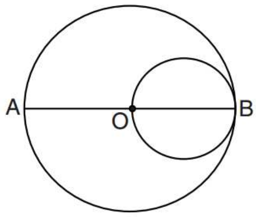
(2) $100°$

(3) $120°$

(4) $140°$

.10 בסרטוט שלפניכם שני מעגלים. הנקודה O היא מרכז המעגל הגדול,
AB הוא קוטר במעגל הגדול, ו-OB הוא קוטר במעגל הקטן.
היקף המעגל הקטן הוא 4π ס"מ.

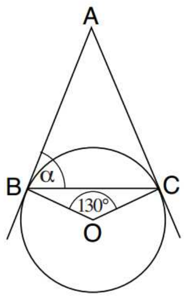
מה היקף המעגל הגדול (בס"מ)?



(1) 6π
(2) 8π
(3) 12π
(4) 16π

.11 מהנקודה A יוצאות שתי קרניים המשיקות למעגל שמרכזו O בנקודות B ו-C ‏(AB = AC).

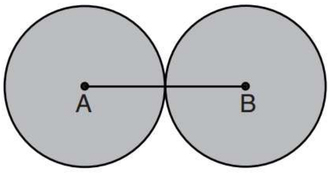
על פי נתון זה ונתוני הסרטוט,
$\alpha = ?$



(1) $45°$
(2) $50°$
(3) $60°$
(4) $65°$

.12 בסרטוט שלפניכם שני מעגלים חופפים משיקים שמרכזיהם A ו-B.
גודל השטח הכהה הוא 32π סמ"ר.

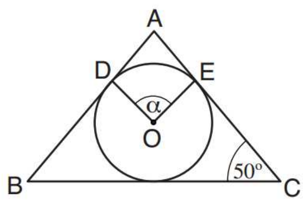
מה אורך הישר AB (בס"מ)?



(1) 16
(2) 10
(3) 8
(4) 6

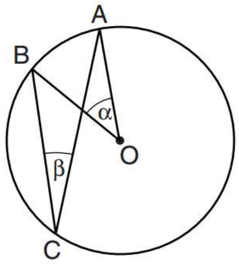
.13 בסרטוט שלפניך משולש שווה שוקיים ABC ‏(AB = AC) החוסם מעגל שמרכזו O.
הצלעות AB ו-AC משיקות למעגל בנקודות D ו-E בהתאמה.

על פי נתונים אלה ונתוני הסרטוט,
$\alpha = ?$



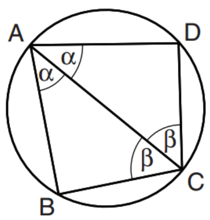
(1) $100°$
(2) $90°$
(3) $60°$
(4) $50°$

.14 בסרטוט שלפניכם מעגל שמרכזו O.
AC ו-BC הם מיתרים במעגל.
לפי נתונים אלה והנתונים שבסרטוט,
$\beta - \frac{\alpha}{2} = ?$



(1) 0 (2) $\frac{\alpha}{2}$ (3) $\frac{\beta}{2}$ (4) $\frac{\beta}{4}$

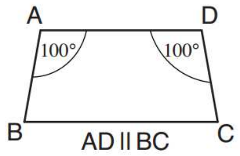
.15 המרובע ABCD חסום במעגל **ששטחו** π סמ"ר.
לפי נתון זה והנתונים שבסרטוט,
מה אורכו של AC (בס"מ)?



(1) 1
(2) 2
(3) $\frac{3}{2}$
(4) $\frac{2}{3}$

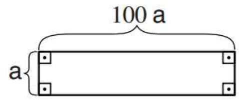
.16 איזה מן המצולעים הבאים **אי-אפשר** לחסום במעגל?

(1)

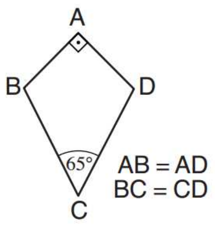


(2) מצולע משוכלל
בעל 13 צלעות

(3)

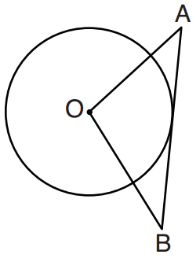


(4)



17. בסרטוט שלפניכם O הוא מרכז מעגל שרדיוסו 2 ס"מ.
AB משיק למעגל. שטח המשולש AOB הוא 3 סמ"ר.

מה אורך הקטע AB (בס"מ)?

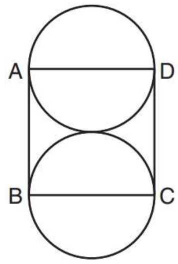


(1) $\sqrt{3}$
(2) 2
(3) 3
(4) $2\sqrt{2}$

---

18. בסרטוט שלפניכם שני מעגלים חופפים המשיקים זה לזה.
AD ו-BC הם קטרים במעגלים.
ABCD הוא ריבוע **שהיקפו** 12 ס"מ.

לפי נתונים אלה,
מה סכום ההיקפים של שני המעגלים (בס"מ)?

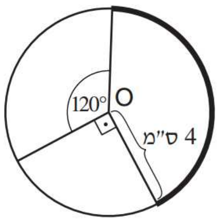


(1) 24π
(2) 12π
(3) 6π
(4) 4π

---

19. בסרטוט שלפניכם מעגל שמרכזו O ואורך רדיוסו 4 ס"מ.

לפי נתונים אלה והנתונים שבסרטוט,
מה אורך הקשת המודגשת (בס"מ)?

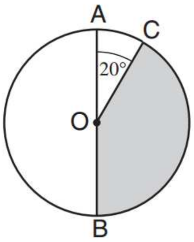


(1) $\frac{5\pi}{2}$
(2) 2π
(3) $\frac{8\pi}{3}$
(4) $\frac{10\pi}{3}$

---

20. בסרטוט שלפניכם מעגל שמרכזו O ושטחו 9π סמ"ר. AB הוא קוטר במעגל.
נתון: $\sphericalangle AOC = 20^\circ$

מה שטח הגזרה הכהה (בסמ"ר)?



(1) 3.5π
(2) 4.5π
(3) 3π
(4) 4π

תשובות

שאלה	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
תשובה	3	3	2	2	4	4	3	4	2	2

שאלה	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
תשובה	4	3	1	1	2	4	3	3	4	4

פתרתי 20 שאלות - ____________ נכונות, ____________ אחוזי הצלחה

1. תשובה (3) נכונה. שאלה 1 מתוך 20 בפרק.

יצרו מעגל מחוט שאורכו 6 ס״מ, כלומר היקף המעגל הוא 6 ס״מ. עלינו לקבוע מה רדיוס מעגל זה. נכתוב זאת באופן אלגברי ונחלץ את r:

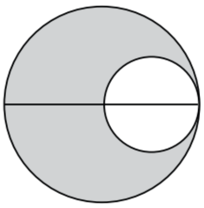
$$2\pi r = 6$$

נחלק ב-2π:

$$r = \frac{6}{2\pi} = \frac{3}{\pi}$$

---

2. תשובה (3) נכונה. שאלה 2 מתוך 20 בפרק.



עלינו למצוא את גודלו של השטח הכהה. השטח הכהה שווה לשטח המעגל הגדול פחות שטח המעגל הקטן.

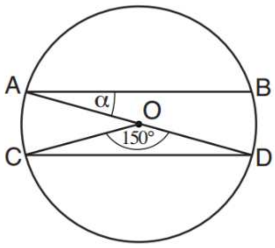
קוטר המעגל הקטן הוא 2 ס״מ ולכן אורך הרדיוס שלו הוא 1 סמ״ר. לפיכך, שטחו הוא π $(\pi \cdot 1^2)$.

רדיוס המעגל הגדול הוא 2 ס״מ, אז שטחו הוא 4π $(\pi \cdot 2^2)$.

על כן, גודל השטח הכהה הוא 3π $(4\pi - \pi)$.

---

3. תשובה (2) נכונה. שאלה 2 מתוך 20 בפרק.



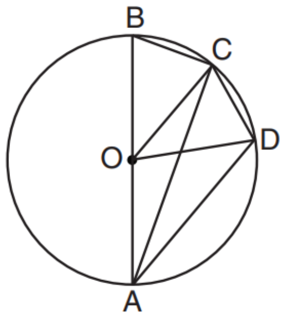
עלינו למצוא את גודלה של α. מכיוון שהנתון $\measuredangle COD = 150°$ נמצא בתוך משולש COD, נשאף לקרב את α לשם. AB ו-CD מקבילים ולכן $\measuredangle ODC = \measuredangle OAB = \alpha$, שכן אלה זוויות מתחלפות בין מקבילים (״Z״).

נתמקד במשולש COD. שתיים מצלעותיו הן רדיוסים במעגל ולכן הוא שווה-שוקיים, ולפיכך זוויות הבסיס שלו שוות. לכן גם $\measuredangle OCD = \alpha$. כעת ניתן לסכום את הזוויות במשולש זה כדי לחשב את גודלה של α:

$$150° + \alpha + \alpha = 180°$$
$$2\alpha = 30°$$
$$\alpha = 15°$$

---

4. תשובה (2) נכונה. שאלה 2 מתוך 20 בפרק.



לפנינו מעגל ובו קוטר, וכן נתון כי זוויות $\sphericalangle BAC$ ו-$\sphericalangle CAD$ שוות.
אנו נשאלים איזו טענה בהכרח אינה נכונה. נפנה לתשובות ונפסול כל תשובה נכונה או תשובה שיכולה להיות נכונה.

<u>נבדוק את תשובה (1)</u>: מיתר BC נשען על זווית היקפית $\sphericalangle BAC$ ומיתר CD נשען על זווית היקפית $\sphericalangle CAD$. נתון שזוויות אלה שוות, ואנו יודעים שזוויות היקפיות שוות נשענות על מיתרים שווים. מכאן שמיתרים אלו שווים זה לזה, ולכן הטענה נכונה והתשובה נפסלת.

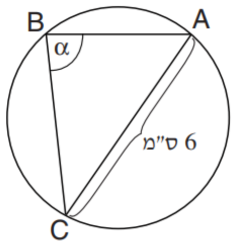
<u>נבדוק את תשובה (2)</u>: מיתר AC נשען על זווית היקפית $\sphericalangle ADC$ ומיתר AD נשען על זווית היקפית $\sphericalangle ABD$. לא נתון לנו כי זוויות אלו שוות, ולכן טענה זו אינה בהכרח נכונה וזוהי התשובה הנכונה.

<u>נבדוק את תשובה (3)</u>: $\sphericalangle ACB$ היא זווית היקפית הנשענת על הקוטר ולכן בהכרח שווה ל-$90°$. מכאן שהטענה נכונה ולכן התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (4)</u>: כפי שמצאנו בתשובה (1), מיתרים BC ו-CD שווים, ולכן גם הזוויות המרכזיות הנשענות עליהם שוות. מכאן שהטענה נכונה ולכן התשובה נפסלת.

---

5. תשובה (4) נכונה. שאלה 3 מתוך 20 בפרק.



בשאלה זו עלינו למצוא את גודלה של זווית הנשענת על מיתר שאורכו 6 ס"מ. נתון לנו שטחו של המעגל, שבעזרתו אנו יכולים למצוא את אורך רדיוס המעגל, וכך לדעת מהו המיתר AC. נשווה את הנוסחה לחישוב שטח מעגל לשטח הנתון:

$r^2\pi = 9\pi$

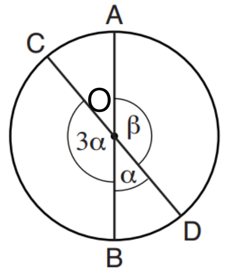
$r^2 = 9$

$r = 3$

כעת, אנו יכולים להבין שהמיתר AC הוא למעשה קוטר במעגל, שהרי אורכו שווה לשני רדיוסים ($3 \cdot 2 = 6$).
מכאן שהזווית α היא זווית היקפית הנשענת על הקוטר, ולכן היא זווית ישרה בת $90°$.

---

6. תשובה (4) נכונה. שאלה 3 מתוך 20 בפרק.



למען נוחות ההסבר, נסמן את מרכז המעגל ב-O. עלינו לקבוע מה גודלה של β. לשם כך, ננסה לקשר את β לגודל מוכר. β היא חלק מהזווית השטוחה $\measuredangle AOB$. אם נמצא את גודלה של α, נוכל לחשב את גודלה של β (שכן $\alpha + \beta = 180°$).

נמצא את גודלה של α: זווית $\measuredangle COD$ היא זווית שטוחה המורכבת מ-3α ומ-α. נתאר קשר זה באופן אלגברי:

$3\alpha + \alpha = 180°$

$4\alpha = 180° \quad /:4$

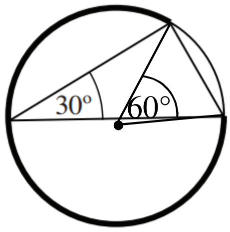
$\alpha = 45°$

משמצאנו את גודלה של α, ניתן לחשב את גודלה של β:

$\alpha + \beta = 180° \quad \Rightarrow \quad 45° + \beta = 180°$

$\beta = 135°$

7. תשובה (3) נכונה. שאלה 4 מתוך 20 בפרק.



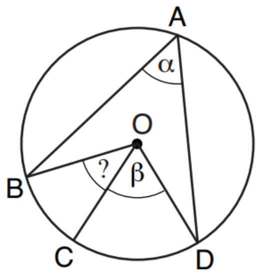
אנו מתבקשים לקבוע איזה חלק מהיקף המעגל מהווה הקשת המודגשת. לשם כך, עלינו למצוא את גודל הזווית המרכזית הנשענת על הקשת.

נתונה זווית היקפית בת $30°$ הנשענת על קשת לא מודגשת. הזווית המרכזית הנשענת על קשת זו גדולה פי 2 מהזווית ההיקפית הנשענת על אותה קשת. לכן, גודלה $60°$ ($2 \cdot 30°$). לכן ניתן לומר שהחלק היחיד שאינו מודגש הוא $\frac{1}{6} = \frac{60°}{360°}$ מהמעגל.

לפיכך החלק המודגש הוא כל השאר: $\frac{5}{6}$.

---

8. תשובה (4) נכונה. שאלה 4 מתוך 20 בפרק.



אנו מתבקשים לבטא את גודלה של זווית $\measuredangle BOC$ באמצעות α ו-β. זווית $\measuredangle BOC$ היא חלק מהזווית המרכזית $\measuredangle BOD$. זווית מרכזית גדולה פי 2 מהזווית ההיקפית הנשענת על אותה קשת. לפיכך:

$$\measuredangle BOD = 2 \cdot \measuredangle BAD = 2\alpha$$

זווית $\measuredangle BOD$ מורכבת מזווית $\measuredangle COD$ שגודלה נתון ומזווית $\measuredangle BOC$:

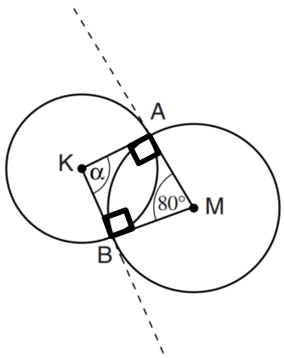
$$\measuredangle BOD = \measuredangle BOC + \measuredangle COD$$
$$2\alpha = \measuredangle BOC + \beta$$

נסדר אגפים:

$$\measuredangle BOC = 2\alpha - \beta$$

---

9. תשובה (2) נכונה. שאלה 4 מתוך 20 בפרק.



נתון כי המשיק MA משיק בנקודה A למעגל שמרכזו K. לכן, ניתן לקבוע ש-$\measuredangle KAM=90°$ – רדיוס מאונך למשיק בנקודת ההשקה. מאותה סיבה, גם $\measuredangle KBM = 90°$ (נתון ש-KB משיק בנקודה B למעגל שמרכזו M).

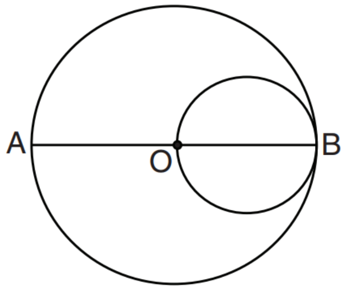
סכום הזוויות במרובע AMBK הוא $360°$. נחשב:

$$\alpha = 360 - 90 - 90 - 80 = 100°$$

תשובה (2) נכונה.

---

10. תשובה (2) נכונה. שאלה 4 מתוך 20 בפרק.



דרך א' – חישוב

היקפו של המעגל הקטן הוא 4π ולכן קוטרו שווה 4 (היקף מעגל מורכב מקוטר, $2r$, כפול π).
קוטר המעגל הקטן הוא למעשה רדיוס המעגל הגדול, ועל כן רדיוס המעגל הגדול הוא 4 ס"מ. נציב את הרדיוס בנוסחה למציאת היקף:

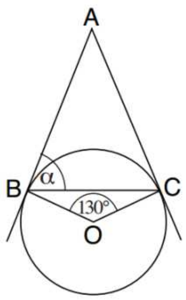
$$2 \cdot R \cdot \pi = 2 \cdot 4 \cdot \pi = 8\pi$$

דרך ב' – דמיון

עלינו למצוא את היקף המעגל הגדול, וידוע היקפו של המעגל הקטן. כיוון שקוטר המעגל הקטן שווה לחצי מקוטר המעגל הגדול, היחס הקווי בין שני המעגלים הוא $2:1$. היחס הקווי תקף גם להיקפים, ולכן גם היקף המעגל הגדול גדול פי 2 מהיקף המעגל הקטן – כלומר, 8π.

---

11. תשובה (4) נכונה. שאלה 5 מתוך 20 בפרק.



עלינו למצוא את גודלה של α. הנקודה B היא נקודת ההשקה של משיק AB עם המעגל, ולכן גודלה של זווית $\measuredangle ABO$ הוא $90°$. אם נמצא את גודלה של זווית $\measuredangle CBO$, המשלימה את α ל-$90°$, נוכל למצוא את גודלה של α.

נתמקד במשולש OBC. שתיים מצלעותיו של משולש זה הן רדיוסים במעגל, כלומר הוא שווה-שוקיים, וזוויות הבסיס שלו שוות. נחשב את גודלן:

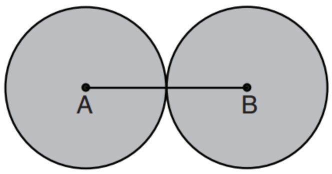
$$\frac{180° - 130°}{2} = \frac{50°}{2} = 25°$$

כעת ניתן לחשב את גודלה של α:

$$\alpha + 25° = 90° \quad \Rightarrow \quad \alpha = 65°$$

---

12. תשובה (3) נכונה. שאלה 5 מתוך 20 בפרק.



הישר AB מורכב מרדיוס המעגל השמאלי ומרדיוס המעגל הימני. נתון שהמעגלים חופפים ולכן הרדיוסים שלהם שווים. נסמן רדיוס זה ב-r. כלומר, $AB = 2r$.

כעת נחשב את אורך הרדיוס. ידוע שגודל השטח הכהה הוא 32π סמ"ר, וזה שטחם של שני מעגלים חופפים שרדיוסם r. נתאר קשר זה באופן אלגברי כדי לבודד את r:

$$2 \cdot \pi r^2 = 32\pi$$

נחלק ב-2π:

$$r^2 = 16$$
$$r = 4$$

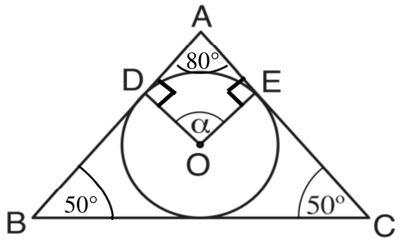
לכן $AB = 8$ ($2r = 2 \cdot 4$).

13. תשובה (1) נכונה. שאלה 6 מתוך 20 בפרק.

ראשית, נשים לב שמשום שרדיוס מאונך למשיק בנקודת השקה, $\sphericalangle ADO$ וכן $\sphericalangle OEA$ בנות $90°$.

כעת, נבחן את זוויות משולש ABC: נתון לנו כי זהו משולש שווה שוקיים ועל כן גם $\sphericalangle B$ בת $50°$ (זוויות הבסיס שוות). מכאן, שזווית הראש $\sphericalangle A$, אשר משלימה את זוויות הבסיס ל-$180°$, בת $80°$.

$$\sphericalangle A = 180 - 50 - 50 = 80°$$



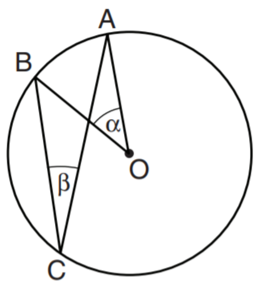
כעת, בדלתון $ADOE$ מצאנו את כל הזוויות למעט α:

$$\alpha = 360 - 80 - 90 - 90 = 100°$$

טיפ: כדאי להכיר ששני משיקים ושני רדיוסים יוצרים דלתון שבו הזוויות הנגדיות משלימות ל-$180°$.

---

14. תשובה (1) נכונה. שאלה 7 מתוך 20 בפרק.



דרך א' – הצבת מספרים

בשביל להקל על פתרון התרגיל נציב הצבה נוחה, למשל $\alpha = 40°$.

נזהה כי α היא זווית מרכזית הנשענת על הקשת AB ו-β היא זווית היקפית הנשענת על אותה הקשת. לכן, β קטנה פי 2 מ-α, כלומר $\beta = 20$.

נציב בשאלה במקום הנעלמים את המספרים שהצבנו:

$$20 - \frac{40}{2} = 20 - 20 = 0$$

כעת, נציב גם בתשובות $\alpha = 40$ ו-$\beta = 20$, ונחפש תשובה השווה ל-0. נשים לב שמכיוון שהשתמשנו בהצבת מספרים במקום הנעלמים, עלינו לפסול 3 תשובות בטרם נוכל לסמן תשובה נכונה.

(1)	0	$\Rightarrow$	מתאים.
(2)	$\frac{40}{2} = 20$	$\Rightarrow$	לא מתאים. התשובה נפסלת
(3)	$\frac{20}{2} = 10$	$\Rightarrow$	לא מתאים. התשובה נפסלת
(4)	$\frac{20}{4} = 5$	$\Rightarrow$	לא מתאים. התשובה נפסלת

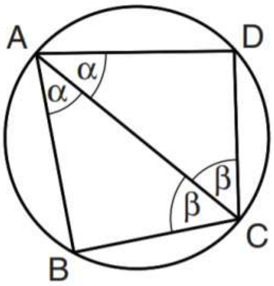
פסלנו 3 תשובות ועל כן תשובה (1) נכונה.

דרך ב' – פתרון מתמטי

α היא זווית מרכזית הנשענת על הקשת AB ו-β היא זווית היקפית הנשענת על אותה הקשת. מכיוון שזווית היקפית שווה למחצית הזווית המרכזית הנשענת על אותה הקשת, β שווה למחצית מ-α. כלומר $\beta = \frac{\alpha}{2} \leftarrow$. נציב בשאלה במקום $\beta \leftarrow \frac{\alpha}{2}$, ונקבל:

$$\frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} = 0$$

.15 תשובה (2) נכונה. שאלה 7 מתוך 20 בפרק.



נתון כי המרובע ABCD חסום במעגל. בעקבות כך אנו יודעים שסכום כל שתי זוויות נגדיות במרובע שווה ל-$180°$. לפיכך, $\sphericalangle A + \sphericalangle C = 180°$. כלומר:

$$2\alpha + 2\beta = 180 \quad /:2$$
$$\alpha + \beta = 90$$

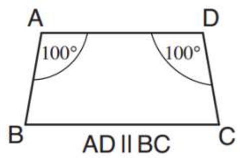
לאחר שגילינו זאת, נוכל להשלים את הזוויות במשולש ABC. אם סכום הזוויות α ו-β הוא $90°$ אזי $\sphericalangle ABC$ שווה גם היא ל-$90°$ כדי להשלים ל-$180°$ במשולש.
מכאן, אם $\sphericalangle ABC$ היא זווית ישרה, אז AC הוא הקוטר במעגל (זווית היקפית השווה ל-$90°$ נשענת על הקוטר).
עוד נתון כי שטח המעגל הוא π סמ"ר. נציב בנוסחה לחישוב שטח מעגל ונחשב את אורכו של הרדיוס:

$$r^2\pi = \pi \quad /:\pi$$
$$r^2 = 1$$
$$r = 1$$

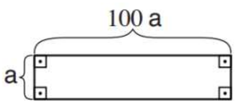
אם הרדיוס שווה ל-1 ס"מ, אז הקוטר AC שווה ל-2 ס"מ.

.16 תשובה (4) נכונה. שאלה 9 מתוך 20 בפרק.

נבדוק את התשובות ונחפש מצולע שאי אפשר לחסום במעגל.

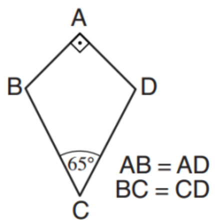


<u>נבדוק את תשובה (1):</u> בסרטוט מוצג טרפז שווה-שוקיים. בטרפז שווה-שוקיים סכום זוויות נגדיות הוא $180°$. ניתן לחסום במעגל כל מרובע שסכום הזוויות הנגדיות שלו הוא $180°$. התשובה נפסלת.



<u>נבדוק את תשובה (2):</u> בסרטוט מוצג מלבן. גודלן של כל הזוויות במלבן הוא $90°$. לפיכך, סכום זוויות נגדיות במלבן הוא $180°$ וניתן לחסום אותו במעגל. התשובה נפסלת.

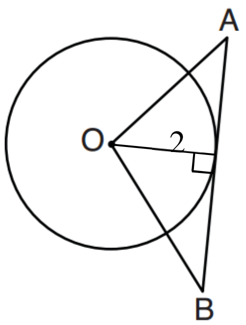
<u>נבדוק את תשובה (3):</u> ניתן לחסום במעגל כל ממוצע משוכלל. התשובה נפסלת.



טיפ: כיוון שפסלנו 3 תשובות, ניתן לסמן את תשובה (4) מבלי לבדוק אותה. למען שלמות ההסבר, נבדוק את נכונותה.

<u>נבדוק את תשובה (4):</u> סכום הזוויות הנגדיות בדלתון זה אינו $180°$ $(90° + 65° = 155°)$, ולכן לא ניתן לחסום אותו במעגל. **תשובה נכונה.**

.17 תשובה (3) נכונה. שאלה 9 מתוך 20 בפרק.



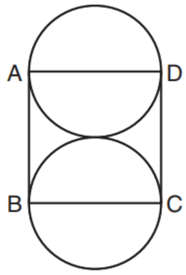
עלינו לחשב את אורך הקטע AB. נתון ששטחו של המשולש AOB הוא 3 סמ"ר. נעביר רדיוס מנקודה O לנקודת ההשקה של ישר AB עם המעגל. אורכו של הרדיוס הוא 2 ס"מ. הרדיוס הוא גם גובה במשולש AOB, שכן רדיוס מאונך למשיק בנקודת ההשקה.

כעת ידוע לנו אורך הגובה במשולש ושטחו. ניתן לבנות משוואה לחישוב שטח המשולש, ולחלץ את אורכו של AB, שהוא הבסיס:

$$\frac{AB \cdot 2}{2} = 3 \quad \Rightarrow \quad AB = 3$$

---

18. תשובה (3) נכונה. שאלה 9 מתוך 20 בפרק.



נתון כי היקף הריבוע הוא 12 ס"מ. צלעות הריבוע שוות באורכן, ולכן אורך כל צלע הוא:

$\frac{12}{4} \Leftarrow 3$

אם כן, אורכן של הצלעות AD ו-BC, שהן הקטרים במעגלים, הוא 3 ס"מ.

כעת, ניתן לקצר את החישובים אם אנו מבינים שאין צורך למצוא את הרדיוס. זאת משום שאנו רוצים למצוא את סכום היקפי המעגלים, והנוסחה לחישוב היקף מעגל היא: *קוטר* $\cdot \pi$ *(2r)*. מצאנו שהקוטר של המעגלים הוא 3 ס"מ, ולכן היקפו של כל מעגל הוא 3π. אנו נשאלים על סכום ההיקפים של שני המעגלים, ולכן:

$$3\pi + 3\pi = 6\pi$$

למען שלמות ההסבר, נראה גם חישוב מלא:

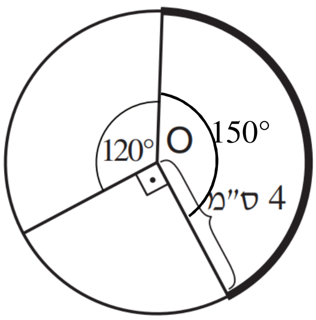
אורכו של הקוטר במעגלים הוא 3 ס"מ. קוטר שווה לפעמיים רדיוס, על כן ניתן לקבוע כי רדיוס המעגלים הוא 1.5 ס"מ $\left(\frac{3}{2}\right)$. נחשב את היקפו של מעגל אחד לפי הנוסחה:

$$\text{היקף} = 2r\pi = 2 \cdot 1.5 \cdot \pi = 3\pi$$

היקפו של מעגל אחד הוא 3π, ולכן סכום ההיקפים של שני מעגלים הוא 6π (3π + 3π).

---

19. תשובה (4) נכונה. שאלה 12 מתוך 20 בפרק.



כדי לחשב אורך של קשת, עלינו למצוא את היקף המעגל כולו ואת החלק שהיא מהווה מתוכו (הזווית המרכזית עליה נשענת הקשת, מתוך 360°).

נתחיל במציאת היקף המעגל. אורכו של רדיוס המעגל הוא 4 ס"מ, נחשב את ההיקף:

$$2 \cdot 4 \cdot \pi = 8\pi$$

נחשב את הזווית המרכזית עליה נשענת הקשת. בסרטוט נתונות שתי זוויות מרכזיות שגודלן 120° ו-90°. הזווית המרכזית שאת גודלה אנו מחפשים, משלימה אותן ל-360°:

$$360 - 120 - 90 = 150$$

מכאן, שהקשת מהווה $\frac{150}{360}$ מתוך היקף המעגל.

כעת, נחשב את גודלה של הקשת:

$$\frac{150}{360} \cdot 8\pi = \frac{5}{12} \cdot 8\pi = \frac{5}{3} \cdot 2\pi = \frac{10\pi}{3}$$

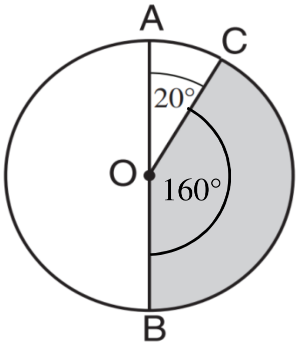
20. תשובה (4) נכונה. שאלה 15 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – שטח הגזרה הכהה

נתון כי שטח המעגל כולו 9π סמ"ר. כדי למצוא שטח של גזרה, עלינו להבין איזה חלק היא מהווה משטח המעגל.

AB הוא קוטר ולכן זווית $\sphericalangle AOB$ שטוחה ושווה $180°$.

נתון שזווית $\sphericalangle AOB$ שווה $20°$ ומכאן שזווית $\sphericalangle COB$ שווה $160°$ ($180 - 120 = 160$).



חלק הגזרה מהמעגל שווה לזווית המרכזית של הגזרה חלקי $360°$. את החלק הזה נכפיל בשטח המעגל וכך נמצא את שטחה של הגזרה:

$$\frac{160}{360}\cdot 9\pi = \frac{4}{9}\cdot 9\pi = 4\pi$$

דרך ב' – חיסור שטחים

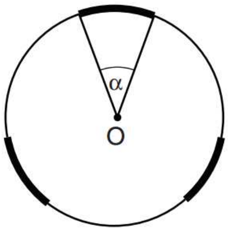
נתמקד בחצי המעגל הימני, ששטחו 4.5π (שכן שטח המעגל 9π).

הגזרה הקטנה מהווה $\frac{1}{9}$ משטח זה ($\frac{20}{180}$).

$\frac{1}{9}$ מ- 4.5π שווה 0.5π ומכאן ששטח הגזרה הכהה שווה 4π.

מעגלים - תרגול שאלות מבחינות אמת

1. בסרטוט שלפניכם מעגל שמרכזו O. אורכי 3 הקשתות המודגשות שווים זה לזה.
סכום אורכי הקשתות המודגשות שווה ל- $\frac{1}{3}$ מהיקף המעגל.

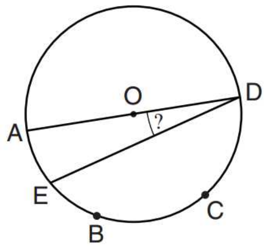


$\alpha = ?$

(1) $50°$
(2) $45°$
(3) $30°$
(4) $40°$

---

2. בסרטוט שלפניכם מעגל שמרכזו O. AD הוא קוטר במעגל.
הנקודות B ו-C מחלקות את הקשת AD ל-3 קשתות שוות.
הנקודה E היא אמצע הקשת AB.

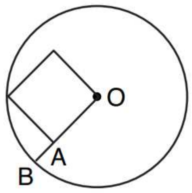


$\sphericalangle ADE = ?$

(1) $37.5°$
(2) $25°$
(3) $22.5°$
(4) $15°$

---

3. בסרטוט שלפניך מעגל שרדיוסו 1 ס"מ ומרכזו O.
בתוך המעגל נמצא ריבוע שקדקוד אחד שלו מונח על היקף המעגל,
וקדקוד אחר שלו הוא O.
B היא נקודת החיתוך של המשך צלע הריבוע OA עם המעגל.



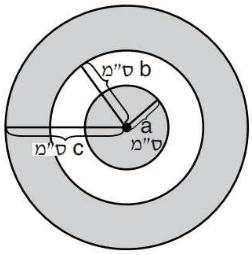
$AB = ?$

(1) $\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ס"מ
(2) $\frac{1}{2}$ ס"מ
(3) $\frac{1}{3}$ ס"מ
(4) $\left(2 - \sqrt{3}\right)$ ס"מ

פתרתי ______________ שאלות ב ______________ דקות, ______________ תשובות נכונות

4. בסרטוט שלפניכם שלושה מעגלים בעלי מרכז משותף שרדיוסיהם (בס"מ): a, b ו-c.

מה סכום השטחים הכהים (בסמ"ר)?



(1) $\pi(c^2-b^2)$

(2) $\pi(c^2-b^2+a^2)$

(3) $\pi(c-b)^2$

(4) $\pi(c-b+a)^2$

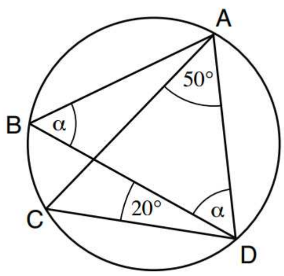
---

5. A, B, C ו-D הן נקודות על היקף המעגל שבסרטוט.

$\sphericalangle ADB = \sphericalangle ABD = \alpha$.

על פי נתונים אלה ונתוני הסרטוט,

$\alpha = ?$



(1) $30°$

(2) $45°$

(3) $55°$

(4) $70°$

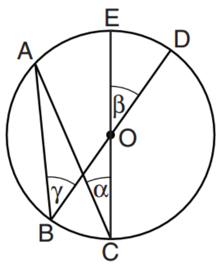
---

6. בסרטוט שלפניכם מעגל שמרכזו O.

A, B, C, D ו-E הן נקודות על היקף המעגל.

BD ו-CE הם קטרים במעגל.

$\gamma = ?$



(1) α

(2) $\alpha+\beta$

(3) $\alpha+\frac{\beta}{2}$

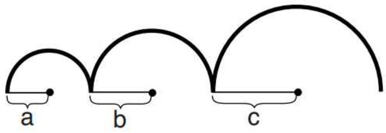
(4) $180°-\alpha-\beta$

פתרתי ____________ שאלות ב ____________ דקות, ____________ תשובות נכונות

7. בסרטוט שלפניכם שלושה חצאי מעגלים שרדיוסיהם a, b ו-c.

נתון: b הוא הממוצע של a ו-c.

מה אורך הקו המודגש?



(1) $\frac{3\pi}{2}b$

(2) $2\pi b^2$

(3) $3\pi b$

(4) $4\pi b^2$

---

8. סביב אגם שצורתו מעגל בעל רדיוס 1 ק"מ נבנה מסלול שרוחבו 200 מ',
המקיף את כל האגם (וצמוד לו).

מה **שטח המסלול** (בקמ"ר)?

(1) 0.44π

(2) π

(3) 1.2π

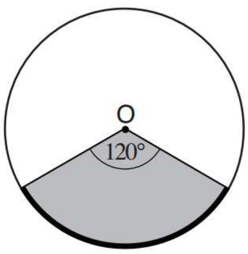
(4) 1.44π

---

9. בסרטוט שלפניכם מעגל שמרכזו O.

נתון: אורך הקשת המודגשת (בס"מ) **שווה** לגודל השטח הכהה (בסמ"ר).

על פי נתונים אלה ונתוני הסרטוט, מה רדיוס המעגל (בס"מ)?



(1) 1

(2) 2

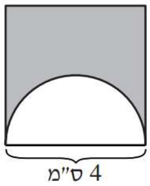
(3) $\frac{3}{2}$

(4) $\frac{1}{2}$

---

10. בסרטוט שלפניכם ריבוע שאורך צלעו 4 ס"מ.
אחת מצלעות הריבוע היא קוטר בחצי מעגל.

גודל השטח הכהה (בסמ"ר) הוא -



(1) בין 7 ל-8

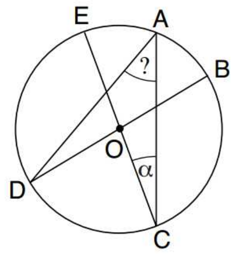
(2) בין 9 ל-10

(3) בין 10 ל-11

(4) בין 12 ל-13

פתרתי ____________ שאלות ב ____________ דקות, ____________ תשובות נכונות

11. בסרטוט שלפניך O הוא מרכז המעגל, EC ו-BD הם קטרים.
הקשת הקצרה AE שווה באורכה לקשת הקצרה AB.



על פי נתונים אלה ונתוני הסרטוט,
$\sphericalangle DAC = ?$

(1) $180° - 2\alpha$

(2) 2α

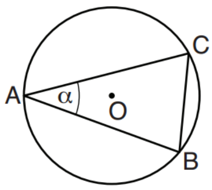
(3) $90° - \alpha$

(4) $\frac{3\alpha}{2}$

---

12. בסרטוט שלפניכם מעגל שמרכזו O ורדיוסו r.
נתון: $\alpha = 30°$

$BC = ?$



(1) $r\sqrt{2}$

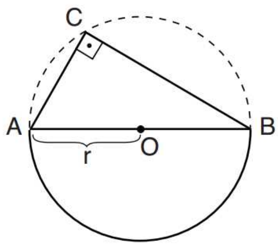
(2) $\frac{2r}{3}$

(3) r

(4) אי-אפשר לדעת לפי הנתונים

---

13. בסרטוט שלפניכם מעגל שמרכזו O ורדיוסו r ס"מ.
AB הוא קוטר במעגל.
אורך הקשת המקווקוות CB גדול פי 2 מאורך הקשת המקווקוות AC.



לפי נתונים אלה ונתוני הסרטוט,
מה אורך **הקטע** AC (בס"מ)?

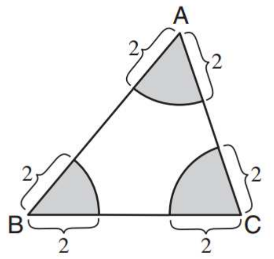
(1) $\frac{2}{3}r$ (2) $\sqrt{2}\,r$ (3) $\frac{\sqrt{3}}{2}r$ (4) r

---

פתרתי ____________ שאלות ב ____________ דקות, ____________ תשובות נכונות

14. ABC הוא משולש שבו אורכה של כל אחת מצלעותיו (AB, AC ו-BC) גדול מ-4 ס"מ.
בסרטוט מסומנות גזרות מעגלים שרדיוסם 2 ס"מ. הנקודות A, B ו-C הן קדקודי הגזרות.

מה סכום השטחים הכהים (בסמ"ר)?



(1) $\sqrt{2}\pi$

(2) 2π

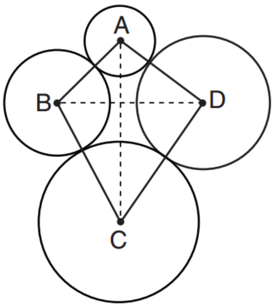
(3) 3π

(4) $\sqrt{3}\pi$

---

15. 4 מעגלים שמרכזיהם A, B, C ו-D משיקים זה לזה, כבסרטוט.

איזו מהטענות הבאות נכונה **בהכרח**?



(1) AB + CD = AD + BC

(2) AB || CD

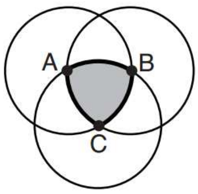
(3) AB + AD = BC + CD

(4) AC = BD

---

16. בסרטוט שלפניכם שלושה מעגלים שרדיוס כל אחד מהם 4 ס"מ.
הנקודה A היא מרכז המעגל השמאלי,
הנקודה B היא מרכז המעגל הימני,
והנקודה C היא מרכז המעגל התחתון.

לפי נתונים אלה ולפי הסרטוט,
מה היקף הצורה הכהה (בס"מ)?



(1) π

(2) 2π

(3) 3π

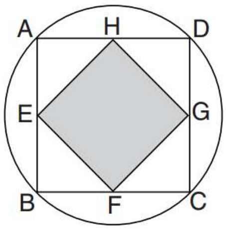
(4) 4π

פתרתי ______________ שאלות ב ______________ דקות, ______________ תשובות נכונות

17. במעגל **שהיקפו** 8π ס"מ חסום ריבוע ABCD, כבסרטוט.

E, F, G ו-H הן אמצעי צלעות הריבוע.

מה שטח הריבוע הכהה EFGH (בסמ"ר)?



(1) 16

(2) $16\sqrt{2}$

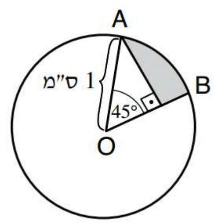
(3) 64

(4) אי-אפשר לדעת לפי הנתונים

---

18. AOB היא גזרה של מעגל שמרכזו O ורדיוסו 1 ס"מ.

על פי נתונים אלה ונתוני הסרטוט, מה גודל השטח הכהה (בסמ"ר)?



(1) $2-\frac{\pi}{2}$

(2) $\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{8}-1\right)$

(3) $\frac{\pi}{4\sqrt{2}}$

(4) $\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}$

---

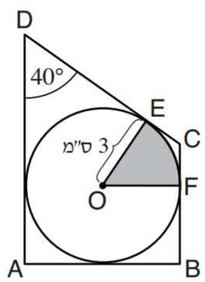
19. בסרטוט שלפניכם: ABCD הוא טרפז ($AD \parallel BC$),

הנקודה O היא מרכז המעגל החסום בטרפז,

E ו-F הן נקודות ההשקה של CD ו-CB עם המעגל, בהתאמה.

על פי נתונים אלה ונתוני הסרטוט,

מה שטח הגזרה הכהה (בסמ"ר)?



(1) 1

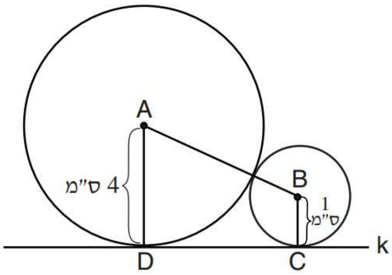
(2) π

(3) 3π

(4) $\frac{\pi}{3}$

---

20. בסרטוט שלפניכם שני מעגלים המשיקים זה לזה, ומשיקים לישר k בנקודות D ו-C.
מרכזי המעגלים הם A ו-B.



לפי נתונים אלה והנתונים שבסרטוט,
מה **היקף** המרובע ABCD (בס"מ)?

(1) 15
(2) 12
(3) 13
(4) 14

תשובות

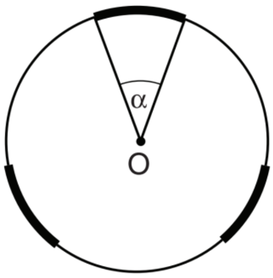
שאלה	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
תשובה	4	4	1	2	3	3	3	1	2	2

שאלה	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
תשובה	2	3	4	2	1	4	1	4	2	4

פתרתי 20 שאלות - ______________ נכונות, ______________ אחוזי הצלחה

1. תשובה (4) נכונה. שאלה 3 מתוך 20 בפרק.

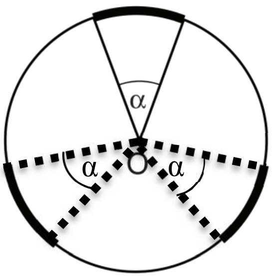
דרך א'



שלוש הקשתות שוות זו לזו, ושלושתן יחד מהוות שליש מעגל. על כן, קשת אחת מהווה $\frac{1}{9}$ מהיקף המעגל – שליש מתוך השליש $\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9}\right)$. כעת, אנו יודעים שהחלק שמהווה הקשת מהיקף מעגל, שווה לחלק שמהווה הזווית המרכזית מתוך 360°, ולכן:

$$\frac{\alpha}{360}=\frac{1}{9}$$
$$\alpha=40^\circ$$

דרך ב'



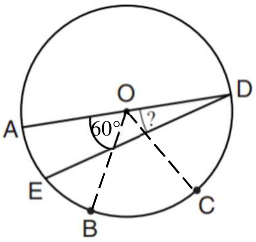
נתון כי שלוש הקשתות שוות באורכן. על פי חוקי מעגל, קשתות שוות נשענות על זוויות מרכזיות שוות. לכן, למעשה, שלוש הקשתות נשענות על 3 זוויות שגודלן α (כמתואר בסרטוט).

נתון כי סכום אורכי הקשתות (הנשענות יחד על 3α) שווה לשליש מהיקף המעגל. אנו יודעים שהחלק שמהווה הקשת מהיקף מעגל, שווה לחלק שמהווה הזווית המרכזית מתוך 360°. לכן:

$$\frac{3\alpha}{360}=\frac{1}{3}$$
$$3\alpha=120$$
$$\alpha=40^\circ$$

טיפ: אלו חלק מהזוויות שכדאי לזכור בעל-פה בחישובי קשתות וגזרות.

.2 תשובה (4) נכונה. שאלה 6 מתוך 20 בפרק.

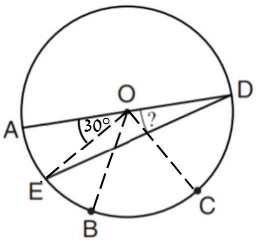


עלינו למצוא את ערכה של זווית $\measuredangle ADE$, נשתמש בנתונים לגבי אורכי הקשתות כדי לעשות זאת.

ראשית, נשרטט את רדיוסים OB ו-OC.
נתון שהקשתות CD ,BC ו-AB שוות.

מכאן, שהזוויות המרכזיות הנשענות עליהן שוות ($\measuredangle AOB = \measuredangle BOC = \measuredangle COD$).
סכום 3 הזוויות המרכזיות הללו הוא 180° כיוון שביחד הן יוצרות זווית שטוחה, ולכן:

$$\measuredangle AOB = \frac{180}{3} = 60°$$



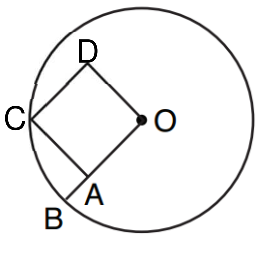
כעת, נשרטט רדיוס OE. נתון כי הנקודה E היא אמצע הקשת AB.
כלומר, קשתות AE ו-EB שוות, ולכן הזוויות המרכזיות הנשענות עליהן שוות ($\measuredangle AOE = \measuredangle EOB$), וכל אחת שווה למחצית מזווית $\measuredangle AOB$.

$$\measuredangle AOE = \frac{60}{2} = 30°$$

זווית $\measuredangle ADE$ היא זווית היקפית הנשענת על קשת AE.
כידוע, זווית היקפית שווה למחצית הזווית המרכזית הנשענת על אותה קשת:

$$\measuredangle ADE = \frac{30°}{2} = 15°$$

.3 תשובה (1) נכונה. שאלה 8 מתוך 20 בפרק.



אנו מתבקשים למצוא את אורכו של AB. קטעים AB ו-OA מרכיבים יחד את רדיוס OB, ונתון לנו שהרדיוס שווה 1 ס"מ. לכן, אם נמצא את אורכו של קטע OA, נוכל למצוא את אורך הקטע המבוקש AB.

למען נוחות ההסבר, נסמן את קדקודי הריבוע באותיות כמתואר בסרטוט. קטע OA הוא צלע בריבוע ACDO. מכיוון שהנתון היחיד הוא אורך הרדיוס, ננסה לקשר בין הריבוע למעגל. נמתח רדיוס ממרכז המעגל לקדקוד C. רדיוס OC הוא אלכסון בריבוע. כידוע, אלכסון בריבוע גדול פי $\sqrt{2}$ מצלע הריבוע, ולכן אורך צלע הריבוע הוא $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

כאמור, רדיוס OB מורכב מצלע הריבוע OA ומקטע AB:

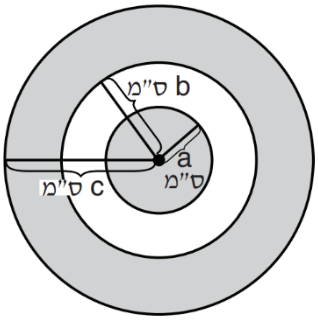
$$OB = OA + AB \quad \Rightarrow \quad 1 = \frac{1}{\sqrt{2}} + AB$$

נסדר אגפים:

$$AB = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

---

4. תשובה (2) נכונה. שאלה 9 מתוך 20 בפרק.



עלינו למצוא את סכום השטחים הכהים. השטחים הכהים הם הטבעת האפורה והמעגל הקטן.

שטח המעגל הקטן הוא: $a^2\pi$.

שטח הטבעת האפורה הוא שטח המעגל הגדול (שרדיוסו a) פחות שטח המעגל הבינוני (שרדיוסו b). נחשב:

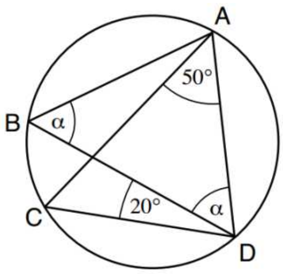
$$c^2\pi - b^2\pi$$

נחבר בין השטחים:

$$c^2\pi - b^2\pi + a^2\pi = \pi(c^2 - b^2 + a^2)$$

---

5. תשובה (3) נכונה. שאלה 9 מתוך 20 בפרק.

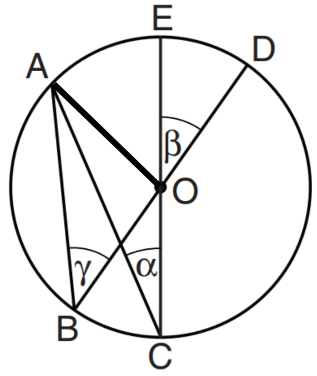


עלינו לקבוע מה ערכה של α. בסרטוט מוצגות מספר זוויות היקפיות. נשאף לקשר ביניהן לבין α. ידוע לנו שזוויות היקפיות הנשענות על אותה קשת שוות, לכן נוכל לסמן גם $\sphericalangle ACD = \alpha$.

כעת ניתן להתמקד במשולש ACD מפני שידועות לנו כל זוויותיו, ולכן ניתן לסכום אותן ולחלץ את α:

$$\alpha + \alpha + 20° + 50° = 180°$$
$$2\alpha = 110°$$
$$\alpha = 55°$$

6. תשובה (3) נכונה. שאלה 9 מתוך 20 בפרק.



דרך א׳ – הצבת מספר במקום מעלם

מכיוון שיש נעלמים בתשובות, אנו יכולים להציב מספרים במקום כל הנעלמים המופיעים בהן. בנוסף, לא כדאי להציב מספרים שכיחים כגון $30°$, $60°$, $90°$ מחשש לקבל מספר תשובות נכונות.

נציב $\alpha = 20°$, $\beta = 50°$.

נתבונן בזווית $\sphericalangle ABD$ שערכה γ. זווית זו היא זווית היקפית הנשענת על קשת AD. אנו יודעים לקשר בין זווית מרכזית לזווית היקפית אשר נשענות על אותה קשת. לכן, נעביר את רדיוס AO – הזווית המרכזית $\sphericalangle AOD$ אשר נשענת גם היא על קשת AD גדולה פי שניים מ-γ.

כעת נמצא את גודלה של זווית $\sphericalangle AOD$ לפי ההצבה שעשינו. זווית זו מורכבת מהזוויות $\sphericalangle EOD$ ו-$\sphericalangle AOE$; זווית $\sphericalangle EOD$ שווה $50°$. זווית $\sphericalangle AOE$ היא זווית מרכזית הנשענת על קשת AE, ולכן היא גדולה פי 2 מהזווית ההיקפית הנשענת על אותה קשת – כלומר גדולה פי 2 מ-$20°$. לכן, זווית $\sphericalangle AOE$ שווה $40°$. בסך הכול, גודלה של זווית $\sphericalangle AOD$ הוא $90°$.

כאמור לעיל, זווית זו גדולה פי שניים מ-γ, ועל כן $\gamma = 45°$ $\left(\frac{90}{2}\right)$.

כעת, נציב גם בתשובות $\alpha = 20°$, $\beta = 50°$, ונחפש תשובה השווה ל-$45°$. נשים לב שמכיוון שהשתמשנו בהצבת מספרים במקום הנעלמים, עלינו לפסול 3 תשובות בטרם נוכל לסמן תשובה נכונה.

(1) $\alpha = 20°$ $\Rightarrow$ לא מתאים, התשובה נפסלת.

(2) $\alpha + \beta = 20 + 50 = 70°$ $\Rightarrow$ לא מתאים, התשובה נפסלת.

(3) $\alpha + \frac{\beta}{2} = 20 + \frac{50}{2} = 20 + 25 = 45°$ $\Rightarrow$ **מתאים.**

(4) $180 - \alpha - \beta = 180 - 20 - 50 = 110°$ $\Rightarrow$ לא מתאים, התשובה נפסלת.

פסלנו 3 תשובות ועל כן תשובה (3) נכונה.

דרך ב׳ – פתרון מתמטי

עלינו לבטא את γ באמצעות α ו-β. נתבונן בזווית $\sphericalangle ABD$ שערכה γ. זווית זו היא זווית היקפית הנשענת על קשת AD. אנו יודעים לקשר בין זווית מרכזית לזווית היקפית אשר נשענות על אותה קשת. הזווית המרכזית $\sphericalangle AOD$ אשר נשענת גם היא על קשת AD גדולה פי שניים מ-γ. כלומר, $\sphericalangle AOD = 2\gamma$.

כעת ננסה לבטא את זווית $\sphericalangle AOD$ באמצעות α ו-β. זווית זו מורכבת מהזוויות $\sphericalangle EOD$ ו-$\sphericalangle AOE$. זווית $\sphericalangle EOD$ שווה β. זווית $\sphericalangle AOE$ היא זווית מרכזית הנשענת על קשת AE. נחפש זווית היקפית הנשענת על אותה קשת – זווית α ($\sphericalangle ACE$). כידוע, זווית מרכזית גדולה פי 2 מהזווית ההיקפית הנשענת על אותה קשת. כלומר, זווית $\sphericalangle AOE$ שווה 2α. בסך הכול, גודלה של זווית $\sphericalangle AOD$ הוא $2\alpha + \beta$, וגם 2γ (כפי שראינו בפסקה הראשונה).

נבטא קשר זה באמצעות משוואה:

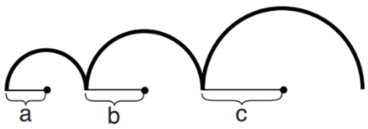
$$2\gamma = 2\alpha + \beta$$

נחלק את שני האגפים ב-2:

$$\gamma = \alpha + \frac{\beta}{2}$$

7. תשובה (3) נכונה. שאלה 14 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הבנה



הקו המודגש מורכב מ-3 חצאי היקפי מעגלים שונים. נתון ש-b הוא הממוצע של a ו-c. לכן, ניתן להניח כי כל שלושת המעגלים בעלי רדיוס b, שכן הרדיוסים a ו-c "מאזנים" זה את זה כך שהממוצע שלהם הוא b. אם כך, אורך הקו המודגש שווה ל-3 חצאי היקף מעגל שרדיוסו b. חצי היקף של מעגל אחד שרדיוסו b הוא πb $\left(\frac{2\pi b}{2}\right)$, ולכן 3 חצאים שווים ל-3πb.

דרך ב' – הצבת מספרים

עלינו לבטא את אורכו של הקו המודגש באמצעות b. ניתן להציב מספרים נוחים במקום נעלמים. נתון ש-b הוא הממוצע בין a ל-c. ניתן להציב: $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$. נחשב את סכום חצאי היקפי המעגלים:

$$\frac{2\pi\cdot 1}{2}+\frac{2\pi\cdot 2}{2}+\frac{2\pi\cdot 3}{2}=\pi+2\pi+3\pi=6\pi$$

כעת, נציב גם בתשובות $b = 2$, ונחפש תשובה השווה ל-6π. נשים לב שמכיוון שהשתמשנו בהצבת מספרים במקום הנעלמים, עלינו לפסול 3 תשובות בטרם נוכל לסמן תשובה נכונה.

(1) $\frac{3\pi}{2}b \Rightarrow \frac{3\pi}{2}\cdot 2=3\pi \Rightarrow$ לא מתאים, התשובה נפסלת

(2) $2\pi b^2 \Rightarrow 2\pi\cdot 2^2=8\pi \Rightarrow$ לא מתאים, התשובה נפסלת

(3) $3\pi b \Rightarrow 3\pi\cdot 2=6\pi \Rightarrow$ **מתאים**

(4) $4\pi b^2 \Rightarrow 4\pi\cdot 2^2=16\pi \Rightarrow$ לא מתאים, התשובה נפסלת

פסלנו 3 תשובות ועל כן תשובה (3) נכונה.

דרך ג' – פתרון אלגברי

הקו המודגש מורכב מ-3 חצאי היקפי מעגלים. הרדיוס של כל מעגל נתון, ועלינו לבטא את אורך הקו המודגש באמצעות b בלבד. תחילה, נחשב את סכומם של חצאי היקפי המעגלים:

$$\frac{2\pi a}{2}+\frac{2\pi b}{2}+\frac{2\pi c}{2}=\pi a+\pi b+\pi c=\pi(a+b+c)$$

כאמור, עלינו לבטא את אורך הקו המודגש באמצעות b בלבד. לכן, נשאף לבטא את $a + c$ באמצעות b. נתון כי b הוא הממוצע של a ו-c. נתאר קשר זה באופן אלגברי:

$$\frac{a+c}{2}=b$$

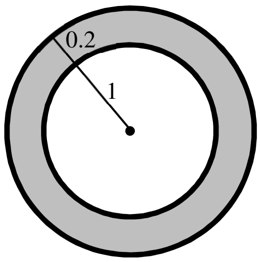
נכפול ב-2:

$$a+c=2b$$

כעת ניתן להציב ערך זה בביטוי המתאר את אורך הקו המודגש:

$$\pi(a+b+c) \quad\Rightarrow\quad \pi(2b+b)=3\pi b$$

8. תשובה (1) נכונה. שאלה 14 מתוך 20 בפרק.



סביב אגם שרדיוסו 1 ק"מ נבנה מסלול טבעתי שרוחבו 200 מ'. עלינו לחשב את שטח המסלול (בקמ"ר). כדי להבין את הנדרש, נשרטט את המידע הנתון. נמיר את רוחב המסלול לקילומטרים – רוחבו 0.2 ק"מ $\left(\frac{200}{1000}\right)$.

עלינו לחשב את גודל השטח הכהה. שטח זה שווה לשטח המעגל הגדול פחות שטח המעגל הקטן.

נחשב את שטח המעגל הגדול שרדיוסו 1.2 ק"מ:

$$\pi \cdot 1.2^2 = 1.44\pi$$

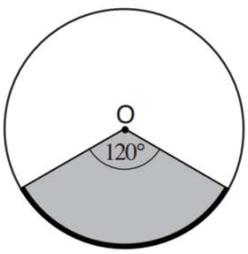
נחשב את שטח המעגל הקטן שרדיוסו 1 ק"מ:

$$\pi \cdot 1^2 = \pi$$

לפיכך, שטח המסלול הוא 0.44π $(1.44\pi - \pi)$.

---

9. תשובה (2) נכונה. שאלה 14 מתוך 20 בפרק.



נתון מעגל ובו קשת הנשענת על זווית שגודלה $120°$. שטח הגזרה הנשענת על זווית זו שווה לגודל הקשת. עלינו למצוא את רדיוס המעגל. נסמן את גודלו ב-r.

שטח הגזרה הכהה הוא $\frac{1}{3}$ משטח המעגל $\left(\frac{120}{360}\right)$:

$$\frac{1}{3}\pi r^2$$

אורך הקשת המודגשת הוא $\frac{1}{3}$ מהיקף המעגל:

$$\frac{1}{3} \cdot 2\pi r = \frac{2}{3}\pi r$$

כעת נשווה בין הגדלים כדי למצוא את r:

$$\frac{1}{3}\pi r^2 = \frac{2}{3}\pi r$$

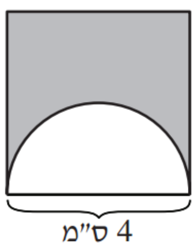
$$\pi r^2 = 2\pi r$$

$$r^2 = 2r$$

$$r = 2$$

---

10. תשובה (2) נכונה. שאלה 14 מתוך 20 בפרק.



עלינו להעריך מה גודל השטח הכהה. שטח זה שווה לשטח הריבוע פחות שטח חצי המעגל. שטח הריבוע הוא 16 סמ"ר (4^2). אורך קוטר המעגל הוא 4 ס"מ, לכן אורך הרדיוס שלו הוא 2 ס"מ ושטח חצי המעגל הוא 2π $\left(\frac{\pi \cdot 2^2}{2}\right)$. לכן גודל השטח האפור שווה $16 - 2\pi$.

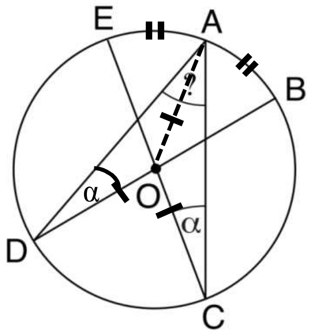
כאמור, עלינו לבצע הערכה. π קצת יותר גדול מ-3 ולכן הביטוי 2π קצת יותר גדול מ-6. אם נפחית 6 מ-16, נקבל 10. מאחר שהפחתנו קצת <u>יותר</u> מ-6, התוצאה תהיה <u>קטנה</u> במעט מ-10. על כן, גודל השטח הכהה הוא בין 9 ל-10.

---

11. תשובה (2) נכונה. שאלה 15 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – משולשים שווי-שוקיים

נעביר כבניית עזר את רדיוס AO (כמתואר בסרטוט).

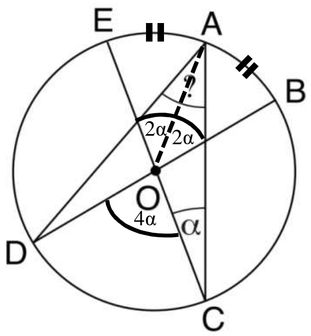


ראשית, עלינו לשים לב כי הזווית α היא זווית היקפית הנשענת על קשת AE, והזווית $\sphericalangle ADB$ היא זווית היקפית הנשענת על קשת AB. זוויות היקפיות הנשענות על קשתות באותו גודל שוות זו לזו, ועל כן $\sphericalangle ADB = \alpha$.

כעת, נבחין כי משולשים AOD ו-AOC הם משולשים שווי שוקיים (AO, DO ו-BO רדיוסים) ועל כן זוויות הבסיס במשולשים אלו תהיינה שוות זו לזו. לכן, זוויות $\sphericalangle DAO$ ו-$\sphericalangle CAO$ שוות בערכן ל-α. הזווית המבוקשת מורכבת משתי זוויות אלו ומכאן שגודלה 2α.

דרך ב' – מעבר מזוויות היקפיות למרכזיות

נעביר כבניית עזר את רדיוס AO (כמתואר בסרטוט).



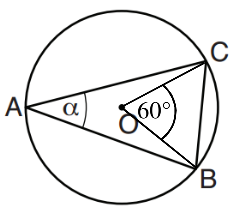
ניתן לראות ש-$\sphericalangle ECA$, שמסומנת באות α, היא זווית היקפית הנשענת על קשת EA, וש-$\sphericalangle EOA$ היא זווית מרכזית הנשענת על אותה הקשת. לכן, גודלה של זווית זו כפול מגודל הזווית ההיקפית, ומכאן ש-$\sphericalangle EOA = 2\alpha$.

$\sphericalangle AOB$ שווה גם היא ל-2α, שהרי $\sphericalangle EOA$ ו-$\sphericalangle AOB$ הן זווית מרכזיות הנשענות על קשתות שוות. על כן, גודלה של $\sphericalangle EOB$, המורכבת משתי זוויות אלו, הוא 4α. $\sphericalangle DOD$ ו-$\sphericalangle EOB$ הן זוויות קודקודיות, ועל כן גם $\sphericalangle DOC = 4\alpha$.

כעת, נשים לב כי $\sphericalangle DOC$ היא זווית מרכזית הנשענת על קשת DC, ו-$\sphericalangle DAC$ היא זווית היקפית הנשענת על אותה קשת. לכן, זווית זו שווה לחצי מהזווית המרכזית, ומכאן ש-$\sphericalangle DAC = \frac{4\alpha}{2} = 2\alpha$.

---

12. תשובה (3) נכונה. שאלה 15 מתוך 20 בפרק.

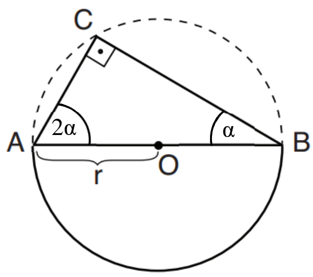


נתונה זווית היקפית שגודלה 30°. עלינו למצוא את אורך המיתר BC. זווית מרכזית גדולה פי 2 מהזווית ההיקפית הנשענת על אותה קשת, לכן נוסיף לסרטוט את הזווית המרכזית הנשענת על BC. נקבל $\sphericalangle COB = 60^\circ$ $(30^\circ \cdot 2)$.

נתמקד במשולש OCB. המשולש הוא שווה-שוקיים מכיוון ששתיים מצלעותיו הן רדיוסים של זווית הראש במשולש שווה-שוקיים הוא 60°, המשולש הוא שווה-צלעות, שכן גודל זוויות הבסיס הוא בהכרח 60° $\left(\frac{180^\circ-60^\circ}{2}\right)$. על כן, $BC = OC = r$.

---

13. תשובה (4) נכונה. שאלה 15 מתוך 20 בפרק.



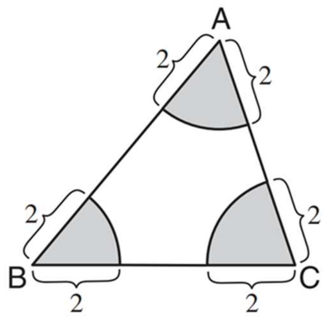
עלינו לבטא את אורך הקטע AC באמצעות r. נתון כי אורך הקשת המקווקוות CB גדול פי 2 מאורך הקשת המקווקוות AC, לכן הזווית ההיקפית עליה נשענת קשת CB גדולה פי 2 מהזווית ההיקפית שעליה נשענת קשת AC.
נסמן, $\measuredangle CBA = \alpha \Leftarrow \measuredangle CAB = 2\alpha$.
כדי ללמוד על גודלו של קטע AC, נבדוק מה גדלי הזוויות במשולש ישר הזווית ACB. נסכום את הזויות במטרה לחלץ את α:

$$\alpha + 2\alpha + 90° = 180°$$
$$3\alpha = 90°$$
$$\alpha = 30° \quad \Rightarrow \quad 2\alpha = 60°$$

זוויותיו של משולש ACB הן 30°, 60° ו-90°, לכן מדובר במשולש זהב. במשולש זהב היתר גדול פי 2 מהניצב הקטן (AC). אורכו של היתר הוא 2r, ולכן $AC = r$.

---

14. תשובה (2) נכונה. שאלה 15 מתוך 20 בפרק.



דרך א' – הבנה
בשאלה זו עלינו למצוא את סכום השטחים הכהים המהווים 3 גזרות במעגל. כידוע, על מנת למצוא שטח של גזרה, עלינו לדעת את שטח המעגל כולו ואת חלקה של הגזרה במעגל זה (כלומר, הזווית המרכזית עליה נשענת הגזרה מתוך 360°).

הרדיוס של המעגל ממנו נלקחו הגזרות נתון – אורכו 2 ס"מ. כלומר, שטח המעגל כולו הוא 4π ($2^2 \cdot \pi$).

כעת כל שנותר לנו הוא למצוא את הזווית המרכזית של כל גזרה. אין לנו דרך למצוא כל אחת מהזוויות, אולם ידוע לנו שסכומן שווה ל-180° מאחר שזה סכום הזוויות במשולש. מכיוון שכל הגזרות בעלות רדיוס זהה (2 ס"מ), ניתן להניח שהגזרות מהוות חלק מאותו מעגל ולכן ניתן להתייחס אליהן כאל יחידה אחת. מכאן, ששלוש הגזרות יחדיו מהוות חצי מהמעגל, מאחר ששלושתן יחד בעלות זווית מרכזית של 180° $\left(\frac{180}{360}\right)$.

נחשב את השטח הכהה (חצי מהמעגל שמצאנו):

$$\frac{1}{2} \cdot 4\pi = 2\pi$$

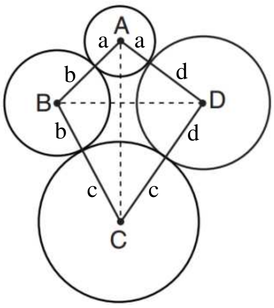
דרך ב' – הצבת מספר נוח
כאמור, כדי למצוא את שטחה של כל גזרה עלינו למצוא את שטח המעגל השלם ואת חלקה בו (הזווית המרכזית מתוך 360°). איננו יודעים מה גודלה של הזווית המרכזית עליה נשענת כל גזרה, אולם אין כל הגבלה באשר לזוויות במשולש זה ולכן אנו יכולים להציב מספרים נוחים. למשל, ניתן להציב כי כל זווית במשולש היא בת 60°.

הרדיוס של המעגל ממנו נלקחו הגזרות הוא 2 ס"מ. כלומר, שטח המעגל כולו הוא 4π ($2^2 \cdot \pi$).
כעת, נבין שלפי ההצבה שעשינו כל גזרה מהווה שישית מתוך מעגל זה ($\frac{60}{360} = \frac{1}{6}$). נחשב את שטחן של שלוש הגזרות:

$$3 \cdot \frac{1}{6} \cdot 4\pi = 2\pi$$

15. תשובה (1) נכונה. שאלה 16 מתוך 20 בפרק.

עלינו לקבוע איזו מהטענות נכונה בהכרח. נבדוק את התשובות.

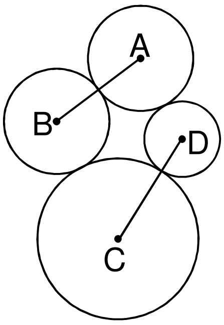


<u>נבדוק את תשובה (1):</u> $AB + CD = AD + BC$
נסמן את הרדיוסים של כל מעגל באותיות כמתואר בסרטוט.

$$AB + CD \Rightarrow a + b + c + d$$
$$AD + BC \Rightarrow a + d + b + c$$

לפיכך, הטענה נכונה. **תשובה נכונה.**

טיפ: ברגע שמצאנו תשובה נכונה אין צורך להמשיך לבדוק את שאר התשובות, אך למען שלמות ההסבר נפסול אותן:

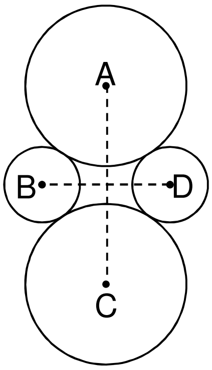


<u>נבדוק את תשובה (2):</u> $AB \parallel CD$
הטענה אינה נכונה בהכרח. אין כל הגבלה באשר לגדלי המעגלים ולכן ניתן לסרטט מעגלים שיסתרו אותה. התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (3):</u> $AB + AD = BC + CD$
נבטא את הסכומים בהתאם לסימונים שלעיל (בבדיקת תשובה (1)).

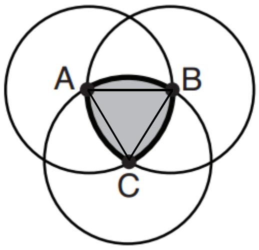
$$AB + AD \Rightarrow a + b + a + d$$
$$BC + CD \Rightarrow b + c + c + d$$

הביטויים אינם שווים ולכן הטענה אינה נכונה. התשובה נפסלת.



<u>נבדוק את תשובה (4):</u> $AC = BD$
ניתן להבחין בכך שבסרטוט הקטעים הללו אינם שווים ולכן הטענה אינה נכונה בהכרח. אם הדבר לא ברור מהסרטוט, ניתן לסרטט את המעגלים כך שההבדל בין אורכי הקטעים יהיה ניכר יותר. כאמור, אין כל הגבלה באשר לגדלי המעגלים. התשובה נפסלת.

16. תשובה (4) נכונה. שאלה 16 מתוך 20 בפרק.



דרך א׳ – הבנה

אנו מתבקשים לקבוע מה היקף הצורה הכהה. היקף זה מורכב מ-3 קשתות של מעגלים חופפים. נתון שרדיוס המעגלים הללו הוא 4 ס״מ, ולכן ההיקף של כל אחד מהם הוא 8π $(2 \cdot 4\pi)$. כדי לדעת מה אורכה של כל קשת, עלינו למצוא את גודל הזווית המרכזית שעליה היא נשענת. החלק שמהווה זווית זו מתוך $360°$ הוא החלק שמהווה הקשת מהיקף המעגל.

מכיוון שכל ההיקפים זהים, ניתן להניח שכל הקשתות מהוות חלק ממעגל אחד. לכן, חלקן הכולל מהיקף המעגל שווה לסכום הזוויות המרכזיות שעליהן הן נשענות מתוך $360°$. נמתח רדיוסים בין מרכזי המעגלים וניצור את הזוויות המרכזיות המדוברות. לשם ההבנה, נתאר זאת גם באופן אלגברי:

$$\frac{\measuredangle BAC}{360°} \cdot 8\pi + \frac{\measuredangle ACB}{360°} \cdot 8\pi + \frac{\measuredangle CBA}{360°} \cdot 8\pi$$

נוציא גורם משותף 8π:

$$8\pi \cdot \left(\frac{\measuredangle BAC}{360°} + \frac{\measuredangle ACB}{360°} + \frac{\measuredangle CBA}{360°}\right)$$

נאחד את המונים:

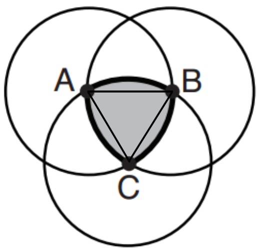
$$8\pi \cdot \left(\frac{\measuredangle BAC + \measuredangle ACB + \measuredangle CBA}{360°}\right)$$

מכיוון שסכום זוויות במשולש הוא $180°$, סכום הזוויות המרכזיות שעליהן נשענות הקשתות הוא $180°$. לפיכך, חלקן הכולל של הקשתות מהיקף המעגל הוא $\frac{1}{2}$ $\left(\frac{180°}{360°}\right)$ ועל כן סכום אורכיהן הוא 4π $\left(\frac{8\pi}{2}\right)$. משמע, היקף הצורה הכהה הוא 4π.

ניתן לתאר זאת גם באופן אלגברי:

$$\measuredangle BAC + \measuredangle ACB + \measuredangle CBA = 180°$$

$$8\pi \cdot \left(\frac{\measuredangle BAC + \measuredangle ACB + \measuredangle CBA}{360°}\right) \Rightarrow 8\pi \cdot \left(\frac{180°}{360°}\right) = 8\pi \cdot \frac{1}{2} = 4\pi$$



דרך ב׳ – פתרון גיאומטרי

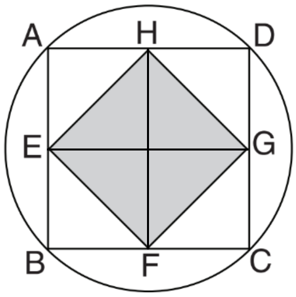
עלינו למצוא את היקף הצורה הכהה, המורכב מ-3 קשתות. נחשב את אורכה של כל קשת. כאמור, היקף כל מעגל הוא 8π. כדי לקבוע מה אורכה של כל קשת, כל שנותר לנו הוא למצוא את גודל הזווית המרכזית שעליה היא נשענת. לשם כך, נחבר את מרכזי המעגלים כדי ליצור את הזוויות הללו.

נתמקד במשולש ABC. כל צלעותיו הן רדיוסים במעגלים הנתונים, והם שווים זה לזה, לכן משולש ABC הוא שווה-צלעות. במשולש שווה-צלעות כל הזוויות הן בנות $60°$. כעת נוכל לחשב את אורך הקשתות: גודלה של זווית $\measuredangle ACB$ למשל הוא $60°$, והיא מהווה $\frac{1}{6}$ מ-$360°$ $\left(\frac{60°}{360°}\right)$, ולכן אורך הקשת AB הוא $\frac{8\pi}{6}$.

נשים לב כי שתי הקשתות הנוספות מהוות חלק ממעגלים שהיקפם זהה (8π), וכן נשענות על זווית זהה $(60°)$, ומכאן שאורך כל אחת מהן גם הוא $\frac{8\pi}{6}$. נסכם את אורכי הקשתות כדי למצוא את היקף הצורה הכהה:

$$3 \cdot \frac{8\pi}{6} = \frac{24\pi}{6} = 4\pi$$

17. תשובה (1) נכונה. שאלה 17 מתוך 20 בפרק.



דרך א' – שטח הריבוע הגדול
באמצעות חלוקת הריבוע הגדול לארבעה ריבועים קטנים (על ידי שרטוט קווים HF ו-EG), נוצרו 8 משולשים קטנים זהים. הריבוע הכהה בנוי מארבעה משולשים כאלה, ואילו הריבוע הגדול בנוי משמונה. כלומר, שטח הריבוע הכהה מהווה בדיוק חצי משטח הריבוע הגדול.

כעת, נותר לנו למצוא את שטח הריבוע הגדול ולחלק אותו ב-2.

תחילה, נשתמש בהיקף המעגל כדי למצוא את הקוטר שלו. היקף המעגל הנתון הוא 8π, ועל כן קוטרו 8 ס״מ. נעביר את אלכסוני הריבוע הגדול AC ו-BD, שהם גם קטרים במעגל. כלומר, אורך כל אלכסון הוא 8 ס״מ. כעת ניתן לחשב את שטח הריבוע הגדול באמצעות הנוסחה:

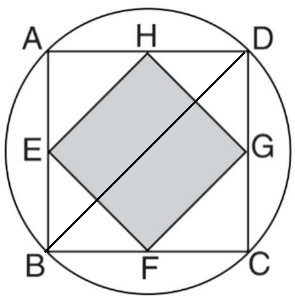
$$\text{שטח ריבוע} = \frac{\text{מכפלת האלכסונים}}{2}$$

$$\frac{8 \cdot 8}{2} = \frac{64}{2} \quad \Rightarrow \quad 32$$

כאמור, שטח הריבוע הכהה שווה למחצית משטח הריבוע הגדול, לכן:

$$\frac{32}{2} = 16$$

דרך ב' – קטע אמצעים

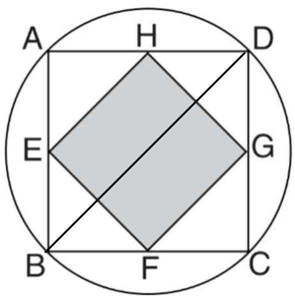


נשרטט את אלכסון BD שהוא גם קוטר במעגל. ידוע שהנקודות E ו-H הן אמצעי הקטעים AD ו-AB. כלומר, EH הוא קטע אמצעים במשולש ABD. קטע אמצעים שווה למחצית הצלע הנמצאת מולו, כלומר EH שווה לחצי מהקוטר BD.

נשתמש בהיקף המעגל כדי למצוא את הקוטר שלו. היקף המעגל הנתון הוא 8π, ועל כן קוטרו 8 ס״מ. מכאן שאורך צלע EH, שהיא צלע הריבוע, הוא 4 ס״מ. כעת ניתן לחשב את שטח הריבוע הכהה:

$$4 \cdot 4 = 16$$

דרך ג' – משולשי כסף



נשרטט את אלכסון BD שהוא גם קוטר במעגל. נשתמש בהיקף המעגל כדי למצוא את הקוטר BD. היקף המעגל הנתון הוא 8π, ועל כן קוטרו 8 ס״מ, כלומר BD=8.

כידוע, אלכסון בריבוע מחלק אותו לשני משולשי כסף, ועל כן כדי למצוא את ניצב AD (שהוא צלע הריבוע הגדול) במשולש כסף ABD עלינו לחלק את היתר BD ב-$\sqrt{2}$.

$$\text{AD} = \frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$$

כעת, כדי ״להתקרב״ לצלע הריבוע הכהה, נתמקד במשולש AHE.
AH שווה למחצית מצלע AD. כלומר, $\text{AH} = 2\sqrt{2}$
כדי להגיע מניצב AH ליתר EH במשולש כסף AHE, נכפול את AH ב-$\sqrt{2}$

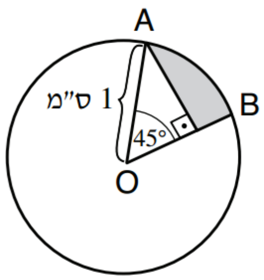
$$\text{EH} = \text{AH} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$$
$$2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2 \cdot 2 = 4$$

לאחר שמצאנו את אורך צלע EH, ניתן למצוא את שטח הריבוע הכהה:

$$4 \cdot 4 = 16$$

18. תשובה (4) נכונה. שאלה 19 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הערכת סדר גודל



כדי לחשב את גודל השטח הכהה אנחנו צריכים למצוא את שטחה של גזרה AOB ולהחסיר את שטחו של המשולש. עם זאת, במקרה זה אין צורך לחשב באופן מלא וניתן לבצע הערכת סדר גודל.

תחילה, נפסול תשובות לפי תבנית. כאמור, עלינו לחשב את שטח הגזרה ולהחסיר את שטח המשולש. בביטוי שיתאר את שטח הגזרה בהכרח יהיה π, שכן גזרה היא חלק ממעגל. בביטוי שיתאר את שטח המשולש יהיו מספרים חופשיים בלבד. לפיכך, התשובה הנכונה צריכה להיות בנויה כך ש-π עם מקדם חיובי כלשהו וממנו מפחיתים מספר.
נבדוק את התשובות. נשים לב שמכיוון שהשתמשנו בהערכת סדר גודל, עלינו לפסול 3 תשובות בטרם נוכל נסמן תשובה נכונה.

(1) $2-\frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow$ לא מתאים, התשובה נפסלת

(2) $\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{8}-1\right)$ $\Rightarrow$ **מתאים**

(3) $\frac{\pi}{4\sqrt{2}}$ $\Rightarrow$ לא מתאים, התשובה נפסלת

(4) $\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}$ $\Rightarrow$ **מתאים**

כעת נותרו 2 תשובות מתאימות. נמשיך לפסול באמצעות הערכת סדר גודל. אנו יודעים שערכו של π הוא קצת יותר מ-3. נציב בתשובות $\pi = 3$ ונפסול כל תשובה שאינה הגיונית.

(3) $\frac{1}{2}\left(\frac{3}{8}-1\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{5}{8}\right)$ $\Rightarrow$ שטח לא יכול להיות שלילי.
לא מתאים, התשובה נפסלת

פסלנו 3 תשובות ועל כן תשובה (4) נכונה.

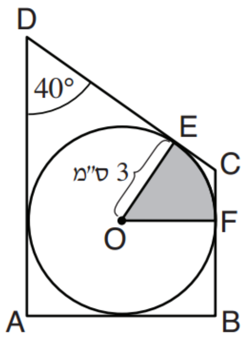
דרך ב' – פתרון מתמטי
כאמור, השטח הכהה שווה לשטח הגזרה פחות שטח המשולש. תחילה, נחשב את שטח הגזרה. אורך רדיוס המעגל הוא 1 ולכן שטחו π $(\pi\cdot 1^2)$. זווית בת $45°$ מהווה $\frac{1}{8}$ מ-$360°$ $\left(\frac{45}{360}\right)$. כלומר, שטח הגזרה הוא $\frac{\pi}{8}$. שימו לב, כבר בשלב זה ניתן לפסול את תשובות (1), (2) ו-(3) ולסמן את תשובה (4).

למען שלמות ההסבר, נחשב גם את שטח המשולש. משולש ישר זווית אשר גודלה של אחת מזוויותיו הוא $45°$, הוא משולש כסף. במשולש כסף הניצבים קטנים פי $\sqrt{2}$ מהיתר. לכן, גודל כל אחד מהניצבים הוא $\frac{1}{\sqrt{2}}$. נחשב את שטח המשולש:

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}}{2} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

לפיכך, השטח הכהה שווה ל-$\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}$.

.19 תשובה (2) נכונה. שאלה 20 מתוך 20 בפרק.



עלינו לחשב את שטח הגזרה הכהה. כדי לחשב שטח גזרה, עלינו לדעת את אורך הרדיוס (כדי לחשב את שטח המעגל) ואת גודל הזווית היוצרת את הגזרה. אורך הרדיוס נתון, ולכן כל שנותר לנו הוא למצוא את גודלה של זווית $\measuredangle EOF$.

כדי למצוא את גודל הזווית, נקשר אותה לגודל מוכר. זווית זו היא חלק ממרובע OECF. סכום הזוויות במרובע הוא $360°$. שתיים מהזוויות במרובע בנות $90°$, מפני שרדיוס מאונך למשיק בנקודת ההשקה ($\measuredangle CFO = \measuredangle CEO = 90°$). לכן, אם נדע את גודלה של זווית $\measuredangle ECF$, נוכל לחשב את גודלה של זווית $\measuredangle EOF$.

נתון ש-ABCD טרפז ולכן זווית $\measuredangle ECF$ משלימה את זווית $\measuredangle ADC$ ל-$180°$:

$$\measuredangle ECF = 180° - 40° = 140°$$

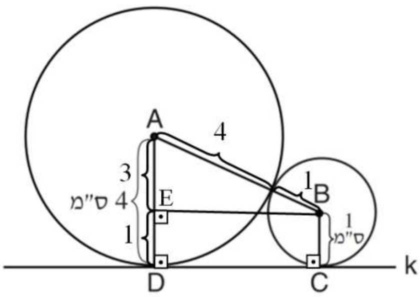
כעת ניתן לחשב את גודל זווית $\measuredangle EOF$:

$$\measuredangle EOF + 140° + 90° + 90° = 360°$$
$$\measuredangle EOF = 40°$$

משמצאנו את גודל הזווית שעליה נשענת הגזרה, ניתן לחשב את שטחה:

$$\frac{40°}{360°} \cdot \pi \cdot 3^2 = \frac{1}{9} \cdot 9\pi = \pi$$

.20 תשובה (4) נכונה. שאלה 20 מתוך 20 בפרק.



על מנת למצוא את היקף המרובע, עלינו למצוא את אורכי הצלעות החסרות – AB ו-CD. הישר AB מורכב מרדיוסיהם של שני המעגלים, ולכן אורכו שווה ל-5 ס"מ. כעת, עלינו למצוא את אורך הצלע DC. הישר k משיק לשני המעגלים ולכן הוא יוצר זווית ישרה עם הרדיוסים שלהם. נוריד אנך מהקדקוד B לצלע AD ונקבל מלבן (נסמן את נקודת החיתוך בין האנך לצלע AD באות E למען נוחות ההסבר).

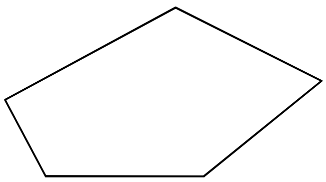
במלבן הצלעות הנגדיות שוות, ועל כן אורך צלע ED שווה גם הוא ל- 1 ס"מ, ולכן אורך החלק הנותר, צלע AE, הוא 3 ס"מ.

עתה, כדי לחשב את אורך הצלע DC, נמצא תחילה את אורך הצלע EB ע"י פיתגורס במשולש ישר הזווית AEB. נתון כי במשולש ניצב שאורכו 3 ס"מ ויתר שאורכו 5 ס"מ. לפיכך, אורך הניצב החסר הוא 4 ס"מ (לפי השלשה הפיתגורית 5 : 4 : 3). לכן, אורך הצלע EB שווה ל-4 ומכאן שגם אורך הצלע DC שווה ל-4 ס"מ (צלעות נגדיות במלבן שוות). משמצאנו את אורכיהם של כל הצלעות במרובע, נוכל לחשב את היקף המרובע.

$$4 + 1 + 5 + 4 = 14$$

מצולעים

מצולע הוא צורה גיאומטרית סגורה בעלת 3 צלעות או יותר.



סכום הזוויות במצולע משתנה בהתאם למספר הצלעות.

$$180 \cdot (n-2)$$

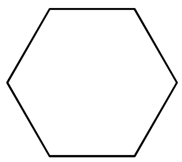
(n = מספר הצלעות)

כאשר מוסיפים למצולע כלשהו צלע נוספת, סכום הזוויות גדל ב- 180°.

למשל: משולש - 180°, מרובע - 360°, מחומש - 540°...

מצולעים משוכללים

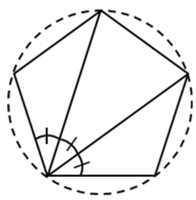
מצולע משוכלל הוא מצולע שבו כל הצלעות שוות וכל הזוויות שוות.
כל מצולע משוכלל ניתן לחסימה במעגל.



גודל זווית במצולע משוכלל:

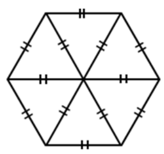
$$180 - \frac{360}{n} \quad \text{או} \quad \frac{180 \cdot (n-2)}{n}$$

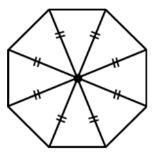
זווית המצולע משלימה את הזווית המרכזית של המעגל החוסם ל-180°



האלכסונים במצולע משוכלל מחלקים את זווית המצולע לזוויות שוות.

הזוויות הן בעצם זוויות היקפיות הנשענות על קשתות שוות במעגל החוסם את המצולע.





כל מצולע משוכלל מורכב מ-n משולשים שווי-שוקיים חופפים.
משושה מורכב מ-6 משולשים שווי-צלעות.

<u>זוויות שכדאי לזכור:</u>

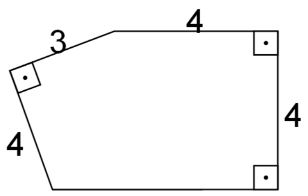
מצולע	**זווית**	**סכום זוויות**	**זווית מרכזית**
מחומש	108°	540°	72°
משושה	120°	720°	60°
מתומן	135°	1080°	45°

שטח מצולעים

על מנת לחשב שטח של מצולע כלשהו יש לחלק אותו לצורות מוכרות ולחשב את שטח הצורות המרכיבות אותו.

דוגמה:

בסרטוט שלפניכם מחומש.

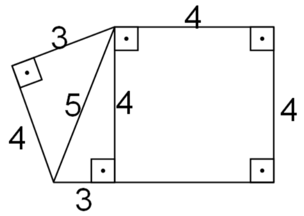


על פי נתוני הסרטוט, מה שטחו של המחומש (בסמ"ר)?

(1) 16
(2) 22
(3) 24
(4) 28

פתרון -

נחלק את המחומש לצורות מוכרות, ונחשב את שאר הצלעות בעזרת משפט פיתגורס.



קיבלנו שני משולשים ששטח כל אחד מהם הוא 6 סמ"ר,
וריבוע ששטחו 16 סמ"ר - סה"כ 28 סמ"ר.

תשובה (4) נכונה.

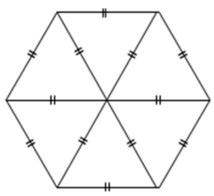
דוגמה:

נתון משושה משוכלל שאורך צלעו היא 6 ס"מ.
מהו שטחו של המשושה (בסמ"ר)?

(1) 36 (2) $27\sqrt{2}$ (3) $54\sqrt{3}$ (4) $12\sqrt{5}$

פתרון -

נעביר אלכסונים במשושה, ונחלק אותו למשולשים שווי-צלעות.
נחשב שטח משולש שווה-צלעות אחד (לפי נוסחת שטח משו"צ), ונכפיל פי 6.



שטח משולש שווה-צלעות:

$$\frac{6^2\sqrt{3}}{4} = \frac{36\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$$

כעת נכפול את השטח שקיבלנו פי 6, מכיוון שהמשושה המשוכלל מורכב מ-6 משולשים:

$$6 \cdot 9\sqrt{3} = 54\sqrt{3}$$

תשובה (3) נכונה.

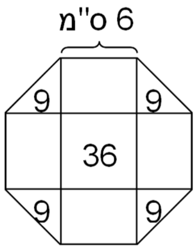
דוגמה:

נתון מתומן משוכלל שאורך צלעו היא 6 ס"מ.
מה שטחו של המתומן (בסמ"ר)?

(1) 216
(2) $144\sqrt{2}$
(3) $72 + 72\sqrt{2}$
(4) $36 + 36\sqrt{3}$

פתרון -

כאשר נתבקש לחשב שטח מתומן משוכלל, או חלק משטחו, נחלק את המתומן בעזרת אלכסונים באופן הבא:



המתומן מתחלק לריבוע (במרכז), 4 משולשים ישרי-זווית ושווי-שוקיים (משולשי כסף) ו-4 מלבנים.

שטח הריבוע שווה לצלע המתומן בריבוע - 36.

כדי למצוא את שטח המשולשים, ניתן לחשב את הניצבים בעזרת משפט פיתגורס או בעזרת יחסי צלעות במשולש כסף $(a : a : a\sqrt{2})$.

ניצב המשולש שווה ל- $3\sqrt{2}$, ולכן שטח משולש שווה ל-9 סמ"ר ושטח מלבן שווה ל- $18\sqrt{2}$.
כעת ניתן לחבר את כל השטחים ולחשב את שטח המתומן המשוכלל:

$$36 + 4 \cdot 9 + 4 \cdot 18\sqrt{2} = 72 + 72\sqrt{2}$$

תשובה (3) נכונה.

שימו לב! שטח כל אחד מהמשולשים שווה ל- $\frac{1}{4}$ משטח הריבוע - כלל זה נכון בכל מתומן משוכלל.
בעצם, יש דרך מהירה לחשב שטח מתומן - מחשבים את שטח הריבוע, מכפילים פי 2 (מכיוון ששטח 4 המשולשים שווה לשטח הריבוע), ומוסיפים את אותו מספר שקיבלנו כפול $\sqrt{2}$.

למשל, שטחו של מתומן משוכלל שאורך צלעו היא 4 ס"מ יהיה - שטח הריבוע (16) כפול 2, ואז מוסיפים את $\sqrt{2}$:

$$32 + 32\sqrt{2}$$

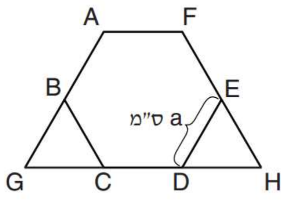
שטח מתומן משוכלל (a - צלע המתומן)

$$\mathbf{2a^2 + 2a^2\sqrt{2}}$$

תרגול שאלות מבחינות אמת

1. בסרטוט שלפניכם ABCDEF הוא משושה משוכלל. G ו-H הן נקודות מפגש של המשכי צלעות המשושה.

לפי נתונים אלה והנתונים שבסרטוט,
מה היקף הטרפז AGHF (בס"מ)?

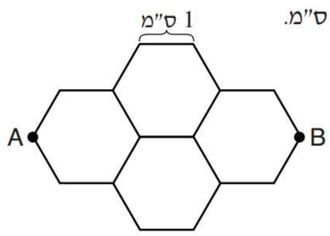


(1) 6a
(2) 7a
(3) 8a
(4) 9a

---

2. בסרטוט שלפניכם ארבעה משושים משוכללים חופפים שאורך צלעם 1 ס"מ.

מה המרחק בין הנקודות A ו-B (בס"מ)?



(1) 5
(2) 6
(3) 3
(4) 4

---

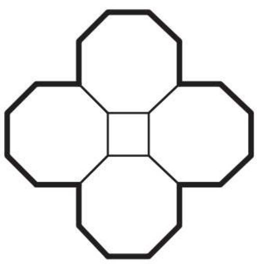
3. באיזה מצולע סכום הזוויות הפנימיות הוא $540°$?

(1) מרובע
(2) מחומש
(3) משושה
(4) לא קיים מצולע כזה

---

4. ארבעה מתומנים משוכללים חופפים הונחו זה לצד זה מסביב לריבוע, כמתואר בסרטוט.

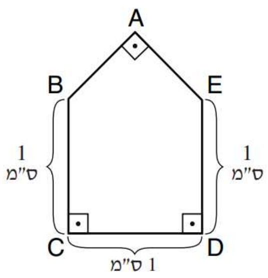
$$\frac{\text{היקף הצורה שנוצרה (הקו המודגש)}}{\text{היקף מתומן אחד}} = ?$$



(1) $\frac{9}{4}$
(2) $\frac{5}{2}$
(3) 3
(4) 4

פתרתי ____________ שאלות ב ____________ דקות, ____________ תשובות נכונות

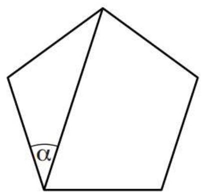
5. בסרטוט שלפניכם מחומש ABCDE.
נתון: $AB = AE$.
על פי נתונים אלה ונתוני הסרטוט,
מה היקף המחומש (בס"מ)?



(1) $3+\sqrt{2}$
(2) $3+\sqrt{3}$
(3) 5
(4) 4

---

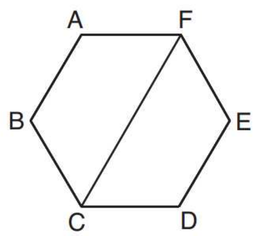
6. בסרטוט שלפניכם מחומש משוכלל.
$\alpha = ?$



(1) $60°$
(2) $54°$
(3) $36°$
(4) $40°$

---

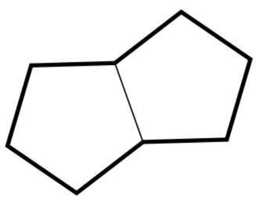
7. במשושה המשוכלל שבסרטוט $AB = 1$ ס"מ.
$CF = ?$



(1) $\sqrt{2}$ ס"מ
(2) 2 ס"מ
(3) $2\sqrt{3}$ ס"מ
(4) אי-אפשר לדעת על פי הנתונים

---

8. בסרטוט שלפניכם צורה המורכבת משני מחומשים משוכללים בעלי צלע משותפת.
היקף הצורה כולה (הקו המודגש) הוא 72 ס"מ.
מה היקף כל אחד מהמחומשים (בס"מ)?

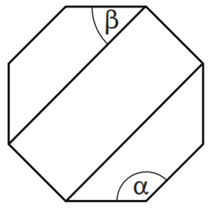


(1) 36
(2) 40
(3) 42
(4) 45

---

9. במתומן המשוכלל שבסרטוט,

$\alpha + \beta = ?$



(1) 157.5°

(2) 180°

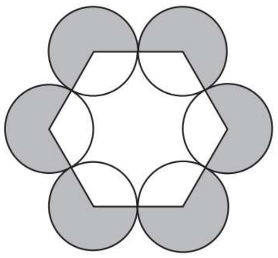
(3) 210°

(4) 240°

---

10. בסרטוט שלפניכם 6 מעגלים חופפים המשיקים זה לזה.
מחיבור מרכזי המעגלים נוצר משושה משוכלל.
נתון: רדיוס כל מעגל הוא 1 ס"מ.

מה סכום השטחים הכהים (בסמ"ר)?



(1) $4\frac{1}{2} \cdot \pi$

(2) $3\frac{1}{2} \cdot \pi$

(3) $3 \cdot \pi$

(4) $4 \cdot \pi$

---

11. באיזה מהמצולעים הבאים **כל** האלכסונים נחתכים בנקודה אחת?

(1) מתומן משוכלל

(2) משושה משוכלל

(3) מחומש משוכלל

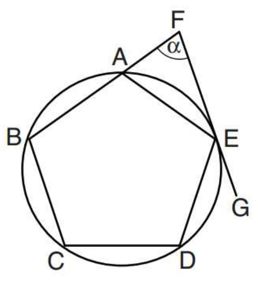
(4) מלבן

---

12. נתון: ABCDE הוא מחומש משוכלל החסום במעגל.
FG משיק למעגל בנקודה E.
AF הוא המשך הצלע BA.

לפי נתונים אלה ונתוני הסרטוט,

$\alpha = ?$



(1) 50°

(2) 60°

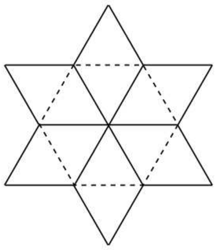
(3) 72°

(4) 66°

פתרתי ______________ שאלות ב ______________ דקות, ______________ תשובות נכונות

.13 6 מעוינים חופפים, שהיקף כל אחד מהם 8 ס"מ, יוצרים צורה כבסרטוט.
חיבור 6 אלכסונים של המעוינים יוצר משושה (הקו המקווקו).

מה היקפו של המשושה (בס"מ)?



(1) 12
(2) $12\sqrt{2}$
(3) $6\sqrt{2}$
(4) 24

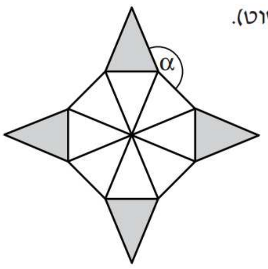
.14 סכום הזוויות הפנימיות במצולע הוא $1440°$.

כמה צלעות למצולע?

(1) 11
(2) 10
(3) 9
(4) 8

.15 על ארבע מצלעותיו של מתומן משוכלל סורטטו משולשים שווי-שוקיים (המשולשים הכהים), החופפים למשולשים שנוצרו מחיתוך אלכסונים של המתומן (ראו סרטוט).

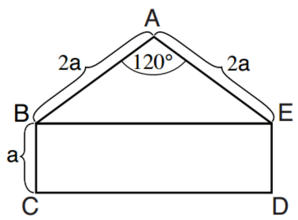
מה גודלה של הזווית α?



(1) $177.5°$
(2) $157.5°$
(3) $132.5°$
(4) $112.5°$

.16 בסרטוט שלפניכם BCDE הוא מלבן.

על פי נתון זה ונתוני הסרטוט,
מה שטחו של המחומש ABCDE?

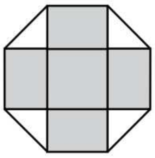


(1) $3\sqrt{3}\,a^2$
(2) $\frac{4\sqrt{3}}{3}a^2$
(3) $8\sqrt{3}\,a^2$
(4) $\frac{16}{\sqrt{3}}a^2$

פתרתי ______ שאלות ב ______ דקות, ______ תשובות נכונות

17. בסרטוט שלפניך מתומן משוכלל שאורך צלעו 1 ס"מ.

מה גודל השטח הכהה (בסמ"ר)?



(1) $1+2\sqrt{2}$

(2) 5

(3) 3

(4) $1+\sqrt{32}$

---

18. A הוא מצולע בעל n צלעות.
B הוא מצולע בעל m צלעות.

נתון: $m < n$

ההפרש בין סכום הזוויות הפנימיות במצולע A לסכום הזוויות הפנימיות במצולע B הוא -

(1) $(n-m)\cdot 180°$

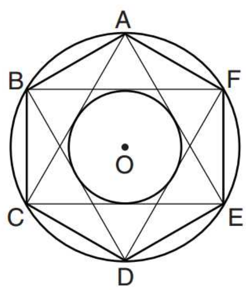
(2) $(n-m+2)\cdot 180°$

(3) $(n-m-2)\cdot 180°$

(4) $(n-m-4)\cdot 180°$

---

19. בסרטוט שלפניכם משושה משוכלל ABCDEF החסום במעגל שמרכזו O.
שישה מאלכסוני המשושה חוסמים מעגל אחר שמרכזו אף הוא בנקודה O.
נסמן את רדיוס המעגל הגדול ב-R ואת רדיוס המעגל הקטן ב-r.



$\frac{R}{r} = ?$

(1) $\frac{3}{2}$

(2) 2

(3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(4) $\sqrt{2}$

---

20. מצולע בעל n צלעות חסום במעגל. המצולע מחלק את המעגל ל-7 שטחים נפרדים.

$n = ?$

(1) 5

(2) 6

(3) 7

(4) 8

פתרתי ____________ שאלות ב ____________ דקות, ____________ תשובות נכונות

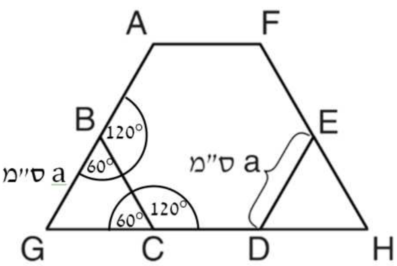
תשובות

שאלה	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
תשובה	3	1	2	2	1	3	2	4	2	4

שאלה	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
תשובה	4	3	1	2	2	1	1	1	2	2

פתרתי 20 שאלות - _______________ נכונות, _______________ אחוזי הצלחה

1. תשובה (3) נכונה. שאלה 1 מתוך 20 בפרק.



כדי למצוא את היקף הטרפז AGHF, עלינו למצוא את אורך צלעותיו, אשר מורכבות מצלעות המשושה ומצלעות המשולשים.
ידוע שצלע DE שווה a ס"מ, ומכיוון שמדובר במשושה משוכלל, כלל צלעותיו שוות a ס"מ. באשר לצלעות המשולשים, **אנו יכולים להסתמך על הסרטוט ולהבין כי המשולשים הם שווי צלעות** וגם צלעותיהם שוות ל-a ס"מ. זאת משום שמדובר בשאלה הראשונה בפרק, משום שהסרטוט הוא של צורה משוכללת, וכן בשל היעדר תשובה המטילה ספק בכך שהסרטוט הוא קבוע ולא גמיש.

כלומר, אורך כל אחת מהצלעות הוא a ס"מ. הטרפז מורכב מ-8 צלעות כאלו, ועל כן היקפו 8a.

למען שלמות ההסבר, נוכיח כי אכן מדובר במשולשים שווי צלעות:
תחילה, ידוע לנו כי זווית פנימית במשושה משוכלל, לדוגמה $\sphericalangle BCD$, בת $120°$. לכן, $\sphericalangle GCB$ הצמודה לה ומשלימה אותה ל-$180°$, שווה ל-$60°$.

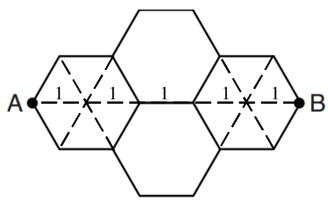
$$\sphericalangle GCB = 180° - 120° = 60°$$

באותה דרך נמצא כי גם $\sphericalangle GBC = 60°$ (כמתואר בסרטוט).

מכאן שבמשולש GCB יש 2 זוויות בנות $60°$ ועל כן הוא משולש שווה צלעות. אותה ההוכחה תקפה גם למשולש שווה צלעות DHE.

---

2. תשובה (1) נכונה. שאלה 2 מתוך 20 בפרק.



אנו מתבקשים למצוא את המרחק בין A ל-B. נמתח קו ביניהם. קטע AB מורכב מצלע המשושה (שאורכה 1 ס"מ) ומשני אלכסונים ראשיים במשושה. במשושה משוכלל, האלכסונים הראשיים גדולים פי 2 מאורך הצלע. לכן נקבל $5 = 2 + 2 + 1$.

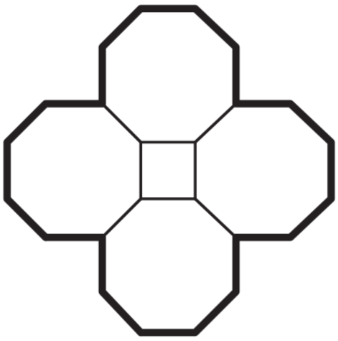
נוכיח זאת למען שלמות ההסבר: נעביר את 3 האלכסונים הראשיים במשושה הימני ובמשושה השמאלי. זו חלוקה מוכרת של משושה משוכלל ל-6 משולשים שווי-צלעות שאורך צלעם שווה לאורך צלע המשושה. כל אלכסון מרכזי מורכב משתי צלעות שכאלה ועל כן אורכו 2 ס"מ.

בסך הכל, אורך הקטע AB הוא 5 ס"מ $(2 + 1 + 2)$.

.3 תשובה (2) נכונה. שאלה 3 מתוך 20 בפרק.

המצולע אשר סכום הזוויות הפנימיות שלו הוא $540°$ הוא מחומש.
כידוע, סכום הזוויות הפנימיות במשולש הוא $180°$, וכל צלע נוספת מוסיפה $180°$ - מרובע $360°$, מחומש $540°$, משושה $720°$ וכן הלאה.

.4 תשובה (2) נכונה. שאלה 4 מתוך 20 בפרק.

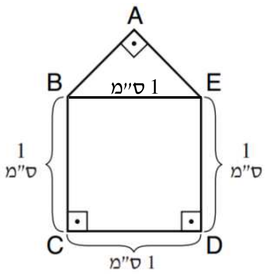


עלינו למצוא את היחס בין היקף הצורה שנוצרה מחיבורם של 4 מתומנים זהים, לבין היקפו של מתומן אחד.

ניתן לראות כי היקף הצורה שנוצרה מורכב מ-5 צלעות של כל מתומן. כאמור, ישנם 4 מתומנים ועל כן היקף הצורה שווה ל-20 צלעות של מתומן ($4 \cdot 5$). היקף מתומן אחד שווה ל-8 צלעות.

כלומר, היחס ביניהם הוא: $\frac{20}{8} = \frac{5}{2}$.

.5 תשובה (1) נכונה. שאלה 6 מתוך 20 בפרק.



אנו מתבקשים למצוא את היקף המחומש. אורכי שלוש מצלעותיו נתונים, ולכן עלינו למצוא את אורכי השתיים הנותרות. נתון כי הן שוות ($AB = AE$). נשתמש בבניית עזר – צלע BE, שהיא צלע בריבוע $BCDE$ ולכן אורכה 1 ס"מ. כעת נתמקד במשולש ABE, שהוא ישר זווית ושווה-שוקיים – משולש כסף. במשולש כסף היתר גדול פי $\sqrt{2}$ מהניצבים, שאורכם 1 ס"מ, ועל כן $AB = AE = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

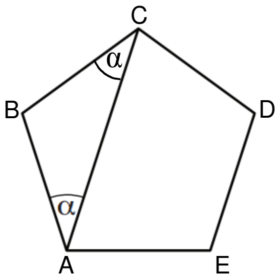
כעת נסכום את אורכי צלעות המחומש:

$$3 + 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 3 + \frac{2}{\sqrt{2}}$$

מאחר שאין תשובה הזהה לביטוי שלעיל, נפשט אותו. נכפול את מונה ומכנה השבר ב-$\sqrt{2}$:

$$3 + \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = 3 + \frac{2\sqrt{2}}{2} = 3 + \sqrt{2}$$

6. תשובה (3) נכונה. שאלה 6 מתוך 20 בפרק.



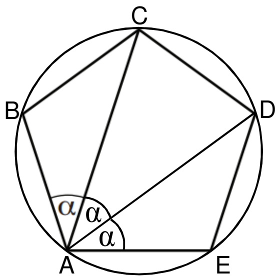
דרך א' – סכום זוויות במשולש

לפנינו מחומש משוכלל. עלינו לקבוע מה גודלה של זווית α שנוצרה כתוצאה מהעברת אלכסון במחומש זה. למען נוחות ההסבר, נסמן את קדקודי המחומש כמתואר בסרטוט. נתמקד במשולש ABC. משולש זה הוא שווה-שוקיים, שכן שתיים מצלעותיו הן צלעות במחומש המשוכלל, ולכן זוויות הבסיס שלו שוות. גודל כל זווית במחומש משוכלל הוא $108°$. לכן, ניתן לבנות משוואה המתארת את סכום הזוויות במשולש ABC ולחלץ את α:

$\alpha + \alpha + 108° = 180°$

$2\alpha = 72°$

$\alpha = 36°$



דרך ב' – אלכסונים

נוסיף לסרטוט את אלכסון AD. שלוש הזוויות המרכיבות את זווית $\measuredangle BAE$ שוות, שכן האלכסונים במצולע משוכלל מחלקים את זווית המצולע לזוויות שוות.

למען שלמות ההסבר, נוכיח זאת: כידוע, כל מצולע משוכלל ניתן לחסום במעגל. אילו המחומש היה כלוא בתוך מעגל, כל אחת מהזוויות שסומנו בסרטוט היו שוות, שכן כולן זוויות היקפיות הנשענות על מיתר באותו אורך ($BC = CD = DE$).

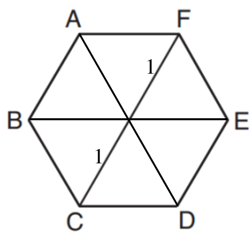
לפיכך, זווית $\measuredangle BAE$ מורכבת מ-3 זוויות שגודלן α. ידוע לנו ש-$\measuredangle BAE = 108°$ מפני שהיא זווית פנימית במחומש משוכלל. נתאר זאת באופן אלגברי:

$3\alpha = 108°$

$\alpha = 36°$

---

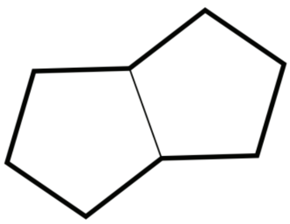
7. תשובה (2) נכונה. שאלה 6 מתוך 20 בפרק.



בסרטוט מוצג משושה משוכלל שאורך צלעו 1 ס"מ. עלינו לקבוע מה אורכו של אלכסון CF. כדי לקשר בין צלע המשושה לבין האלכסון, נעביר את האלכסונים AD ו-BE. נוצרה חלוקה מוכרת של משושה משוכלל ל-6 משולשים שווי-צלעות, שאורך צלעם שווה לאורך צלע המשושה – 1 ס"מ. אלכסון CF מורכב משתי צלעות כאלה, ולכן אורכו 2 ס"מ.

---

8. תשובה (4) נכונה. שאלה 7 מתוך 20 בפרק.

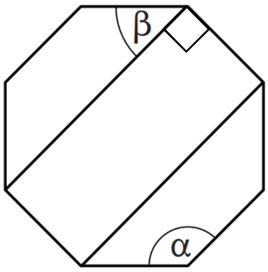


נתון כי אלו שני מחומשים משוכללים בעלי צלע משותפת אחת. במחומש משוכלל כל הצלעות שוות, ומשום שיש לשני המחומשים צלע משותפת אנו יכולים לקבוע שכל הצלעות בסרטוט שוות זו לזו.

היקף הצורה כולה הוא 72 ס"מ, וניתן לראות שהוא מורכב מ-8 צלעות שוות. לכן, אורך כל צלע הוא 9 ס"מ $\left(\frac{72}{8}\right)$.

אנו נשאלים מה היקף של מחומש אחד. מצאנו שאורך כל צלע הוא 9 ס"מ. מחומש משוכלל מורכב מ-5 צלעות זהות, ולכן היקפו 45 ס"מ $(5 \cdot 9)$.

9. תשובה (2) נכונה. שאלה 7 מתוך 20 בפרק.



דרך א׳ – זוויות במתומן משוכלל

הזווית הפנימית במתומן משוכלל בת $135°$. כלומר, $\alpha = 135$.
כמו כן, ידוע כי העברת האלכסונים במתומן באופן בו הועברו בסרטוט, יוצרת מלבן.

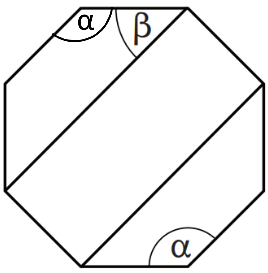
טיפ: גם אם אינכם יודעים שמדובר במלבן באופן וודאי, יש לזכור שמדובר בצורה משוכללת ועל כן ניתן להסתמך על הסרטוט.

כיוון ש-β והזווית הישרה יחד מרכיבות זווית פנימית במתומן, ניתן לחשב את גודלה של β :

$$\beta + 90 = 135$$
$$\beta = 45°$$

כעת נסכום את ערכי α ו-β :

$$45° + 135° = 180°$$



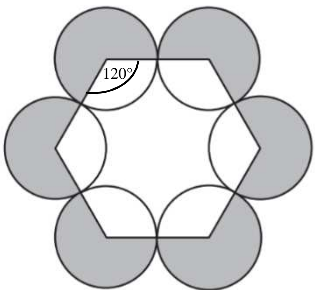
דרך ב׳ – טרפז

במתומן משוכלל כל הזוויות שוות, ולכן גם הזווית שמשמאל ל-β שווה ל-α. כעת α ו-β הן שתי זוויות הנמצאות על אותה שוק בטרפז ולכן סכומן $180°$.

טיפ: גם אם אינכם יודעים שמדובר בטרפז באופן וודאי, יש לזכור שמדובר בצורה משוכללת ועל כן ניתן להסתמך על הסרטוט.

---

10. תשובה (4) נכונה. שאלה 11 מתוך 20 בפרק.



במשושה משוכלל הזוויות שוות ל-$120°$. זווית מרכזית של $120°$ מהווה שליש מהמעגל. השטח הלבן מורכב מ-6 חלקים שווים, שגודל כל אחד מהם הוא $\frac{1}{3}$ מעגל, ולכן השטחים הלבנים יחד הם למעשה שטח של 2 מעגלים שלמים ($6 \cdot \frac{1}{3} = 2$). השטחים הכהים יחד, אם כן, שווים לשטח של 4 מעגלים שלמים (ישנם 6 מעגלים סך הכול, והחלק הלבן שווה ל-2 מעגלים, ולכן השטחים הכהים הם 4 המעגלים הנותרים).

נתון כי הרדיוס של כל מעגל הוא 1 ס״מ. נחשב שטח של מעגל אחד :

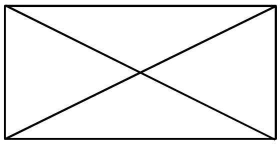
$$r^2 \cdot \pi = 1^2 \cdot \pi = \pi$$

שטחו של כל מעגל הוא π, ולכן סכום השטחים הכהים, השווה לשטחם של 4 מעגלים, הוא 4π.

11. תשובה (4) נכונה. שאלה 12 מתוך 20 בפרק.

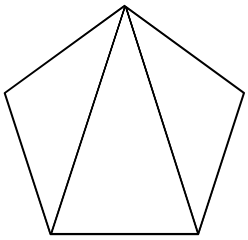
עלינו לקבוע באיזה מהמצולעים כל האלכסונים נחתכים בנקודה אחת. נבדוק את התשובות.

טיפ: בהצבת תשובות, כדאי להתחיל בתשובות הנוחות יותר.

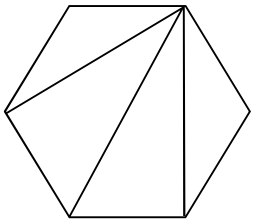


<u>נבדוק את תשובה (4) :</u> נעביר את אלכסוני המלבן. למלבן יש רק 2 אלכסונים ושניהם נחתכים בנקודה אחת. **תשובה נכונה.**

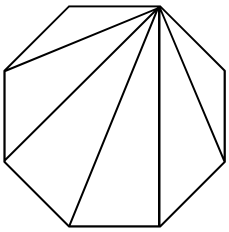
טיפ: ברגע שמצאנו תשובה נכונה אין צורך להמשיך לבדוק את שאר התשובות, אך למען שלמות ההסבר נפסול אותן :



<u>נבדוק את תשובה (3) :</u> במחומש משוכלל לא כל האלכסונים נחתכים בנקודה אחת, וחלקם אף לא נחתכים כלל, כמתואר בסרטוט. התשובה נפסלת.



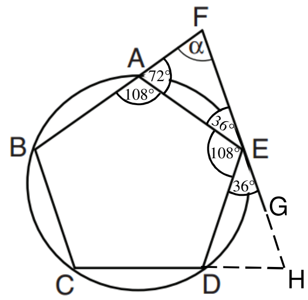
<u>נבדוק את תשובה (2) :</u> במשושה משוכלל לא כל האלכסונים נחתכים בנקודה אחת (על אף שכל האלכסונים **המרכזיים** נחתכים בנקודה אחת). שימו לב, בדומה למחומש המשוכלל, גם במשושה המשוכלל ישנם אלכסונים שלא נחתכים כלל. זאת מפני שכל האלכסונים היוצאים מאותו קדקוד בהכרח לא ייחתכו (מתואר בסרטוט). התשובה נפסלת.



<u>נבדוק את תשובה (1) :</u> במתומן משוכלל לא כל האלכסונים נחתכים בנקודה אחת (על אף שכל האלכסונים **המרכזיים** נחתכים בנקודה אחת). התשובה נפסלת.

12. תשובה (3) נכונה. שאלה 14 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – סימטריה



לפנינו מחומש משוכלל הכלוא במעגל. עלינו לקבוע מה גודלה של α. נוכל להיעזר בסכום הזוויות במשולש AFE, ולשם כך נמצא את גודלן של זוויות $\measuredangle FAE$ ו-$\measuredangle FEA$.

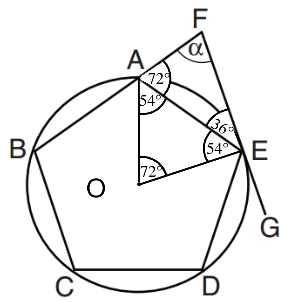
זווית $\measuredangle FAE$ משלימה זווית פנימית במחומש ל-$180°$. גודלה של כל זווית פנימית במחומש משוכלל הוא $108°$, ולכן $\measuredangle FAE = 72°$ $(180° - 108°)$.

זווית $\measuredangle FEA$ שווה לזווית $\measuredangle GED$, משיקולי סימטריה (הצורות משוכללות). סכומן של שתי הזוויות הללו הוא $72°$, שכן הן משלימות זווית פנימית במחומש המשוכלל ($108°$) ל-$180°$. לכן $\measuredangle FEA = 36°$ $\left(\frac{72°}{2}\right)$.

כעת נמצא את α באמצעות סכום זוויות במשולש AFE:

$$\alpha + 72° + 36° = 180°$$
$$\alpha = 72°$$

דרך ב' – משולש שווה-שוקיים



כאמור לעיל, ניתן להיעזר בסכום הזוויות במשולש AFE כדי לקבוע מה גודלה של α. מצאנו כי $\measuredangle FAE = 72°$. נמצא את גודלה של הזווית הנותרת, $\measuredangle FEA$.

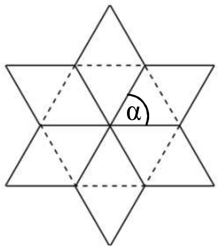
נמתח רדיוס ממרכז המעגל לנקודה E. $\measuredangle OEF = 90°$, שכן רדיוס מאונך למשיק בנקודת ההשקה. לכן, אם נמצא את גודלה של זווית $\measuredangle OEA$, נוכל למצוא את זווית $\measuredangle FEA$ המשלימה אותה ל-$90°$.

נמתח רדיוס ממרכז המעגל לקדקוד A. משולש OAE שנוצר הוא משולש שווה-שוקיים, שכן שתיים מצלעותיו הן רדיוסים במעגל. גודלה של זווית הראש במשולש זה הוא $72°$ (גודל של זווית מרכזית במחומש משוכלל), ולכן גודלן של זוויות הבסיס הוא $54°$ $\left(\frac{180°-72°}{2}\right)$.

אם $\measuredangle OEA = 54°$, הרי ש-$\measuredangle FEA = 36°$ $(90° - 54°)$. כעת נמצא את α באמצעות סכום זוויות במשולש AFE:

$$\alpha + 72° + 36° = 180°$$
$$\alpha = 72°$$

13. תשובה (1) נכונה. שאלה 14 מתוך 20 בפרק.



מאחר שמדובר ב-6 מעוינים חופפים, ניתן לסמוך על אמינות הסרטוט. אין דרך אחרת לסרטט את ששת המעוינים כך שקדקודיהם יפגשו בנקודה אחת. המשושה שנראה משוכלל הוא אכן משוכלל, וחלוקתו מוכרת.

המשושה מחולק ל-6 משולשים שווי-צלעות, ולכן אורך צלע המשושה שווה לאורך צלע המעוין. מכיוון שהיקף המעוין הוא 8 ס״מ, אורך צלעו 2 ס״מ $\left(\frac{8}{4}\right)$. לפיכך, אורך צלע המשושה היא 2 ס״מ והיקפו 12 ס״מ $(2 \cdot 6)$.

למען שלמות ההסבר, נוכיח כעת שהמשושה משוכלל והמשולשים שווי-צלעות: נתמקד בנקודת המפגש של קדקודי המעוינים. מכיוון שהמעוינים חופפים, ניתן לסמן את כל הזוויות בנקודה זו ב-α (כמתואר בסרטוט), 6 הזוויות הללו מרכיבות זווית עגולה בת $360°$. נחשב את ערכה של α:

$$6\alpha = 360° \quad \Rightarrow \quad \alpha = 60°$$

המשולשים שנוצרו מחיבור האלכסונים הם שווי-שוקיים, שכן שתיים מצלעותיהם הן צלעות במעוין. משולש שווה-שוקיים שאחת מזוויותיו שווה ל-$60°$, הוא משולש שווה-צלעות.

---

14. תשובה (2) נכונה. שאלה 16 מתוך 20 בפרק.

דרך א׳ – פתרון אלגברי

הביטוי המתאר סכום זוויות פנימיות במצולע הוא $180° \cdot (n-2)$, כאשר n הוא מספר הצלעות במצולע. ידוע לנו שביטוי זה שווה ל-$1440°$. נבטא קשר זה באופן אלגברי ונחלץ את n:

$$180° \cdot (n-2) = 1440°$$
$$180° \cdot n - 360° = 1440°$$
$$180° \cdot n = 1800°$$
$$n = 10$$

דרך ב׳ – עוגן

נתון כי סכום הזוויות הפנימיות במצולע הוא $1440°$, ועלינו לקבוע כמה צלעות למצולע זה.

סכום הזוויות במתומן הוא, $1,080°$ וכל צלע מוספיה $180°$, נוסיף $180°$ עד שנגיע ל- $1,440°$

$$1,080 + 180 = 1260$$

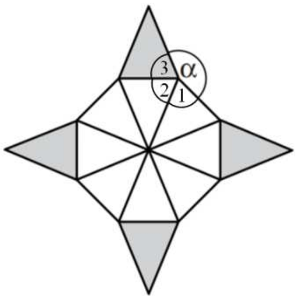
מצאנו את סכום הזוויות במתושע. נמשיך:

$$1,260 + 180 = 1440$$

מצאנו! סכום הזוויות 1440 מתאים למעושר. $n = 10$.

---

15. תשובה (2) נכונה. שאלה 16 מתוך 20 בפרק.



ידוע כי זווית היקפית המתומן שווה ל-$135°$. לפיכך, מכיוון שהמשולשים הם שווי שוקיים וחופפים, גודלה של כל זווית בסיס היא מחצית מ-$135°$, כלומר $67.5°$.

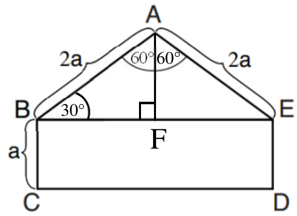
הזווית α משלימה ל-$360°$ שלוש זווית בסיס של המשולשים (הזוויות המסומנות ב-1, 2 ו-3).

$$360-(67.5+67.5+67.5)=360-202.5=157.5$$

ניתן לשים לב שהתשובות המוצעות יחסית רחוקות זו מזו, ועל כן **אין צורך לעשות חישוב מדויק**. אנו יודעים כי זווית היקפית במתומן (כלומר זוויות 1 ו-2 יחד) שווה ל-$135°$. זווית 3 שווה למחצית מהזווית ההיקפית, ולכן קטנה במעט מ-$70°$. כלומר, שלוש הזוויות האלו יחד הן כ-$200°$, ועל כן הזווית α, אשר משלימה ל-$360°$ את זוויות אלו, צריכה להיות כ-$160°$ ($360-200$). התשובה המתאימה לערך זה היא תשובה (2).

---

16. תשובה (1) נכונה. שאלה 17 מתוך 20 בפרק.



ABCDE הוא מחומש המורכב ממלבן וממשולש. כדי לחשב את שטחו, נחשב את שטחן של הצורות המרכיבות אותו.

אין לנו מספיק נתונים כדי לחשב את שטחו של המלבן, ולכן נתחיל בחישוב שטח המשולש. משולש ABE הוא משולש שווה-שוקיים, שכן $AB = AE$.
נעביר גובה מנקודה A לבסיס המשולש (נסמן נקודה זו באות F). מאחר שהמשולש שווה-שוקיים, הגובה הוא גם חוצה זווית,
ואז $\measuredangle BAF = \measuredangle EAF = 60°$.

כעת נתמקד במשולש BAF. משולש זה הוא משולש זהב, מפני שהוא בעל זוויות שגודלן $90°$ ו-$60°$ ולכן גודלה של הזווית השלישית הוא בהכרח $30°$. נתון שאורך היתר במשולש זה הוא 2a, ולכן $AF = a$, כי הוא הניצב הקטן, ו-$BF = a\sqrt{3}$, כי הוא הניצב הגדול.
כאמור, משולש BAF הוא משולש שווה-שוקיים, ועל כן הגובה הוא גם תיכון, לכן $BF = FE = \sqrt{3}$ ⇐ $BE = 2a\sqrt{3}$.

משמצאנו את אורכי הקטעים הדרושים, ניתן לחשב את שטחי הצורות. נחשב את שטח המשולש:

$$\frac{BE\cdot AF}{2}=\frac{2a\sqrt{3}\cdot a}{2}=a^2\sqrt{3}$$

נחשב את שטח המלבן:

$$BE\cdot BC=2a\sqrt{3}\cdot a=2a^2\sqrt{3}$$

לפיכך, שטח המחומש הוא $a^2\sqrt{3}+2a^2\sqrt{3}=3a^2\sqrt{3}$.

17. תשובה (1) נכונה. שאלה 18 מתוך 20 בפרק.

אנו מתבקשים למצוא את גודלו של השטח הכהה. שטח זה מורכב מ-4 מלבנים חופפים ומריבוע. תחילה נחשב את שטח הריבוע. צלעו שווה לצלע המתומן – 1 ס״מ. לפיכך, שטחו 1 סמ״ר.

כעת נפנה לחישוב שטח המלבן. אורכו שווה לאורך צלע המתומן – 1 ס״מ. נמצא את רוחבו. נתמקד באחד מהמשולשים ישרי הזווית שנוצרו עקב חלוקת המתומן. זו חלוקה מוכרת, היוצרת 4 משולשי כסף. אורך היתר בכל אחד מהמשולשים הוא 1 ס״מ (צלע המתומן). במשולש כסף היתר גדול פי $\sqrt{2}$ מהניצבים, לכן אורך כל ניצב הוא $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

כעת ניתן לחשב את שטחם הכולל של ארבעת המלבנים:

$$4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}}$$

ובסך הכל, גודל השטח הכהה הוא $1 + \frac{4}{\sqrt{2}}$. מפני שאין תשובה כזו, נפשט את הביטוי שהתקבל. נכפול את מונה ומכנה השבר ב-$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ (באופן זה איננו משנים את ערכו, שכן למעשה אנו כופלים ב-1):

$$1 + \frac{4}{\sqrt{2}} = 1 + \frac{4 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = 1 + \frac{4 \cdot \sqrt{2}}{2} = 1 + 2\sqrt{2}$$

18. תשובה (1) נכונה. שאלה 18 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הצבת מספרים

נציב מספרים נוחים עבור n ו-m, נחשב את סכומי הזוויות במצולעים ונמצא את ההפרש ביניהם.

נציב $m = 3$, $n = 4$. לפיכך, A הוא ריבוע וסכום זוויותיו הפנימיות הוא $360°$, ואילו B הוא משולש וסכום זוויותיו הפנימיות הוא $180°$. לכן ההפרש בין סכומי הזוויות הוא $360° - 180° = 180°$.

כעת, נציב גם בתשובות $m = 3$ ו-$n = 4$, ונחפש תשובה השווה ל-$180°$. נשים לב שמכיוון שהשתמשנו בהצבת מספרים במקום הנעלמים, עלינו לפסול 3 תשובות בטרם נוכל לסמן תשובה נכונה.

(1)	$(n-m)\cdot 180° = (4-3)\cdot 180° - 180° = 180°$	$\Rightarrow$	**מתאים**
(2)	$(n-m+2)\cdot 180° = (4-3+2)\cdot 180° = 3\cdot 180°$	$\Rightarrow$	לא מתאים, התשובה נפסלת
(3)	$(n-m-2)\cdot 180° = (4-3-2)\cdot 180° = -180°$	$\Rightarrow$	לא מתאים, התשובה נפסלת
(4)	$(n-m-4)\cdot 180° = (4-3-4)\cdot 180° = -3\cdot 180°$	$\Rightarrow$	לא מתאים, התשובה נפסלת

פסלנו 3 תשובות ועל כן תשובה (1) נכונה.

דרך ב' – פתרון אלגברי

ניתן להשתמש בנוסחה לחישוב סכום זוויות פנימיות במצולע עבור המצולעים A ו-B, וכך למצוא את הביטוי המתאר את ההפרש ביניהם. סכום זוויות במצולע שווה ל-$(x - 2) \cdot 180$ (כאשר x מייצג את מספר הצלעות במצולע).

סכום הזוויות הפנימיות במצולע A (מצולע בעל n צלעות):

$$180° \cdot (n-2)$$

סכום הזוויות הפנימיות במצולע B (מצולע בעל m צלעות):

$$180° \cdot (m-2)$$

כעת ניתן לבטא את ההפרש בין סכום הזוויות הפנימיות במצולע A לבין סכום זה במשולש B:

$$180° \cdot (n-2) - 180° \cdot (m-2)$$

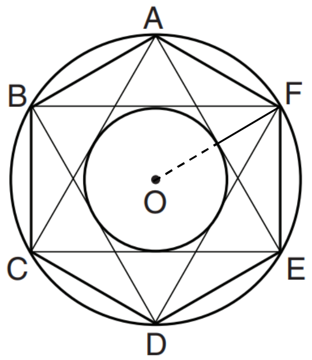
נוציא גורם משותף 180:

$$180° \cdot (n-2-(m-2)) = 180° \cdot (n-2-m+2) = 180° \cdot (n-m)$$

19. תשובה (2) נכונה. שאלה 18 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הערכת סדר גודל

רדיוס המעגל הגדול הוא R ורדיוס המעגל הקטן הוא r. עלינו למצוא את היחס $\frac{R}{r}$. אנו יכולים לסמוך על אמינותו של סרטוט זה, מפני שהוא מכיל צורות משוכללות רבות – 2 עיגולים ואף משושה משוכלל. אין דרך אחרת שבה ניתן לשרטט אותו.



נשרטט את שני הרדיוסים ונראה כי הרדיוס הגדול, גדול בערך פי 2 מהקטן. כלומר, היחס $\frac{R}{r}$ צריך להיות שווה ל-2. כעת נחפש תשובה אשר ערכה קרוב ל-2 ככל הניתן:

<u>נבדוק את תשובה (1):</u> $1.5 = \frac{3}{2}$. לא מתאים, התשובה נפסלת.

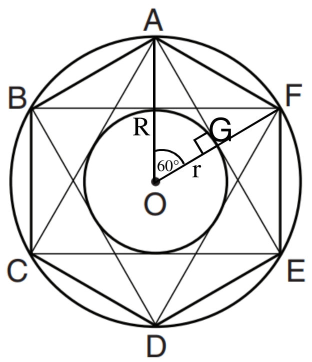
<u>נבדוק את תשובה (2):</u> 2, **מתאים.**

<u>נבדוק את תשובה (3):</u> $\frac{\sqrt{3}}{2}$. $\sqrt{3}$ שווה בערך 1.7. חצי ממנו קטן מ-1. לא מתאים, התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (4):</u> $\sqrt{2}$ שווה בערך 1.4. לא מתאים, התשובה נפסלת.

פסלנו 3 תשובות ועל כן תשובה (2) נכונה.

דרך ב' – פתרון מתמטי

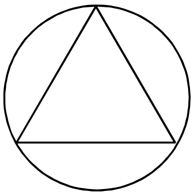


עלינו למצוא את היחס $\frac{R}{r}$. לשם כך, ננסה לקשר בין הרדיוסים של המשולשים. נעביר אנך מנקודה O למשיק AE (רדיוס מאונך למשיק בנקודת ההשקה). לשם נוחות ההסבר נסמן אותו באות G. OG הוא רדיוס במעגל הקטן, כלומר r. כעת נמתח את קו OA שהוא רדיוס במעגל הגדול, R.

נתמקד במשולש AOG. על מנת ללמוד על יחסי הצלעות שלו, ננסה להבין את גדלי הזוויות. כאמור, זווית $\sphericalangle AGO$ בת $90°$. זווית $\sphericalangle AOG$ היא חלק ממשולש AOF. משולש זה נראה כמו משולש שווה צלעות. כפי שהסברנו לעיל, במקרה זה ניתן לסמוך על הסרטוט ועל כן ניתן להסיק שזווית $\sphericalangle AOG$ שווה $60°$. כמו כן, מדובר בחלוקה מוכרת של משושה משוכלל. לפיכך, משולש AOG הוא משולש ובו זוויות של $90°$ ו-$60°$. הזווית שלישית תהיה $30°$ ועל כן מדובר במשולש זהב. כידוע, היחס בין היתר (R) לבין הניצב הקטן שמול ה-$30°$ (r) הוא 2 : 1, ולכן $\frac{R}{r} = 2$.

20. תשובה (2) נכונה. שאלה 19 מתוך 20 בפרק.

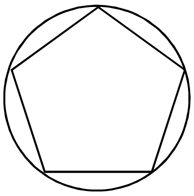
דרך א' – הבנה



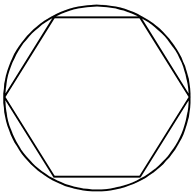
כל מצולע בעל n צלעות יחלק את המעגל בו הוא חסום ל- $n + 1$ שטחים. זאת מפני שכל צלע יוצרת שטח נוסף הכלוא בינה לבין היקף המעגל (על כל n צלעות – n שטחים). בנוסף, ישנו שטח בתוך המצולע עצמו. למשל, למשולש 3 צלעות ולכן הוא יוצר 4 שטחים כמתואר בסרטוט. משמע, כדי לחלק את המעגל ל-7 שטחים, דרוש מצולע בעל 6 צלעות.

דרך ב' – הצבת התשובות

עלינו לקבוע כמה צלעות יש למצולע אשר חסום במעגל ומחלק אותו ל-7 שטחים נפרדים. נבדוק את התשובות ונחפש מצולע אשר עונה על הדרישות.

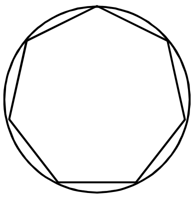


<u>נבדוק את תשובה (1):</u> מצולע בעל 5 צלעות אשר חסום במעגל מחלק אותו ל-6 שטחים – 5 בין המצולע לבין היקף המעגל, ו-1 בתוך המצולע עצמו. התשובה נפסלת.

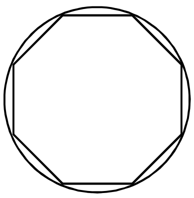


<u>נבדוק את תשובה (2):</u> מצולע בעל 6 צלעות אשר חסום במעגל מחלק אותו ל-7 שטחים – 6 בין המצולע לבין היקף המעגל, ו-1 בתוך המצולע עצמו. **תשובה נכונה.**

טיפ: ברגע שמצאנו תשובה נכונה אין צורך להמשיך לבדוק את שאר התשובות, אך למען שלמות ההסבר נפסול אותן:



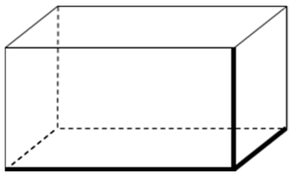
<u>נבדוק את תשובה (3):</u> מצולע בעל 7 צלעות אשר חסום במעגל מחלק אותו ל-8 שטחים – 7 בין המצולע לבין היקף המעגל, ו-1 בתוך המצולע עצמו. התשובה נפסלת.



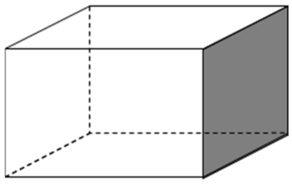
<u>נבדוק את תשובה (4):</u> מצולע בעל 8 צלעות אשר חסום במעגל מחלק אותו ל-9 שטחים – 8 בין המצולע לבין היקף המעגל, ו-1 בתוך המצולע עצמו. התשובה נפסלת.

תלת-ממד

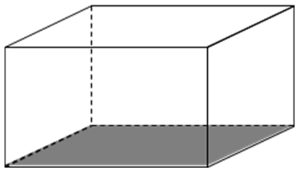
מקצוע - "צלע" של גוף תלת ממדי.
מקצוע נמדד ביחידות אורך, כגון ס"מ, מטר וכדומה.



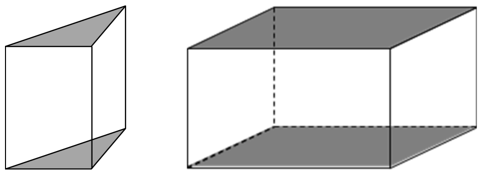
פאה - צד, דופן של גוף.
בעזרת הפאות אנו מחשבים את שטח הפנים של הגוף.



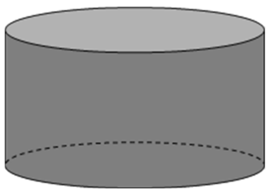
בסיס - הפאה התחתונה של הגוף.



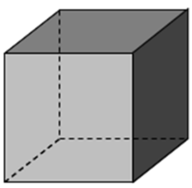
מנסרה - גוף תלת-ממדי ששני הבסיסים שלו (התחתון והעליון) זהים.



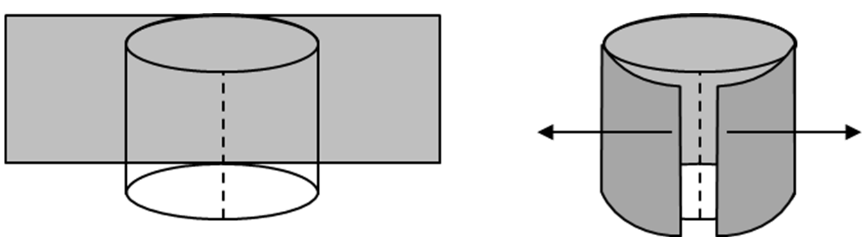
נפח - תכולה של גוף, קיבול של גוף, תפיסת מקום בחלל.
נפח נמדד ביחידות כגון סמ"ק (סנטימטר מעוקב).



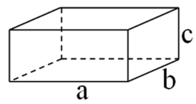
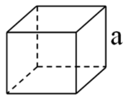
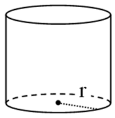
שטח פנים - שטח הגוף מכל הכיוונים (השטח של כל הפאות).
שטח הפנים נמדד ביחידות שטח, כגון סמ"ר (סנטימטר רבוע).



שטח מעטפת - שטח הפנים של גוף, ללא הבסיס העליון והתחתון.
שטח המעטפת הוא בעצם השטח ש"עוטף" את הגוף מהצדדים.



נוסחאות תלת-ממד

	תיבה	קובייה	גליל
			
נפח	abc	a^3	$\pi r^2 \cdot h$
שטח מעטפת	$(2a+2b)c$ או $2ac+2bc$	$4a^2$	$2\pi r \cdot h$
שטח פנים	$2(ab+ac+bc)$ או $2ab+2ac+2bc$	$6a^2$	$2\pi rh + 2\pi r^2$

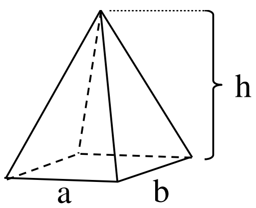
נפח מנסרה = שטח הבסיס * גובה

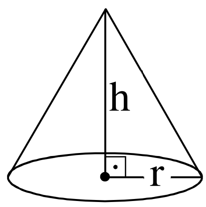
שטח מעטפת = היקף הבסיס * גובה

* השטח של הפאות שעוטפות את הגוף - אפשר לחשב את שטחי פאות ולחבר)

שטח פנים = שטח מעטפת + 2 בסיסים

נפח גוף מחודד שווה לנפח מנסרה חלקי 3





נפח פירמידה = $\frac{a\cdot b\cdot h}{3}$

נפח חרוט= $\frac{\pi r^2\cdot h}{3}$

קוביות בתיבה

כאשר מכניסים קוביות לתיבה, יש להשוות ממד לממד ולא נפח לנפח.

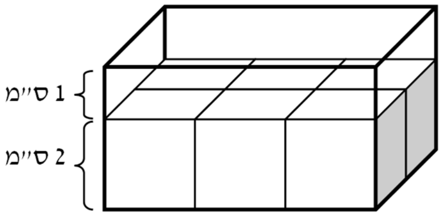
דוגמה:

כמה קוביות שמקצוען 2 ס״מ ניתן להכניס לתוך תיבה שמקצועותיה הם 3 ס״מ, 4 ס״מ ו-6 ס״מ?

פתרון -

נפח התיבה שווה ל-72 סמ״ק ונפח הקובייה שווה ל-8, ולכן נראה כי ניתן להכניס לתיבה 9 קוביות, אך אין זה כך.

נביט בסרטוט הבא:



ניתן לראות כי ניתן להכניס לתיבה רק 6 קוביות.

נבדוק כמה קוביות נכנסות בכל ממד ונכפול.

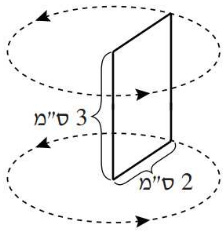
ברוחב (6) נכנסות 3 קוביות, באורך (4) נכנסות 2 קוביות ובגובה (3) נכנסת קובייה אחת ← $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

הערה: כאשר מוזגים נוזל לתוך גוף כלשהו הנוזל ממלא את הגוף בצורה אחידה.

תרגול שאלות מבחינות אמת

.1 סובבו מלבן סביב צלעו הארוכה סיבוב שלם (ראו סרטוט).

מה נפח הגוף שנוצר עקב סיבוב זה (בסמ"ק)?



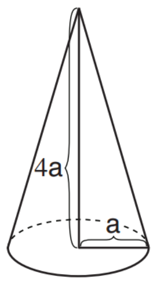
(1) 6π

(2) 8π

(3) 12π

(4) 16π

.2 מה נפח החרוט שבסרטוט?



(1) $\frac{4}{3}\pi a^3$

(2) $12\pi a^3$

(3) $3\pi a^2$

(4) $4\pi a^3$

.3 נתונה תיבה שנפחה 45 סמ"ק.
שתיים מפאות התיבה הן ריבועים שאורך צלעם 3 ס"מ, וארבע הפאות האחרות הן מלבנים.

מה השטח של כל פאה מלבנית (בסמ"ר)?

(1) $3\sqrt{5}$

(2) $5\sqrt{3}$

(3) 15

(4) 25

.4 מגליל חותכים חרוט שבסיסו הוא בסיס הגליל וגובהו כגובה הגליל.

$$\frac{\text{נפח החרוט}}{\text{נפח שארית הגליל}} = ?$$

(1) 1

(2) $\frac{1}{2}$

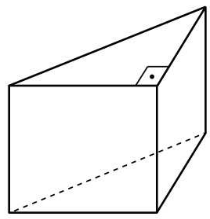
(3) $\frac{3}{5}$

(4) $\frac{1}{4}$

פתרתי ____________ שאלות ב ____________ דקות, ____________ תשובות נכונות

5. בסרטוט שלפניכם מנסרה ישרה שהיא חצי מקובייה שאורך מקצועה 1 ס"מ.

מה שטח הפנים של המנסרה (בסמ"ר)?



(1) $3+\sqrt{2}$

(2) $3\frac{1}{2}$

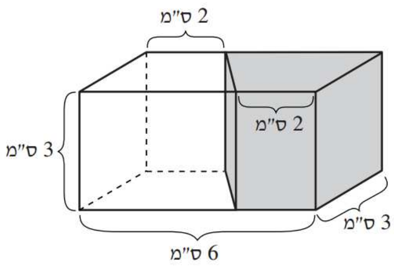
(3) 5

(4) $6-2\sqrt{2}$

---

6. בסרטוט שלפניכם תיבה.
התיבה חולקה לשני חלקים (כהה ובהיר) כמתואר בסרטוט.

מה נפח החלק הכהה (בסמ"ק)?



(1) 24

(2) 27

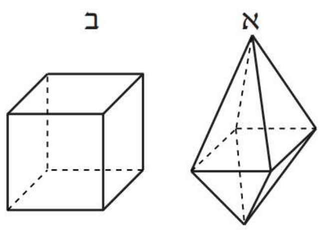
(3) 32

(4) 36

---

7. מקצוע בגוף תלת-ממדי הוא הקטע הנוצר ממפגש שתי פאות.
בסרטוט שלפניכם שני גופים: גוף א בנוי מ-2 פירמידות מרובעות בעלות בסיס משותף, וגוף ב הוא קובייה.

$$\frac{\text{מספר המקצועות בגוף א}}{\text{מספר המקצועות בגוף ב}} = ?$$



(1) 1

(2) $\frac{1}{2}$

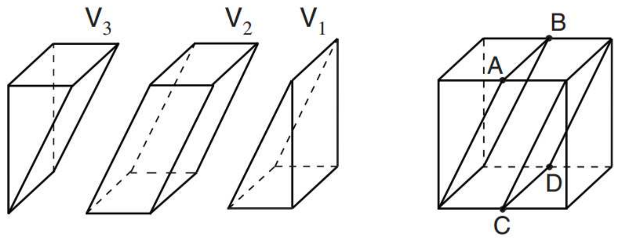
(3) $\frac{3}{2}$

(4) $\frac{2}{3}$

פתרתי ___________ שאלות ב ___________ דקות, ___________ תשובות נכונות

8. בקובייה שבסרטוט, הנקודות A, B, C ו-D הן אמצעי מקצועות.
חילקו את הקובייה לשלושה חלקים כבסרטוט. V_1, V_2, V_3 הם נפחי החלקים שנוצרו.

$$\frac{V_1+V_3}{V_2}=?$$



(1) 1

(2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(3) $\frac{1}{3}$

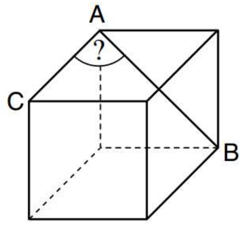
(4) $\frac{1}{4}$

---

9. בסרטוט שלפניכם קובייה. AB הוא אלכסון של אחת מפאות הקובייה.

לפי נתון זה ונתוני הסרטוט,

$\sphericalangle BAC=?$



(1) $45°$

(2) $60°$

(3) $75°$

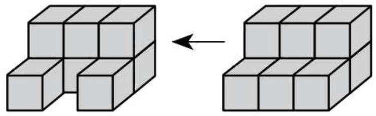
(4) $90°$

---

10. ממבנה המורכב מ-9 קוביות זהות הוציאו קובייה אחת כבסרטוט.

נתון: נפח כל קובייה הוא 1 סמ"ק.

בכמה סמ"ר גדל שטח הפנים של המבנה לאחר הוצאת הקובייה?



(1) 0

(2) 2

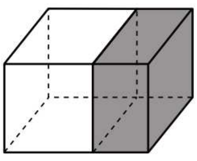
(3) 3

(4) 6

---

11. בסרטוט שלפניכם תיבה שאורכי מקצועותיה 5 ס"מ, 4 ס"מ ו-3 ס"מ.
אמיר חתך חלק מהתיבה (החלק הכהה בסרטוט), ונשארה בידו תיבה שצורת אחת מפאותיה ריבוע (התיבה הבהירה בסרטוט).

מה הנפח **הגדול ביותר** האפשרי של התיבה הבהירה (בסמ"ק)?



(1) 72

(2) 48

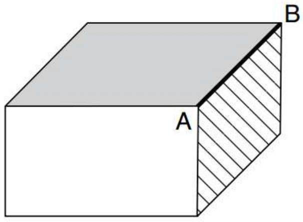
(3) 30

(4) 45

פתרתי ____________ שאלות ב ____________ דקות, ____________ תשובות נכונות

12. בסרטוט שלפניך תיבה.
מכפלת שטח הפאה המקווקוות (בסמ"ר) בשטח הפאה הכהה (בסמ"ר) שווה ל-120.
נפח התיבה 80 סמ"ק.

מה אורך המקצוע המודגש AB (בס"מ)?



(1) $\frac{3}{2}$

(2) 2

(3) $\frac{7}{2}$

(4) 4

---

13. נתונים גלילים שרדיוס בסיסיהם 1 ס"מ וגובהם 5 ס"מ.

כמה גלילים כאלה **לכל היותר** אפשר להכניס לתוך קובייה שאורך מקצועה 10 ס"מ?

(1) 50

(2) 100

(3) 150

(4) 200

---

14. גליל שגובהו 10 ס"מ ושטח בסיסו 4π סמ"ר נחתך במקביל לבסיסו ל-2 גלילים,
שגובה כל אחד מהם 5 ס"מ.

מה ההפרש (בערך מוחלט) בין שטח הפנים של הגליל המקורי לבין סכום שטחי הפנים של הגלילים שנוצרו ממנו?

(1) 10π סמ"ר

(2) 20π סמ"ר

(3) 5π סמ"ר

(4) 8π סמ"ר

---

15. סיגל קנתה מחק בצורת תיבה שאורכו 2 ס"מ, רוחבו 1 ס"מ וגובהו $1\frac{1}{2}$ ס"מ,
והשתמשה בו x ימים, עד שנגמר.
בכל יום קטָן המחק ב-$\frac{1}{9}$ סמ"ק לפחות.

מה הטווח המדויק של x?

(1) לפחות 18

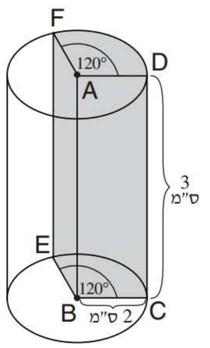
(2) לפחות 27

(3) לכל היותר 18

(4) לכל היותר 27

---

16. בסרטוט שלפניכם גליל. A ו-B הם מרכזי בסיסיו.
ABCD ו-ABEF הם מלבנים המאונכים לבסיסי הגליל.



לפי נתונים אלה והנתונים שבסרטוט,
מה נפח הגוף הכהה (בסמ"ק)?

(1) 10π

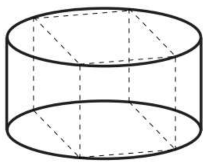
(2) 8π

(3) 6π

(4) 4π

---

17. בסרטוט שלפניכם גליל שרדיוס בסיסו r. בתוך הגליל מונחת קובייה.
הפאה העליונה של הקובייה חסומה על ידי הבסיס העליון והפאה התחתונה חסומה על ידי הבסיס התחתון של הגליל.



$$\frac{\text{נפח הקובייה}}{\text{נפח הגליל}} = ?$$

(1) $\frac{r}{\pi}$ (2) $\frac{2}{\pi}$ (3) $\frac{r}{\sqrt{2}\pi}$ (4) $\frac{\sqrt{2}}{\pi}$

---

18. שני גלילים זהים שרדיוס בסיסיהם 2 ס"מ וגובהם 10 ס"מ הוכנסו לתוך תיבה.
מה, לכל הפחות, נפח התיבה (בסמ"ק)?

(1) 100

(2) 240

(3) 320

(4) 80

---

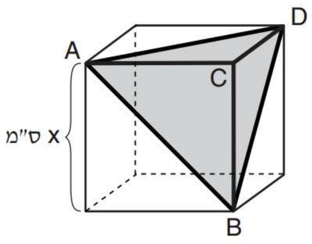
19. נפח קובייה (בסמ"ק) שווה ל-$\frac{1}{7}$ מאורך מקצועה (בס"מ).
מה שטח אחת מפאות הקובייה (בסמ"ר)?

(1) $\frac{1}{7}$ (2) $\sqrt{7}$ (3) $\frac{1}{49}$ (4) $\frac{6}{\sqrt{7}}$

פתרתי ____________ שאלות ב ____________ דקות, ____________ תשובות נכונות

20. בסרטוט שלפניכם קובייה שאורך מקצועה x ס"מ.

מה נפח הפירמידה ABCD (בסמ"ק)?



(1) $\frac{x^3}{6}$

(2) $\frac{x^3}{9}$

(3) $\frac{x^3}{3}$

(4) $\frac{x^3}{4}$

פתרתי ___________ שאלות ב ___________ דקות, ___________ תשובות נכונות

תשובות

שאלה	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
תשובה	3	1	3	2	1	2	1	1	4	1

שאלה	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
תשובה	2	1	1	4	4	4	2	3	1	1

פתרתי 20 שאלות - ______________ נכונות, ______________ אחוזי הצלחה

1. תשובה (3) נכונה. שאלה 3 מתוך 20 בפרק.

סובבו מלבן כך שציר הסיבוב הוא אורכו. כתוצאה מכך, נוצר גליל שגובהו שווה לאורך המלבן – 3 ס"מ, ורדיוס בסיסו הוא רוחב המלבן – 2 ס"מ. נחשב את נפח הגוף שנוצר לפי הנוסחה לחישוב נפח גליל:

$$\pi r^2 h = \pi \cdot 2^2 \cdot 3 = 12\pi$$

---

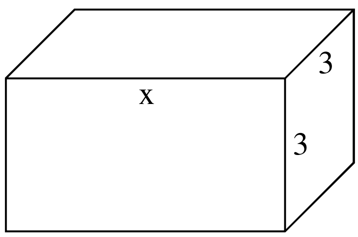
2. תשובה (1) נכונה. שאלה 6 מתוך 20 בפרק.

רדיוס בסיס החרוט הוא a וגובהו 4a. נחשב את נפחו לפי הנוסחה לחישוב נפח חרוט:

$$\frac{\text{גובה} \cdot \text{שטח הבסיס}}{3} = \frac{\pi a^2 \cdot 4a}{3} = \frac{4}{3}\pi a^3$$

---

3. תשובה (3) נכונה. שאלה 6 מתוך 20 בפרק.



נתונה תיבה בעלת שתי פאות ריבועיות וארבע פאות מלבניות. מאחר שבתיבה שתי פאות נגדיות הן בהכרח זהות, אנו יכולים להסיק שהפאות הריבועיות נמצאות זו מול זו. כדי לפתור בקלות, נשרטט תיבה בהתאם לנתונים.

ידוע שאורכן של צלעות הריבועים הוא 3 ס"מ. עלינו למצוא את שטחה של כל פאה מלבנית. כדי למצוא שטח מלבן, עלינו לדעת מה אורכו ורוחבו. צלע הריבוע מהווה למעשה את רוחב המלבן ולכן כל שנותר לנו לעשות הוא למצוא את אורכו. נסמן אורך זה ב-x.

נתון שנפח התיבה 45 סמ"ק. נפח התיבה הוא מכפלת כל ממדיה. ידוע לנו ששניהם מהם שווים 3 ושאחד שווה x. נתאר קשר זה באמצעות משוואה:

$3 \cdot 3 \cdot x = 45$
$9 \cdot x = 45$
$x = 5$

כלומר, שטחו של כל מלבן הוא 15 סמ"ר $(3 \cdot 5)$.

---

4. תשובה (2) נכונה. שאלה 6 מתוך 20 בפרק.

דרך א – יחס נפחים

נתון גליל, אשר ממנו חותכים חרוט. אנו יודעים שחרוט תמיד מהווה שליש מנפחו של גליל בעל ממדים זהים. ניתן לראות זאת גם על פי הנוסחות לחישוב הנפחים של גופים אלו: נפח גליל הוא $R^2\pi \cdot H$ ונפח חרוט הוא: $\frac{R^2\pi\cdot H}{3}$.

כלומר, נפח החרוט יהיה $\frac{1}{3}$ מנפח הגליל כולו, ולכן נפח שארית הגליל הוא $\frac{2}{3}$ מנפח הגליל כולו $\left(1-\frac{1}{3}\right)$.

ניתן להבין ש-$\frac{1}{3}$ הוא בדיוק חצי מ-$\frac{2}{3}$ ולכן היחס הוא $\frac{1}{2}$. כמו כן, ניתן לחשב:

$$\frac{\text{נפח החרוט}}{\text{נפח שארית הגליל}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1\cdot 3}{2\cdot 3} = \frac{1}{2}$$

דרך ב' – הצבת מספר נוח

נציב מספרים ברדיוס ובגובה של הגופים. נציב $R = 1, H = 3$ (הצבה זו נוחה משום שכך גם נפחו של החרוט הוא מספר שלם). נחשב את הנפחים:

$$\text{נפח הגליל} = 1^2\pi \cdot 3 = 3\pi$$

$$\text{נפח החרוט} = \frac{1^2\pi \cdot 3}{3} = \pi$$

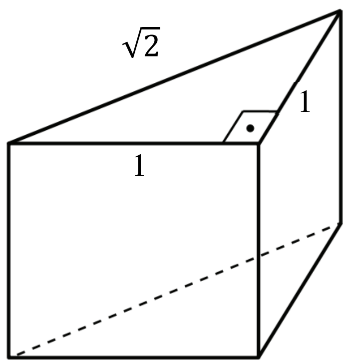
$$\text{נפח שארית הגליל} = 3\pi - \pi = 2\pi$$

נחשב את היחס המבוקש:

$$\frac{\text{נפח החרוט}}{\text{נפח שארית הגליל}} = \frac{2\pi}{\pi} = \frac{1}{2}$$

---

5. תשובה (1) נכונה. שאלה 12 מתוך 20 בפרק.



שטח הפנים של המנסרה מורכב משני ריבועים, שני משולשים (הבסיסים) ומלבן. נאמר לנו שמדובר בחצי מקובייה ולכן שני המשולשים הם למעשה שני חצאי ריבועים ומכאן שיחד הם מרכיבים ריבוע אחד. כלומר, שטח הפנים שווה לשטחם של 3 ריבועים ומלבן.

<u>שטח 3 ריבועים</u>: נתון שאורך מקצועה של הקובייה 1 ס״מ, ולכן שטח כל ריבוע הוא 1 ($1^2 = 1$). כלומר, שטח 3 ריבועים הוא 3 סמ״ר.

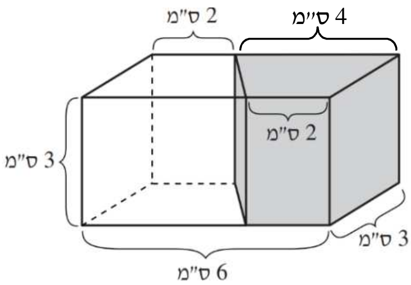
<u>שטח המלבן</u>: רוחב המלבן הוא 1 ס״מ (הגובה של הקובייה). אורך המלבן הוא למעשה אלכסון של ריבוע. כלומר, יתר במשולש כסף שאורך ניצביו 1 ס״מ. כדי להגיע מניצב ליתר במשולש כסף, נכפול את אורך הניצב ב-$\sqrt{2}$. מכאן, שאורך היתר הוא $\sqrt{2}$, וזהו אורך המלבן. על כן, שטח המלבן יהיה:

$$1 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2}$$

נחבר את השטחים ונמצא ששטח הפנים של המנסרה הוא $3 + \sqrt{2}$.

---

6. תשובה (2) נכונה. שאלה 12 מתוך 20 בפרק.



דרך א' – סימטריה
ניתן לראות כי התיבה חולקה לשתי מנסרות זהות, ומכאן שנפח המנסרה המבוקשת שווה למחצית מנפח התיבה.

נפח התיבה שווה למכפלת שלושת ממדיה, ועל כן נפחה 54 סמ"ק ($6 \cdot 3 \cdot 3$).

כלומר, נפח המנסרה שווה 27 סמ"ק $\left(\frac{54}{2}\right)$.

דרך ב' – חישוב נפח מנסרה
החלק הכהה הוא מנסרה שבבסיסה טרפז ישר זווית. נזכור כי נפח של מנסרה שווה לשטח הבסיס כפול הגובה.

גובה המנסרה שווה לגובה התיבה – 3 ס"מ.

כעת, נמצא את שטח הטרפז (בסיס המנסרה):
אורך הבסיס הקטן נתון – 2 ס"מ. אורך הבסיס הגדול שווה לצלע התיבה פחות הבסיס הקטן, כלומר 4 ס"מ ($6 - 2 = 4$). גובה הטרפז שווה לרוחב התיבה – 3 ס"מ.
כידוע, שטח טרפז שווה לסכום הבסיסים כפול גובהו חלקי 2:

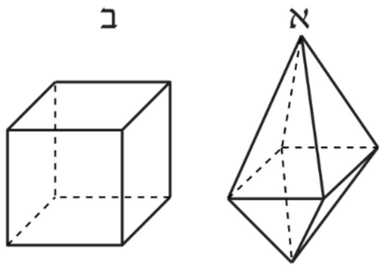
$$\frac{(4+2)\cdot 3}{2} = \frac{6 \cdot 3}{2} = 9$$

כעת נמצא את נפח המנסרה (שטח בסיס · גובה):

$$9 \cdot 3 = 27$$

---

7. תשובה (1) נכונה. שאלה 13 מתוך 20 בפרק.



נמנה את המקצועות בכל גוף.

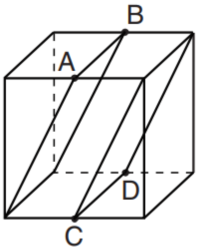
<u>גוף א:</u> 4 מקצועות שנפגשים בקצה של הפירמידה העליונה, 4 מקצועות שנפגשים בקצה של הפירמידה התחתונה, 4 מקצועות בבסיס המשותף שלהן – בסך הכול 12 מקצועות.

<u>גוף ב:</u> 4 מקצועות למעלה (של הפאה העליונה), 4 מקצועות למטה (של הפאה התחתונה), 4 מקצועות ביניהם – בסך הכול 12 מקצועות.

נציב בשאלה שנשאלנו:

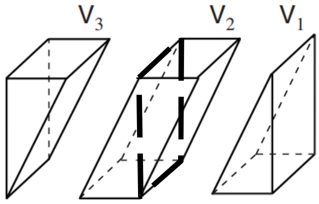
$$\frac{12}{12} = 1$$

.8 תשובה (1) נכונה. שאלה 13 מתוך 20 בפרק.



דרך א' – סימטריה
קובייה היא גוף משוכלל ולכן ניתן להסתמך על הסימטריה שקיימת בה.
כיוון שנתון שהנקודות A, B, C ו-D הן אמצעי הצלעות, ניתן לקבוע כי המנסרות שנוצרו V_1 ו- V_3 זהות אחת לשנייה.

כמו כן, אם "נחתוך" את V_2 באמצע -מAB עד CD, נחלק אותו למעשה לשתי מנסרות הזהות ל-V_1 ול- V_3. ניתן לראות זאת באיור הבא:



אם כן, ניתן לקבוע שהנפח V_2 שווה לפעמיים הנפח V_1 (או פעמיים הנפח V_3).
לכן, בביטוי עליו נשאלנו, הנפח במונה מורכב משני נפחים זהים, וכן הנפח במכנה מורכב מאותם שני נפחים זהים.
לכן, היחס הוא 1.

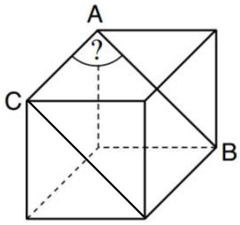
$$\frac{V_1 + V_3}{V_2} = \frac{V_1 + V_1}{2 \cdot V_1} = 1$$

דרך ב' – יחסים
נבחן את הגוף שנפחו V_2. גוף זה הוא גוף ישר, ולכן נפחו שווה לשטח הבסיס כפול גובהו. ננסה להבין איזה חלק מהווה נפח זה מתוך נפח הקובייה כולה (שגם נפחה מחושב באמצעות נוסחה זו).

שטח הבסיס של גוף זה מהווה מחצית משטח הבסיס של הקובייה (נתון שהנקודות A, B, C ו-D הן אמצעי הצלעות). גובהו של גוף זה זהה לגובהה של הקובייה (המרחק בין הפאה העליונה לפאה התחתונה). אם שטח הבסיס קטן פי 2, והגובה זהה, ניתן להסיק ש- V_2 קטן פי 2 מנפח הקובייה.

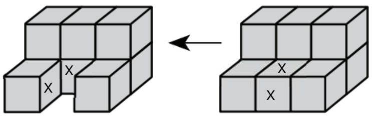
מכאן ש-V_2 מהווה מחצית מנפח הקובייה, והחלקים הנותרים, כלומר $V_1 + V_3$, מהווים את המחצית השנייה. לכן, היחס המבוקש שווה ל-1.

.9 תשובה (4) נכונה. שאלה 14 מתוך 20 בפרק.



הפאות בקובייה מאונכות זו לזו. לפיכך, המקצוע AC מאונך לכל הפאה האחורית בקובייה, ולכן יהיה מאונך לכל קטע בפאה שיוצא מהנקודה A ובפרט לאלכסון AB. לכן $\measuredangle BAC = 90°$.
כדי להבחין בכך, ניתן להעביר אלכסון במקביל ל-AB כך שיווצר מלבן כמתואר בסרטוט.

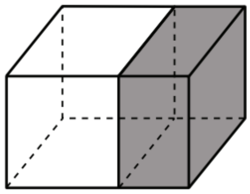
.10 תשובה (1) נכונה. שאלה 14 מתוך 20 בפרק.



הוציאו קובייה מהמבנה המתואר בסרטוט. עלינו לקבוע בכמה סמ"ר גדל שטח הפנים של המבנה לאחר הוצאתה. נבין מה השינוי במספר הפאות המרכיבות את שטח הפנים של המבנה.

לפני הוצאתה, תרמה הקובייה לשטח הפנים 3 פאות – הפאה העליונה שלה, הפאה הקדמית שלה והפאה התחתונה שלה (כמסומן בסרטוט).
לאחר הוצאתה, נחשפו 3 פאות חדשות – בשני הצדדים ובחלק האחורי.
כלומר, אין שינוי במספר הפאות הכולל ולכן שטח הפנים של המבנה לא השתנה.

11. תשובה (2) נכונה. שאלה 15 מתוך 20 בפרק.



אמיר חתך חלק מתיבה שממדיה 5 ס״מ, 4 ס״מ ו-3 ס״מ והותיר תיבה שצורת אחת מפאותיה ריבוע. משמע, אמיר קיצר את אחד הממדים של התיבה, ולאחר החיתוך 2 מתוך 3 ממדי התיבה זהים (שכן אם למשל אורכה ורוחבה יהיו זהים, צורת אחת הפאות תהיה ריבוע). עלינו לקבוע מה הנפח הגדול ביותר האפשרי של התיבה הבהירה שנותרה לאחר החיתוך. נבדוק אילו אפשרויות קיימות עבור ממדי התיבה החדשים, כך ששניים מהם יהיו זהים.

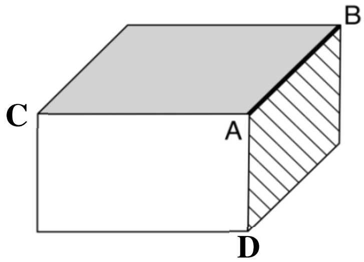
כאמור, אנו שואפים למצוא תיבה שנפחה גדול ככל הניתן ולכן נקטין את המקצוע כמה שפחות. אילו אמיר יקטין את המקצוע שאורכו 5 ס״מ ל-4 ס״מ, הוא ייצור תיבה שממדיה 4 ס״מ, 4 ס״מ ו-3 ס״מ. נפחה של תיבה זו הוא 48 סמ״ק ($3 \cdot 4 \cdot 4$).

אילו אמיר יקטין את המקצוע שאורכו 4 ס״מ ל-3 ס״מ, הוא ייצור תיבה שממדיה 5 ס״מ, 3 ס״מ ו-3 ס״מ. נפחה של תיבה זו הוא 45 סמ״ק ($3 \cdot 3 \cdot 5$).

לא קיימות אפשרויות מתאימות נוספות ולכן תשובה (2) נכונה.

---

12. תשובה (1) נכונה. שאלה 16 מתוך 20 בפרק.



שטח הפאה המקווקוות = $AD \cdot AB$

שטח הפאה הכהה = $AC \cdot AB$

מכפלת שטחים אלו שווה ל-120, ולכן:

$$AD \cdot AB \cdot AC \cdot AB = 120$$

נפח התיבה שווה למכפלת כלל מימדיה של התיבה, ומכאן:

$$AD \cdot AB \cdot AC = 80$$

כעת, משום שהקשרים בין האיברים במשוואות הם פעולות כפל, נחלק את המשוואות זו בזו במטרה לצמצם איברים דומים.

$$\frac{AD \cdot AB \cdot AC \cdot AB}{AD \cdot AB \cdot AC} = \frac{120}{80}$$

נצמצם איברים דומים ונקבל:

$$\frac{\cancel{AD} \cdot \cancel{AB} \cdot \cancel{AC} \cdot AB}{\cancel{AD} \cdot \cancel{AB} \cdot \cancel{AC}} = \frac{120}{80}$$

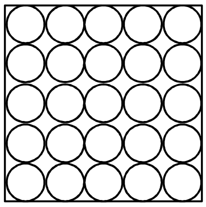
$$AB = \frac{120}{80} = \frac{3}{2}$$

.13 תשובה (1) נכונה. שאלה 16 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – חישוב

אנו צריכים לקבוע כמה גלילים לכל היותר ניתן להכניס לקובייה שאורך מקצועה 10 ס"מ.

ראשית, נבדוק כמה בסיסי גליל נכנסים בבסיס הקובייה:
רדיוס בסיס הגלילים הוא 1 ס"מ; כלומר, קוטר הבסיסים 2 ס"מ. לכן, בבסיס הקובייה ניתן להכניס 5 גלילים לאורך ($10 : 2 = 5$) ו-5 גלילים לרוחב. בסך הכול מדובר ב-25 גלילים ($5 \cdot 5$), כמתואר בסרטוט:



כעת נבדוק כמה קומות של 25 גלילים ניתן להכניס:
גובה הגלילים 5 ס"מ וגובה הקובייה 10 ס"מ. לכן, ייכנסו 2 קומות של גלילים.
בסך הכול 50 גלילים.

דרך ב' – הערכת סדר גודל

נבחין כי התשובות רחוקות אחת מהשנייה, ועל כן ייתכן שהערכת סדר גודל תספיק.

ראשית, נחשב את נפחה של הקובייה. מקצועה של הקובייה הוא 10 ס"מ ועל כן נפחה הוא 1,000 סמ"ק (10^3).

כעת, נחשב את נפחו של כל גליל. נתון כי רדיוס הבסיס הוא 1 ס"מ והגובה 5 ס"מ. נציב בנוסחה:

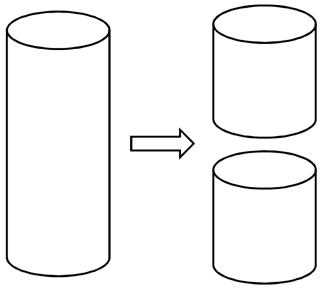
$$r^2\pi \cdot h = 1^2\pi \cdot 5 = 5\pi$$

גודלו של π הוא בערך 3, ועל כן נפחו של כל גליל הוא כ-15 סמ"ק.

עתה נבדוק את התשובות ונפסול כל תשובה שאינה הגיונית. נתחיל מתשובה (2) משום שהיא העגולה ביותר.
לפי תשובה (2), ניתן להכניס 100 גלילים לקובייה. מצאנו שנפחו של כל גליל הוא כ-15 סמ"ק, ומכאן שעל מנת שייכנסו 100 גלילים נפחה של הקובייה צריך להיות כ-1,500 סמ"ק (ואף גבוה מכך משום שהנפח לא מנוצל באופן מושלם ונשארים חללים ריקים). הנפח של הקובייה הוא רק 1,000 סמ"ק, ועל כן תשובה זו אינה הגיונית – מדובר ביותר מדי גלילים. מכאן שגם תשובות (3) ו-(4), הגדולות יותר מ-100, נפסלות גם הן. פסלנו 3 תשובות, ועל כן תשובה (1) נכונה.

14. תשובה (4) נכונה. שאלה 17 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הבנה
אנו מתבקשים לקבוע מה ההפרש בין שטח הפנים (בערך מוחלט) של הגליל המקורי לבין סכום שטחי הפנים של הגלילים שנוצרו ממנו. נתון שהגליל נחתך בדיוק באמצע גובהו ובמקביל לבסיס, כמתואר בסרטוט.



נעמוד על ההבדלים בין שטחי הפנים כדי למצוא את ההפרש ביניהם. שטח הפנים של הגליל המקורי מורכב ממעטפת ומשני בסיסים. המעטפת לא השתנתה, שכן המעטפת המקורית של הגליל נחצתה לשניים, כך שלאחר החיתוך היא עוטפת בדיוק את שני הגלילים שנוצרו.

בבסיסי הגלילים ישנו שינוי. תחילה, לגליל המקורי היו 2 בסיסים, ואילו לאחר חצייתו נוצרו 2 גלילים שלכל אחד מהם 2 בסיסים. כלומר, בסך הכל 4 בסיסים. משמע, שטח הפנים הכולל גדל ב-2 בסיסים ששטח כל אחד מהם 4π, ובסך הכל 8π.

דרך ב' – חישוב מלא
כדי למצוא את ההפרש בין שטח הפנים של הגליל המקורי לבין סכום שטחי הפנים של הגלילים שנוצרו ממנו, נחשב כל אחד מהם.

תחילה נחשב את שטח הפנים של הגליל המקורי: מעטפת הגליל היא מלבנית. רוחבה שווה להיקף המעגל, אותו נבטא כ- $2\pi r$, ואורכה שווה לגובה הגליל – 10 ס"מ. משמע, שטח המלבן הוא $20\pi r$ ($2\pi r \cdot 10$). כמו כן, ידוע ששטח הבסיס הוא 4π. לגליל יש שני בסיסים. משמע, שטח הפנים הכולל של הגליל המקורי הוא $20\pi r + 8\pi$.

נחשב את שטחי הפנים של שני הגלילים שנוצרו. המעטפת של כל אחד מהם היא מלבנית. רוחבה שווה להיקף המעגל – $2\pi r$, ואורכה שווה לגובה הגליל – 5 ס"מ. משמע, שטח המלבן הוא $10\pi r$ ($2\pi r \cdot 5$). כאמור, שטח הבסיס הוא 4π. לכל גליל יש שני בסיסים – בסך הכל 8π. משמע, שטח הפנים של <u>גליל אחד</u> הוא $10\pi r + 8\pi$, ועל כן שטח הפנים של שני הגלילים שנוצרו הוא $20\pi r + 16\pi$
($2 \cdot 10\pi r + 2 \cdot 8\pi$).

כעת ניתן לחשב את ההפרש:

$$20\pi r + 16\pi - (20\pi r + 8\pi) = 8\pi$$

שימו לב, אין צורך לחשב את רדיוס בסיס הגליל. אילו בסוף החישוב היינו מגלים שיש בכך צורך, יכולנו לעשות זאת. למען שלמות ההסבר, נמצא רדיוס זה שטח הבסיס הוא 4π. ניעזר בנוסחה לחישוב שטח מעגל כדי לחלץ את הרדיוס:

$$\pi r^2 = 4\pi$$

נחלק ב-π:

$$r^2 = 4$$
$$r = 2$$

15. תשובה (4) נכונה. שאלה 17 מתוך 20 בפרק.

סיגל השתמשה במחק שקנתה במשך x ימים. בכל יום המחק קטן ב-$\frac{1}{9}$ סמ"ק לפחות. עלינו לקבוע מה הטווח של x.
תחילה, נבין מה נפחו ההתחלתי של המחק: ממדיו הם 2 ס"מ, 1 ס"מ ו-$1\frac{1}{2}$ ס"מ:

$$2 \cdot 1 \cdot 1\frac{1}{2} = 3$$

נפחו של המחק 3 סמ"ק. סיגל השתמשה ב-$\frac{1}{9}$ סמ"ק לפחות בכל יום. כלומר, יכול להיות מצב בו סיגל השתמשה ב-3 סמ"ק ואז המחק הספיק לה ליום אחד בלבד (x = 1). כמו כן, ייתכן שסיגל השתמשה ב-6 סמ"ק ביום ובמקרה זה המחק הספיק לה לחצי יום בלבד $\left(x = \frac{1}{2}\right)$, וכך הלאה. משמע, x יכול להיות קטן ככל שנרצה, ולכן אין משמעות לתשובות "לפחות". תשובות (1) ו-(2) נפסלות.

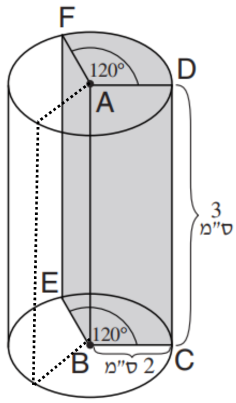
נבדוק כמה זמן לכל היותר תוכל סיגל להשתמש במחק. לשם כך, היא תצטרך להשתמש בכמה שפחות בכל יום. נניח שהיא השתמשה בדיוק ב-$\frac{1}{9}$ סמ"ק ביום, כי זה המינימום. כדי למצוא את מספר הימים שבמהלכם השתמשה סיגל במחק, נחלק את נפחו בשימוש היומי:

$$\frac{3}{\frac{1}{9}} = 3 \cdot 9 = 27$$

במקרה זה, המחק יספיק לה ל-27 ימים. לפיכך, x הוא לכל היותר 27.

16. תשובה (4) נכונה. שאלה 17 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – סימטריה



אנו מתבקשים לחשב נפח של חלק מתוך גליל. נחשב תחילה את נפח הגליל כולו, ולאחר מכן נמצא את החלק שהגוף הכהה מהווה מתוכו. נמצא את נפח הגליל לפי הנוסחה לחישוב נפח גוף ישר:

גובה · שטח הבסיס

הבסיס של הגליל הוא מעגל שרדיוסו 2 ס"מ (נתון אורכו של רדיוס BCבסרטוט), ולכן שטחו יהיה:

$$2^2\pi = 4\pi$$

גובה הגליל נתון גם הוא על גבי הסרטוט, ואורכו 3 ס"מ. לכן, נפח הגליל כולו שווה ל-12π סמ"ק.

$$4\pi \cdot 3 = 12\pi$$

כעת, נבין איזה חלק מהווה הגוף הכהה מהגליל כולו. ניתן לראות כי בבסיסי הגליל, הזווית המרכזית של הגזרה הכהה היא זווית בת $120°$. שטח גזרה של זווית מרכזית $120°$ מהווה $\frac{1}{3}$ משטח המעגל $\left(\frac{120°}{360°} = \frac{1}{3}\right)$. לכן, גם נפח הגוף הכהה מהווה $\frac{1}{3}$ מנפח הגליל.

נחשב שליש מנפח הגליל:

$$\frac{1}{3} \cdot 12\pi = 4\pi$$

טיפ: גם אם איננו יודעים למצוא את חלקו המדויק שמהווה הגוף הכהה מהגליל, ניתן לקבוע יחסית בקלות, מהסתכלות על הסרטוט, כי מדובר בפחות מחצי ממנו. מצאנו שנפח הגליל כולו הוא 12π, ועל כן נצפה שהנפח של הגוף הכהה יהיה פחות ממחצית מנפח זה, כלומר פחות מ-6π. רק תשובה (4) מתאימה.

דרך ב' – חישוב ישיר של נפח הגוף הכהה

הגוף הכהה איננו גוף שאנו מכירים אמנם, אך ניתן לזהות כי גם הוא גוף ישר (שני בסיסיו זהים זה לזה). על כן, גם את נפחו ניתן לחשב לפי הנוסחה לחישוב נפח גוף ישר: *גובה · שטח הבסיס*

<u>שטח בסיס הגוף</u>: שטח זה מהווה גזרה מתוך מעגל. נמצא תחילה את שטח המעגל כולו. רדיוסו של המעגל הוא 2 ס"מ (נתון אורכו של רדיוס BC בסרטוט), ולכן שטחו יהיה 4π ($2^2\pi$).

הזווית המרכזית של הגזרה הכהה היא זווית בת $120°$. שטח גזרה של זווית מרכזית $120°$ מהווה $\frac{1}{3}$ משטח המעגל $\left(\frac{120°}{360°} = \frac{1}{3}\right)$, ועל כן שטח בסיס הגוף הכהה הוא שליש מהמעגל – $\frac{4\pi}{3}$.

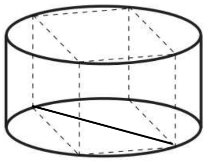
<u>גובה הגוף</u>: נתון על גבי הסרטוט, ואורכו 3 ס"מ.

לכן, נפח הגוף הכהה שווה:

$$\text{שטח הבסיס} \cdot \text{גובה} = \frac{4\pi}{3} \cdot 3 = 4\pi$$

17. תשובה (2) נכונה. שאלה 18 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – פתרון מלא



נחשב את היחס בין נפח הקובייה לנפח הגליל. נתון שרדיוס בסיס הגליל הוא r. כדי לחשב את נפח הקובייה, עלינו לדעת מה אורך מקצועה, אז ננסה לקשר בין רדיוס בסיס הגליל לבין צלע הריבוע: אלכסון הריבוע הוא קוטר במעגל ולכן אורכו 2r.

כידוע, אלכסון בריבוע גדול פי $\sqrt{2}$ מהצלע (יתר במשולש כסף), לכן אורך הניצב הוא $r\sqrt{2}$ $\left(\frac{2r}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}\sqrt{2}r}{\sqrt{2}}\right)$. אורך הניצב הוא גם מקצוע בקובייה. נחשב את נפחה:

$$\left(r\sqrt{2}\right)^3=r^3\sqrt{2}^3$$

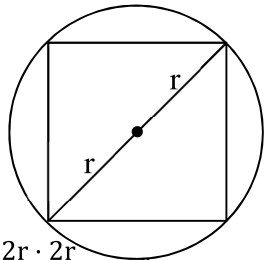
כדי לחשב שטח גליל, אנו צריכים לדעת מה שטח בסיסו ומה גובהו. רדיוס הבסיס הוא r ועל כן שטחו πr^2. גובה הגליל שווה לאורך מקצוע הקובייה – $r\sqrt{2}$. נחשב את נפחו:

$$r\sqrt{2}\cdot\pi r^2=\pi r^3\sqrt{2}$$

כעת נמצא את היחס המבוקש:

$$\frac{r^3\sqrt{2}^3}{\pi r^3\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}^2}{\pi}=\frac{2}{\pi}$$

דרך ב' – יחס שטחי הבסיסים



אנו מתבקשים למצוא את היחס בין נפח הקובייה לנפח הגליל. כידוע, נפח גוף ישר שווה למכפלת שטח הבסיס בגובה. מאחר שהגבהים של שני הגופים זהים, היחס בין הנפחים שלהם שווה ליחס בין שטחי הבסיסים שלהם (שכן הגבהים יצטמצמו כאשר נחלק את הנפחים זה בזה).

רדיוס בסיס הגליל הוא r ולכן שטחו πr^2. כעת נחשב את שטח הריבוע שבבסיס הקובייה. אלכסון הריבוע הוא גם קוטר במעגל, כמתואר בסרטוט. משמע, אורך האלכסון הוא 2r. שטח ריבוע שווה למחצית מכפלת האלכסונים. נחשב זאת:

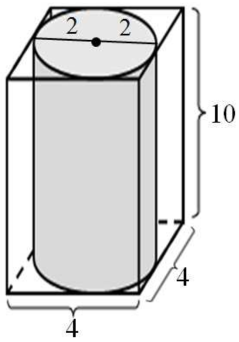
$$\frac{2r\cdot 2r}{2}=2r^2$$

משמצאנו את שטחי הבסיסים של הגופים, ניתן למצוא את היחס בין נפחיהם. נסמן את גובהם ב-h:

$$\frac{h\cdot 2r^2}{h\cdot\pi r^2}=\frac{2}{\pi}$$

18. תשובה (3) נכונה. שאלה 19 מתוך 20 בפרק.

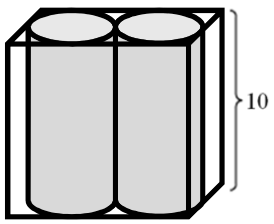
דרך א'
עלינו למצוא את נפחה המינימלי של תיבה שאליה הוכנסו שני גלילים שרדיוס בסיסיהם 2 ס"מ וגובהם 10 ס"מ. נוכל לחשב את נפחה של תיבה המתאימה לגליל אחד, ולכפול את הנפח פי 2 כדי שיתאים לשני גלילים. למען נוחות ההסבר, נסרטט מצב זה.



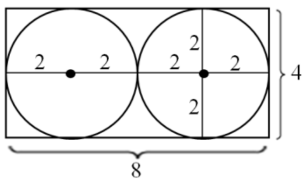
רדיוס הבסיס הוא 2 ס"מ ועל כן קוטרו הוא 4 ס"מ. כלומר, ניתן להכניס את הגליל לתיבה שבבסיסה ריבוע, אשר אורך צלעו 4 ס"מ. גובה התיבה יהיה שווה לגובה הגליל – 10 ס"מ.

לסיכום, ממדי התיבה המתאימה לגליל <u>אחד</u> הם: 4, 4 ו-10 – נפחה הוא 160 סמ"ק ($10 \cdot 4 \cdot 4$). נפחה של תיבה המתאימה <u>לשני</u> גלילים הוא 320 סמ"ק ($160 \cdot 2$).

דרך ב'
עלינו למצוא את נפחה המינימלי של תיבה שאליה הוכנסו שני גלילים שרדיוס בסיסיהם 2 ס"מ וגובהם 10 ס"מ. נסרטט מצב זה.



תחילה, נתמקד בבסיסה של התיבה. ניתן לראות כי רוחבו של הבסיס שווה לקוטר המעגל, כלומר ל-4, וכי אורכו של הבסיס מורכב משני קטרים, ועל כן אורכו 8. מכאן, ששטחו של בסיס התיבה הוא 32 ($4 \cdot 8$).



גובה התיבה יהיה שווה לגובה הגליל – 10 ס"מ. נפח תיבה שווה לשטח הבסיס כפול הגובה, ומכאן שנפחה 320 סמ"ק ($10 \cdot 32$).

---

19. תשובה (1) נכונה. שאלה 20 מתוך 20 בפרק.

נציב בתוך אורך המקצוע - a. כידוע, נפח קובייה שווה לאורך המקצוע שלה בחזקת 3 - a^3.
נתון כי נפח הקובייה שווה ל-$\frac{1}{7}$ מאורך מקצועה, נכתוב זאת באופן אלגברי:

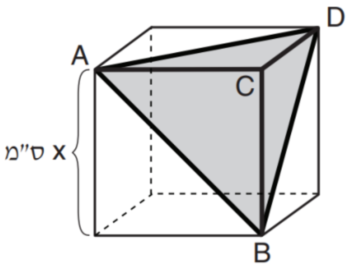
$$a^3 = \frac{1}{7}a$$

נצמצם ב-a:

$$a^2 = \frac{1}{7}$$

עלינו למצוא את שטח אחת מפאות הקובייה - כלומר, עלינו למצוא את a^2, כפי שמצאנו לעיל.

.20 תשובה (1) נכונה. שאלה 20 מתוך 20 בפרק.



דרך א' – פתרון מלא

כדי לחשב נפח פירמידה, עלינו למצוא את שטח בסיסה ואת אורך הגובה לבסיס. לשם כך נבחר כבסיס את אחת מפאות הפירמידה שניתן לחשב בקלות את שטחה, למשל ACD. טעות נפוצה היא לבחור את הפאה ABD כבסיסה של הפירמידה, אך אין לנו דרך פשוטה למצוא את שטחה או את אורך הגובה לפאה זו.

בסיס זה (ACD) שווה למחצית משטחה של פאת הקובייה, שהרי הוא נוצר מהעברת אלכסון בריבוע אשר מחלק אותו לשני משולשים זהים.

כלומר, שטח הבסיס הוא $\frac{x^2}{2}$.

גובה הפירמידה, כלומר המרחק מקדקוד B לבסיס (המקצוע BC), שווה לאורך מקצועה של הקובייה – x.

כעת נחשב את נפח הפירמידה:

$$\frac{\text{שטח הבסיס} \cdot \text{גובה}}{3} = \frac{\frac{x^2}{2} \cdot x}{3} = \frac{\frac{x^3}{2}}{3}$$

ניעזר בקשתות:

$$\frac{\frac{x^3}{2}}{\frac{3}{1}} = \frac{x^3 \cdot 1}{3 \cdot 2} = \frac{x^3}{6}$$

דרך ב' – יחסים/הבנה

נפח הקובייה כולה הוא x^3. מהתבוננות בתשובות ניתן להבין כי עלינו למצוא איזה חלק מהווה הפירמידה מתוך הקובייה. ראשית, נבין שאם בסיסה של הפירמידה היה פאה שלמה של הקובייה, נפחה של הפירמידה היה שליש מנפח הקובייה $\left(\frac{x^3}{3}\right)$. זאת, משום שכאשר יש גוף מחודד וגוף ישר בעלי אותו הבסיס ואותו הגובה, נפח הגוף המחודד מהווה שליש מנפח הגוף הישר. כעת, משום שבסיסה של הפירמידה הנתונה הוא רק חצי משטח הפאה של הקובייה, ולא פאה שלמה, נבין כי נפחה של הפירמידה יהיה מחצית ממה שמצאנו, כלומר שישית מנפח הקובייה כולה - $\frac{x^3}{6}$.

דמיון

צורות דומות הן צורות אשר זהות בצורתן אך שונות בגודלן.
חשוב להבין שמדובר באותה צורה בדיוק, פשוט בגודל אחר (דמיינו מקרן שקופיות שמרחיקים אותו מהמסך והצורה גדלה).

יחס קווי

קווים מתאימים - הכוונה היא ל"אותו סוג" של קו.
לדוגמה, כאשר אנו משווים בין שני מעגלים, נשווה בין רדיוס לרדיוס, ולא בין רדיוס לקוטר.

יחס קווי - היחס הקיים בין שני קווים מתאימים בצורות דומות.
היחס הקווי הוא בעצם **פי כמה גדולה צורה אחת מהשנייה**.
היחס הקווי בין שתי צורות דומות הוא תמיד קבוע, ויהיה שווה בין כל זוג קווים מתאימים שנשווה ביניהם.

שימו לב! יחס קווי אינו מתקיים רק בין צלעות, אלא בין כל שני קווים מתאימים - למשל גבהים, תיכונים, אלכסונים ואף הפרשים בין צלעות.
למשל, אם קיימות שתי צורות דומות, שאחת מהן גדולה "פי 2" מהצורה השנייה, אז היחס הקווי בין שתי הצורות יהיה $1:2$, וכל אחת מצלעות הצורה הגדולה תהיה גדולה פי 2 מהצלע המתאימה לה בצורה הקטנה (כנ"ל לגבי אלכסונים, גבהים, תיכונים וכל קו אחר).

יחס שטחים

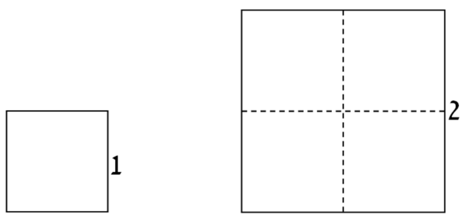
כאשר ידוע לנו היחס הקווי בין שתי צורות דומות, ניתן לדעת מה יחס השטחים בין שתי הצורות ללא כל חישוב.

$$\textbf{יחס שטחים} = (\textbf{יחס קווי})^2$$

נראה זאת באמצעות שני ריבועים שהיחס הקווי ביניהם הוא $1:2$:

שטח הריבוע הקטן הוא 1, ושטח הריבוע הגדול הוא 4 -
בדיוק כמו היחס הקווי בריבוע:

$$(1:2)^2 \quad \Rightarrow \quad 1:4$$

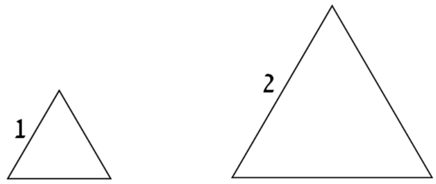


דמיון בצורות משוכללות

כל הצורות המשוכללות מאותו סוג הן בהכרח דומות.

ההבדל היחיד בין הצורות יהיה ה"גודל" שלהן ⇐ היחס הקווי בין הצורות.

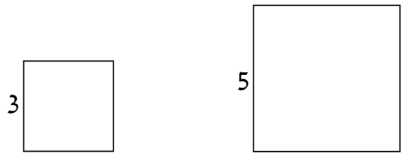
משולש שווה-צלעות



יחס קווי - 2 : 1

יחס שטחים - 4 : 1

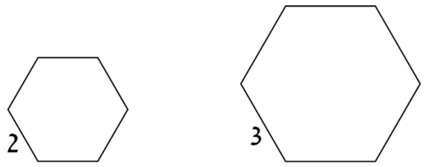
ריבוע



יחס קווי - 5 : 3

יחס שטחים - 25 : 9

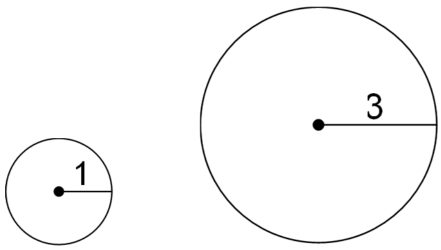
משושה משוכלל



יחס קווי - 3 : 2

יחס שטחים - 9 : 4

מעגל



יחס קווי - 3 : 1

יחס שטחים - 9 : 1

דוגמה:

הגדילו את צלעו של מחומש משוכלל פי 3.

פי כמה גדל היקפו של המחומש?

(1) 6 (2) 2 (3) 3 (4) 9

פתרון -

היחס בין צלע המחומש המקורי לצלע המחומש החדש הוא 1:3.

יחס זה הוא היחס הקווי בין שני המחומשים, והוא זהה בכל הקווים הדומים ביניהם.

מכיוון שהיקף המחומש הוא קו (חיבור של צלעות המחומש), היחס בין היקפי המחומשים זהה ליחס הקווי, וגם הוא יהיה 1:3.

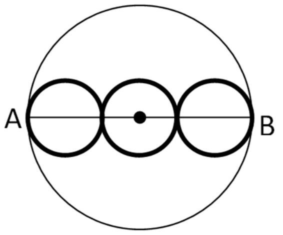
תשובה (3) נכונה.

דוגמה:

במעגל שלפניך AB הוא קוטר.

על הקוטר AB בנו 3 מעגלים חופפים המשיקים זה לזה ולמעגל החיצוני (ראה סרטוט).

נתון: רדיוס המעגל הגדול הוא 5 ס"מ.



על פי נתונים אלה ונתוני הסרטוט,
מה אורכו של הקו המודגש (בס"מ)?

(1) 10π (2) 15π (3) 25π (4) 45π

פתרון -

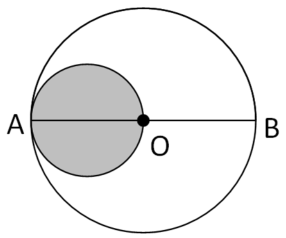
במקום להסתבך עם חישובים של מספרים לא עגולים, נפתור ע"י יחסים.
רדיוס המעגל הגדול גדול פי 3 מרדיוס מעגל קטן, ולכן היחס הקווי בין המעגלים הוא 1:3.
<u>היקף הוא קו</u>, ולכן היקף מעגל קטן שווה לשליש מהיקף המעגל הגדול, והיקף שלושת המעגלים הקטנים שווה להיקף המעגל הגדול $\Leftarrow$ $2\pi r = 2\pi \cdot 5 = 10\pi$

תשובה (1) נכונה.

דוגמה:

במעגל שמרכזו O העבירו קוטר AB.

על הקוטר בנו מעגל נוסף, כך ש-AO הוא קוטר שלו.



על פי נתונים אלה ונתוני הסרטוט,
מה היחס בין השטח הכהה לשטח הלבן?

(1) $2:3$
(2) $1:2$
(3) $1:3$
(4) $3:4$

פתרון -

ראשית, עלינו להבין שמעגלים הם צורות דומות. היחס הקווי בין שני המעגלים הוא 1:2 (רדיוס המעגל הקטן שווה למחצית מרדיוס המעגל הגדול), ולכן יחס השטחים ביניהם יהיה שווה ליחס הקווי בריבוע $\Leftarrow$ 1:4.
זאת אומרת, שאם השטח של המעגל הקטן (הכהה) הוא 1, אז שטח המעגל הגדול הוא 4.

אולם, התבקשנו למצוא את היחס בין השטח הכהה לשטח הלבן.
השטח הלבן אינו שווה לשטח המעגל הגדול, אלא לשטח המעגל הגדול פחות שטח המעגל הקטן: $4 - 1 = 3$.
זאת אומרת, שהיחס בין השטח הכהה לשטח הלבן הינו 1:3.

תשובה (3) נכונה.

דמיון בצורות לא משוכללות

בצורות שאינן משוכללות קשה יותר "לראות" את הדמיון ועלינו לוודא זאת על ידי בדיקת היחסים בין הצלעות המתאימות.

<u>**מלבן**</u>

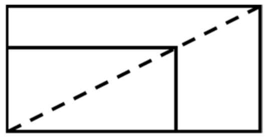
יחס בין אורך לרוחב 2:6 ⇐ 1:3

יחס בין אורך לרוחב 1:3

יחס קווי - 3:6 ⇐ 1:2

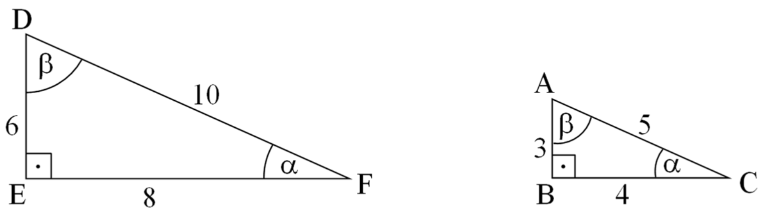
יחס שטחים - 1:4

כאשר קודקוד של מלבן פנימי נמצא על האלכסון של המלבן החיצוני - המלבנים דומים:



צורות לא משוכללות - משולשים

משולשים דומים הם משולשים שכל הזוויות שלהם שוות.
טיפ - די בכך ששתי זוויות יהיו שוות כדי שהמשולשים יהיו דומים.



במשולשים דומים, הצלעות המתאימות הן הצלעות שנמצאות מול אותן זוויות.

יחס הצלעות המתאימות במשולשים דומים הוא שווה.

לדוגמה, יחס הצלעות במשולשים שלהלן הוא 1:2.

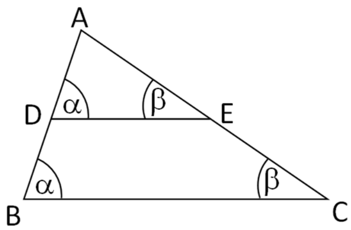
$$\frac{AC}{DF}=\frac{BC}{EF}=\frac{AB}{DE}=\frac{\text{משולש קטן}}{\text{משולש גדול}}$$

שימו לב! גם היחס בין שתי צלעות באותו משולש זהה בין שני המשולשים.
לדוגמה, היחס בין הניצבים במשולש הקטן (3:4) שווה ליחס בין הניצבים במשולש הגדול (6:8).

דמיון משולשים

קו מקביל לבסיס

כאשר מעבירים בתוך המשולש קו מקביל לבסיס, זוויות הבסיס של המשולש הגדול שוות בהתאמה לזוויות הבסיס של המשולש הקטן, ולכן המשולשים דומים.

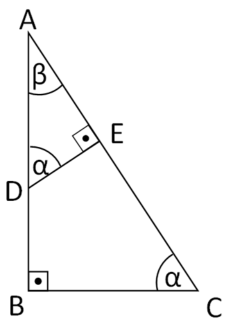


היחס בין הצלעות המתאימות של שני המשולשים זהה:

$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$$

דמיון באלכסון

דמיון באלכסון נוצר כאשר מעבירים במשולש קו **שאינו** מקביל לבסיס, אך יוצר מצב בו זוויות הבסיס של שני המשולשים שוות בהצלבה.

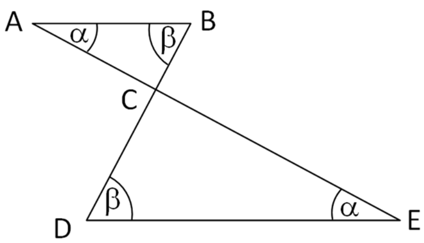


היחס בין הצלעות המתאימות של שני המשולשים זהה:

$$\frac{AD}{AC}=\frac{AE}{AB}=\frac{DE}{BC}$$

שעון חול

שעון חול הוא מצב בו שני קווים מקבילים, ושני ישרים החותכים אותם ויוצרים שני משולשים בצורה המזכירה שעון חול.
מכיוון שהקווים מקבילים, נוצרות זוויות שוות בשני המשולשים, ולכן הם דומים.

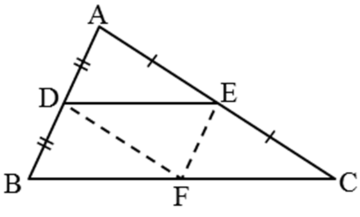


היחס בין הצלעות המתאימות של שני המשולשים זהה:

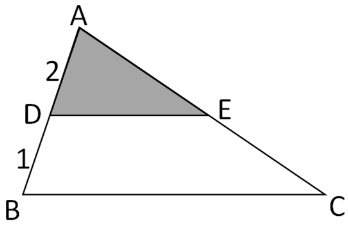
$$\frac{AB}{DE}=\frac{AC}{CE}=\frac{BC}{CD}$$

קטע אמצעים

כאשר נתון משולש עם קטע אמצעים - קטע המחבר את האמצע של שתי צלעות (DE), נחבר את אמצע הצלע השלישית (F), ונקבל 4 משולשים חופפים.



דוגמה:



במשולש ABC העבירו ישר DE המקביל לבסיס BC.

נתון: $AD = 2$ ס"מ , $DB = 1$ ס"מ $DE \parallel BC$.

מה היחס בין השטח הכהה לשטח הלבן?

(1) $4:5$

(2) $4:9$

(3) $3:4$

(4) $1:4$

פתרון -

ראשית, חשוב לשים לב כי היחס הקווי בין המשולשים **אינו** 2:1, מכיוון ש-DB אינה צלע באף אחד מהמשולשים.

כאשר אנו בודקים מהו היחס הקווי, חשוב לשים לב מהן הצלעות המתאימות, והדרך הטובה ביותר לעשות זאת היא לבדוק מיהן הצלעות שנמצאות מול הזוויות השוות בכל אחד מהמשולשים.

במקרה זה, $\sphericalangle E = \sphericalangle C$, הצלעות שמולן הן AD במשולש הקטן ו-AB במשולש הגדול, ולכן היחס הקווי הוא 2:3.

יחס השטחים של המשולשים **שווה ליחס הקווי בריבוע** ← 4:9

אולם עדיין לא סיימנו.

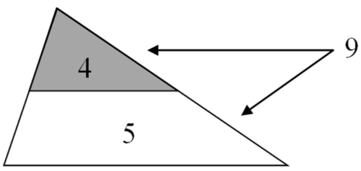
התבקשנו למצוא את היחס בין השטח הכהה <u>לשטח הלבן</u>, ולא בין שטח המשולש הקטן לשטח המשולש הגדול.

נניח ששטח המשולש הקטן שווה ל-4.

על פי יחס השטחים, שטח המשולש הגדול שווה ל-9.

השטח הלבן שווה לשטח המשולש הגדול פחות שטח המשולש הלבן ⇐ $9 - 4 = 5$

היחס בין השטח הכהה לשטח הלבן הוא 4:5.



תשובה (1) נכונה.

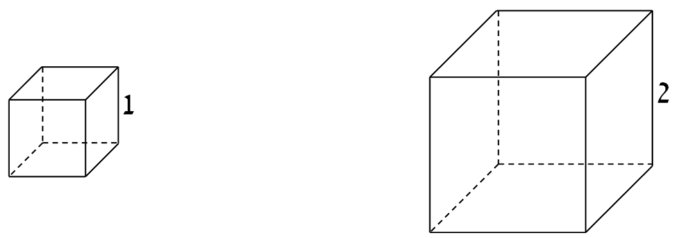
יחס נפחים

כאשר ידוע לנו היחס הקווי בין שתי צורות דומות, ניתן לדעת מה יחס הנפחים בין שתי הצורות.

$$\text{יחס נפחים} = (\text{יחס קווי})^3$$

שימו לב! צורות תלת-מימדיות דומות הן רק צורות שהיחס בין כל המקצועות המתאימים שלהן שווים בהתאמה.

<u>קוביות - צורה משוכללת</u>
(תמיד דומות)



יחס קווי - 1 : 2
יחס שטחים - 1 : 4
יחס נפחים - 1 : 8

<u>גלילים - צורה לא משוכללת</u>
(דומים רק אם קיים יחס זהה גם בין הרדיוסים וגם בין הגבהים)

יחס קווי - 2 : 3
יחס שטחים - 4 : 9
יחס נפחים - 8 : 27

ניתן לראות כי היחס בין הרדיוסים של בסיסי הגלילים הוא 2 : 3, וגם היחס בין גבהי הגלילים הוא 2 : 3 ($4:6 \ \Rightarrow \ 2:3$), ולכן הגלילים דומים.

דוגמה:

שטחה של פאה אחת של קובייה "גדולה" גדול פי 9 משטח פאה אחת של קובייה "קטנה".
כמה קוביות "קטנות" ניתן להכניס לתוך קובייה "גדולה" אחת?

(1) 9 (2) 18 (3) 3 (4) 27

פתרון -

קוביות הן צורות דומות, ולכן יחס השטחים שווה ליחס הקווי בריבוע.

נתון כי יחס השטחים שווה ל-1:9, ולכן היחס הקווי (בין מקצועות הקובייה) הוא 1:3 (השורש של יחס השטחים).

יחס הנפחים בצורות דומות שווה ליחס הקווי בחזקת 3 $\Leftarrow$ 1:27.

מצאנו כי נפח קובייה "גדולה" גדול פי 27 מנפח קובייה "קטנה", ולכן ניתן להכניס לקובייה הגדולה 27 קוביות "קטנות".

תשובה (4) נכונה.

דוגמה:

הגדילו את רדיוס בסיסו של גליל פי 2 ואת גובהו של הגליל הקטינו פי 2.
מה היחס בין נפחו של הגליל המקורי לנפחו של הגליל לאחר השינוי?

(1) 1 : 1 (2) 1 : 2 (3) 1 : 3 (4) 3 : 4

פתרון -

גליל הוא צורה **לא** משוכללת, ולכן לא נוכל להשתמש ביחס נפחים של צורות דומות.
במקרה זה, עלינו להציב את הנתונים בנוסחת הנפח של גליל, ולחשב.

במקום להציב בנוסחה את הנעלמים r ו-h, יהיה קל יותר להציב מספרים.
מכיוון שאנו מתבקשים למצוא את היחס, למספרים שנציב אין משמעות.

גליל מקורי: $r = 1$, $h = 2$
גליל חדש: $r = 2$, $h = 1$

שימו לב כי הצבנו 2 כגובה של גליל המקורי, כדי שיהיה לנו קל יותר לחלק אותו ל-2 בלי לקבל שבר.

נפח גליל מקורי: $\pi r^2 \cdot h = \pi \cdot 1^2 \cdot 2 = 2\pi$
נפח גליל חדש: $\pi r^2 \cdot h = \pi \cdot 2^2 \cdot 1 = 4\pi$

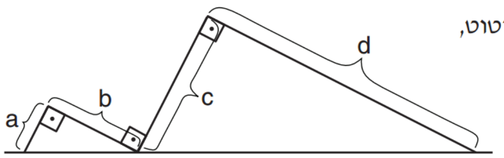
מצאנו כי יחס הנפחים הוא 1:2.

תשובה (2) נכונה.

תרגול שאלות מבחינות אמת

.1 בסרטוט שלפניכם שני משולשים ישרי-זווית המונחים על קו ישר.

נתון: $\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$



לפי נתונים אלה והנתונים שבסרטוט,

$\frac{c}{d} = ?$

(1) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

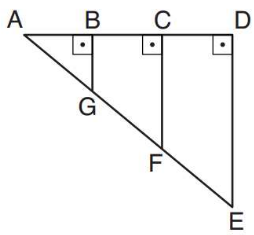
(2) $\frac{1}{2}$

(3) $\frac{1}{\sqrt{5}}$

(4) $\frac{1}{4}$

.2 בסרטוט שלפניכם הנקודות G ו-F נמצאות על הישר AE.

נתון: AB = BC = CD



לפי נתונים אלה והנתונים שבסרטוט,
מה היחס בין אורכי הקטעים CF ו-DE?

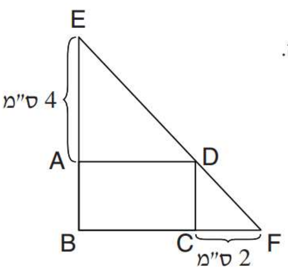
(1) $4 : 9$

(2) $2 : 3$

(3) $3 : 4$

(4) $5 : 9$

.3 בסרטוט שלפניכם ABCD הוא מלבן.
הנקודות E ו-F נמצאות על המשכי הצלעות BA ו-BC, בהתאמה.
הקטע EF עובר בנקודה D.



לפי נתונים אלה והנתונים שבסרטוט,
מה שטח המלבן ABCD (בסמ"ר)?

(1) 6

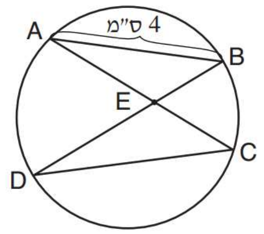
(2) 8

(3) 3

(4) 4

פתרתי ____________ שאלות ב ____________ דקות, ____________ תשובות נכונות

4. AB ,AC ,BD ו-CD הם מיתרים במעגל שבסרטוט.



נתון: $\frac{AE}{DE} = \frac{2}{3}$

לפי נתונים אלה והנתונים שבסרטוט,

$DC = ?$

(1) $4\frac{2}{3}$ ס"מ

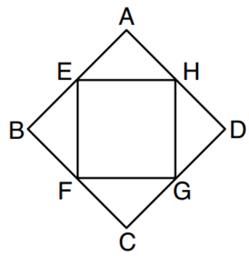
(2) 6 ס"מ

(3) 8 ס"מ

(4) $8\frac{1}{3}$ ס"מ

---

5. בסרטוט שלפניכם ABCD ו-EFGH ריבועים.



נתון: $\frac{\text{היקף הריבוע ABCD}}{\text{היקף הריבוע EFGH}} = \sqrt{2}$

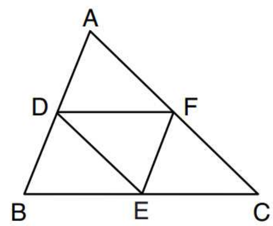
$\frac{\text{צלע הריבוע ABCD}}{\text{צלע הריבוע EFGH}} = ?$

(1) 1 (2) 2 (3) $\sqrt{2}$ (4) 4

---

6. בסרטוט שלפניכם ABC הוא משולש כלשהו, אשר E ,D ו-F הם אמצעי צלעותיו.

אם היקף המשולש DEF הוא a ס"מ,
היקף המשולש ABC (בס"מ) הוא -



(1) $\sqrt{2}\,a$

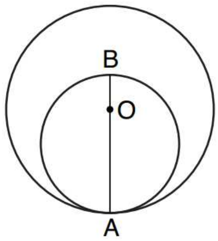
(2) $2a$

(3) $3a$

(4) $\sqrt{3}\,a$

---

7. בסרטוט שלפניכם, AB הוא קוטר במעגל הקטן המשיק מבפנים למעגל הגדול שמרכזו O.
A היא נקודת ההשקה.



נתון: $3 \cdot OB = OA$

מה היחס בין שטח המעגל הקטן לשטח המעגל הגדול?

(1) $1 : 9$

(2) $4 : 9$

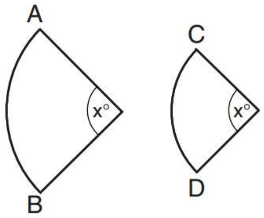
(3) $1 : 3$

(4) $3 : 4$

---

8. בסרטוט שלפניכם שתי גזרות של מעגלים.
הקשת AB ארוכה פי 2 מהקשת CD.

מה היחס בין שטחי הגזרות?



(1) $1 : \frac{x}{360}$

(2) $1 : 2$

(3) $1 : \frac{x}{180}$

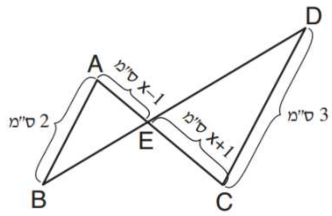
(4) $1 : 4$

---

9. נתון: $AB \parallel DC$

לפי נתון זה ונתוני הסרטוט,

$x = ?$



(1) $\frac{4}{3}$

(2) $\frac{3}{2}$

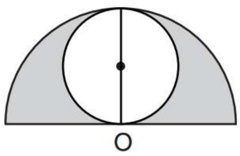
(3) 5

(4) 4

---

10. בסרטוט מתואר חצי מעגל (שמרכזו O) ובו חסום מעגל קטן שקוטרו שווה לרדיוס חצי המעגל.

$\frac{\text{שטח המעגל הקטן}}{\text{השטח הכהה}} = ?$

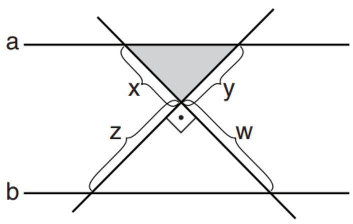


(1) 1 (2) $\sqrt{2}$ (3) $\frac{\pi}{2}$ (4) π

---

11. בסרטוט שלפניכם $a \parallel b$, ושטח המשולש הבהיר גדול פי 2 משטח המשולש הכהה.

$\frac{z}{y} = ?$



(1) $\sqrt{2}$

(2) $2\sqrt{2}$

(3) $2\sqrt{3}$

(4) 4

פתרתי ____________ שאלות ב ____________ דקות, ____________ תשובות נכונות

12. נתון חרוט שנפחו V.
אם נשנה את ממדיו של החרוט כך שרדיוס בסיסו **יגדל** פי 3 וגובהו **יקטן** פי 3, יתקבל חרוט שנפחו U.

$\frac{U}{V} = ?$

(1) 1
(2) $\frac{1}{9}$
(3) 3
(4) 9

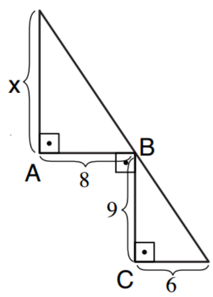
---

13. אם נגדיל את שטחו של מעגל פי x, פי כמה יגדל היקפו?

(1) פי x
(2) פי $2x$
(3) פי $\sqrt{x}$
(4) פי x^2

---

14. בסרטוט שלפניכם שני משולשים ישרי זווית.
נתון: $\sphericalangle ABC = 90°$
על פי נתונים אלה ונתוני הסרטוט,
$x = ?$



(1) 8
(2) $8\sqrt{2}$
(3) 11
(4) 12

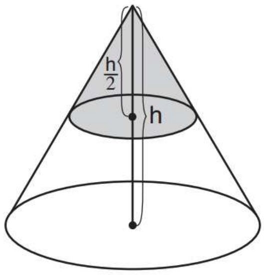
---

15. שטחו של מחומש משוכלל שאורך צלעו 1 ס"מ הוא a סמ"ר.
מה שטחו (בסמ"ר) של מחומש משוכלל שאורך צלעו 3 ס"מ?

(1) $9a$ (2) $6a$ (3) $3a$ (4) $5a$

פתרתי ______________ שאלות ב ______________ דקות, ______________ תשובות נכונות

16. חרוט קטן שגובהו $\frac{h}{2}$ הוא חלקו העליון של חרוט גדול שגובהו h (ראו סרטוט).

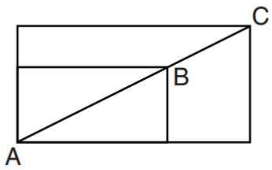


$\frac{\text{נפח החרוט הגדול}}{\text{נפח החרוט הקטן (הנפח הכהה)}} = ?$

(1) 8
(2) 6
(3) 3
(4) 4

---

17. בסרטוט שלפניכם שני מלבנים שאלכסוניהם AC ו-AB.



נתון: $AB = 2 \cdot BC$
שטח המלבן הגדול הוא S סמ"ר.

מה שטח המלבן הקטן (בסמ"ר)?

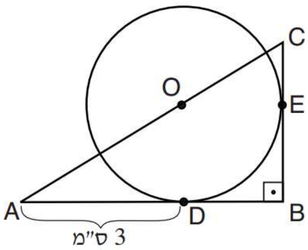
(1) $S\frac{1}{3}$ (2) $S\frac{1}{2}$ (3) $\frac{4}{9}S$ (4) $S\frac{2}{3}$

---

18. בסרטוט שלפניך ABC הוא משולש ישר זווית.
D ו-E הן נקודות ההשקה של המשולש עם מעגל שמרכזו O ורדיוסו r ס"מ.

על פי נתונים אלה ונתוני הסרטוט,

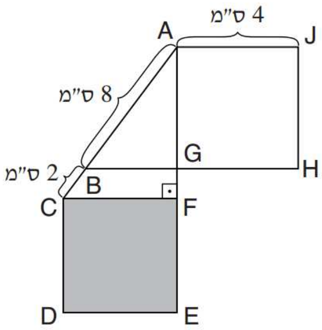
$BC = ?$



(1) $\frac{4r}{3}$ ס"מ
(2) $\frac{3r}{2}$ ס"מ
(3) $(r^2 - 3r)$ ס"מ
(4) $\left(\frac{r^2}{3} + r\right)$ ס"מ

פתרתי ____________ שאלות ב ____________ דקות, ____________ תשובות נכונות

19. בסרטוט שלפניך ACF הוא משולש ישר זווית.
AGHJ ו-CDEF הם ריבועים.
נתון: BG || CF.
על פי נתונים אלה ונתוני הסרטוט,
מה שטחו של הריבוע הכהה (בסמ"ר)?



(1) 36
(2) 64
(3) 75
(4) 84

---

20. בכמה גדל אורך הצלע של ריבוע אם שטח הריבוע גדל ב-96%?

(1) 32%
(2) 36%
(3) 40%
(4) 48%

פתרתי ____________ שאלות ב ____________ דקות, ____________ תשובות נכונות

תשובות

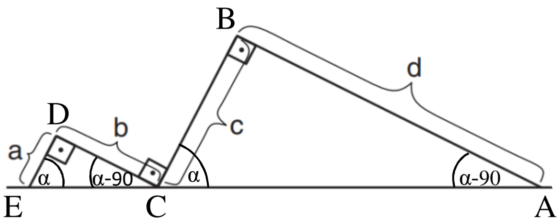
שאלה	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
תשובה	2	2	2	2	3	2	2	4	3	1

שאלה	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
תשובה	1	3	3	4	1	1	3	4	3	3

פתרתי 20 שאלות - ______________ נכונות, ______________ אחוזי הצלחה

1. תשובה (2) נכונה. שאלה 2 מתוך 20 בפרק.

בשאלה נתון יחס צלעות, ואנו נשאלים על יחס צלעות.
הפתרון הנפוץ במקרים כאלה הוא דמיון משולשים.



ראשית, עלינו לזהות שהמשולשים בסרטוט הם משולשים דומים (זהו אובייקט מוכר של משולשים דומים).
כעת, אנו יודעים כי במשולשים דומים היחס בין שתי צלעות באותו משולש זהה בין שני המשולשים; נתון כי היחס בין הניצבים במשולש הקטן הוא 1:2. כיוון שהמשולשים דומים, גם היחס בין הניצבים במשולש הגדול הוא 1:2.

$$\frac{c}{d} = \frac{a}{b} = \frac{1}{2}$$

למען שלמות ההסבר, נראה מדוע משולשים אלו דומים זה לזה. נסמן את קודקודי המשולשים באותיות כמצוין בסרטוט לעיל, על מנת להקל על ההסבר.

נציב α בזווית E ונשלים את יתר הזוויות כפי שמוצג בסרטוט.

ניתן לעשות זאת גם במספרים - נציב גודל מספרי באחת הזוויות, במקום α, לדוגמה: $\sphericalangle BCA = 70°$

בהתבסס על סכום זוויות במשולש CBA נחשב את ערכה של זווית $\sphericalangle CAB$:

$$\sphericalangle CAB = 180 - 90 - 70 = 20$$

נחשב את ערכה של זווית $\sphericalangle ECD$ המהווה חלק מהזווית השטוחה $\sphericalangle ECB$:

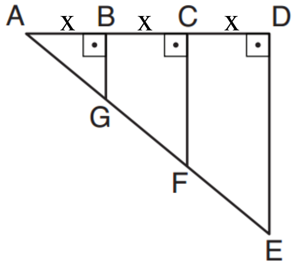
$$\sphericalangle ECD = 180 - 90 - 70 = 20$$

וכן נחשב את ערכה של זווית $\sphericalangle DEC$ בהתבסס על סכום זוויות במשולש EDC:

$$\sphericalangle ECD = 180 - 90 - 20 = 70$$

מכיוון שהזוויות בשני המשולשים שוות, המשולשים דומים.

2. תשובה (2) נכונה. שאלה 3 מתוך 20 בפרק.



אנו מתבקשים למצוא את היחס בין אורכי הקטעים CF ו-DE. לפנינו מצב דמיון מוכר (קו מקביל לניצב במשולש ישר זווית). נשתמש בדמיון המשולשים AFC ו-AED, שבהם הצלעות המבוקשות הן ניצבים.

כדי להיעזר בדמיון, עלינו למצוא יחס בין צלעות כלשהן במשולשים. נתון: AB = BC = CD, נסמן קטעים אלה ב-x. לפיכך, AC = 2x ו-AD = 3x. כעת ניתן להיעזר ביחס הדמיון:

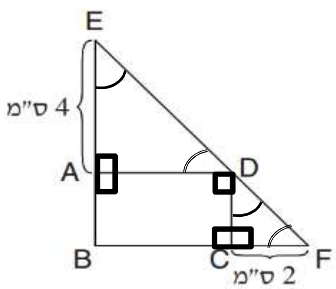
$$\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AD}} = \frac{\mathrm{CF}}{\mathrm{DE}} \quad \Rightarrow \quad \frac{2x}{3x} = \frac{\mathrm{CF}}{\mathrm{DE}}$$

נצמצם x:

$$\frac{\mathrm{CF}}{\mathrm{DE}} = \frac{2}{3}$$

---

3. תשובה (2) נכונה. שאלה 6 מתוך 20 בפרק.



בשאלה זו עלינו לזהות אובייקט דמיון.
המשולש הגדול – EBA דומה למשולש השמאלי העליון – EAD ולמשולש הימני התחתון – DCF.
ניתן להוכיח זאת על ידי מציאת שתי זוויות שוות במשולשים:
שלושת המשולשים ישרי זווית, שכן הזוויות EAD ו-DCF הן הזוויות הצמודות לזוויות המלבן. ∢E משותפת למשולש הגדול ולמשולש השמאלי העליון ולכן הם דומים. ∢F משותפת למשולש הגדול ולמשולש הימני התחתון ולכן גם הם דומים.
מכאן ששלושת המשולשים דומים.

כעת, נגדיר באופן אלגברי את הדמיון בין המשולש התחתון לעליון ונציב את הנתונים:

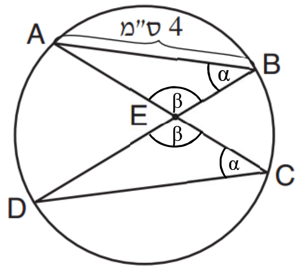
$$\frac{\mathrm{AE}}{CD} = \frac{AD}{CF}$$
$$\frac{4}{CD} = \frac{AD}{2}$$
$$AD \cdot CD = 4 \cdot 2 = 8$$

AD כפול CD זה המכפלה של הצלעות של המלבן, ולכן השטח שלו הוא 8.

תשובה (2) נכונה.

---

4. תשובה (2) נכונה. שאלה 8 מתוך 20 בפרק.



לפנינו מעגל ובו 4 מיתרים. נתון היחס בין AE ל-DE, וכן נתון כי $AB = 4$. עלינו למצוא את אורכו של המיתר DC. מאחר שנתון יחס בין צלעות במשולשים, ניתן להיעזר בדמיון. תחילה, נחפש משולשים דומים. לשם כך, נסמן זוויות שוות.

זוויות $\measuredangle ABD$ ו-$\measuredangle ACD$ הן זוויות היקפיות הנשענות על אותה קשת (AD) ולכן הן שוות. נסמן אותן ב-α.

זוויות $\measuredangle AEB$ ו-$\measuredangle DEC$ שוות מפני שהן זוויות קודקודיות. נסמן אותן ב-β.

כלומר, למשולשים AEB ו-DEC שתי זוויות שוות ולכן הם דומים. נתון היחס בין AE ל-DE, הצלעות שמול α. יחס זה שווה ליחס בין הצלעות שמול β:

$$\frac{AE}{DE} = \frac{AB}{DC} \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{3} = \frac{4}{DC}$$

$$2DC = 12$$

$$DC = 6$$

---

5. תשובה (3) נכונה. שאלה 10 מתוך 20 בפרק.

לפנינו שני ריבועים שיחס היקפיהם $\sqrt{2}$. אנו מתבקשים לקבוע מה היחס בין אורכי צלעות הריבועים. כל הריבועים דומים זה לזה, ולכן היחס הקווי בין הריבועים שבסרטוט קבוע. לפיכך, אם יחס ההיקפים שלהם הוא $\sqrt{2}$, גם יחס הצלעות הוא $\sqrt{2}$.

נסביר זאת גם באופן אלגברי: נסמן את צלע הריבוע הגדול ב-a ואת צלע הריבוע הקטן ב-b. אז היקף הריבוע הגדול הוא 4a, והיקף הריבוע הקטן הוא 4b. נתאר את היחס ביניהם באופן אלגברי:

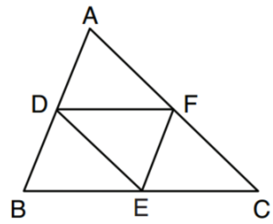
$$\frac{4a}{4b} = \sqrt{2}$$

נצמצם 4 במונה ובמכנה:

$$\frac{a}{b} = \sqrt{2}$$

---

6. תשובה (2) נכונה. שאלה 12 מתוך 20 בפרק.



לפנינו משולש ABC שחוברו אמצעי צלעותיו כך שנוצר משולש DEF שהיקפו a ס"מ. אנו מתבקשים לבטא את היקף המשולש הגדול, ABC, באמצעות a.

תחילה, נתמקד בצלע DF. צלע DF מהווה קטע אמצעים במשולש ABC מפני שהיא מחברת את אמצעי צלעותיו. ידוע כי קטע אמצעים מקביל לצלע שמולו, כלומר $BC \parallel DF$. לכן משולשים ADF ו-ABC דומים (מדובר במצב דמיון מוכר – קטע אמצעים).

כעת נבין מה היחס הקווי בין המשולשים. נתון: $AF = FC$. כלומר:

$$AC = AF + FC \;\Rightarrow\; AC = 2 \cdot AF$$

לפיכך, היחס הקווי בין משולש ADF ו-ABC הוא $1 : 2$. משמע, צלע BC גדולה פי 2 מצלע DF:

$$BC = 2 \cdot DF$$

באותו אופן, גם משולשים CFE ו-CAB דומים וכן משולשים DBE ו-ABC דומים. משמע:

$$AB = 2 \cdot EF$$
$$AC = 2 \cdot DE$$

שימו לב, קטע אמצעים תמיד שווה למחצית מהצלע שמולו (מטעמי הדמיון שהוצגו לעיל).

אם כל אחת מצלעותיו של משולש ABC גדולה פי 2 מצלעותיו של משולש DEF, הרי שהיקפו גדול פי 2 מהיקף המשולש DEF. נתאר זאת גם באופן אלגברי:

$$AB + BC + AC = 2 \cdot EF + 2 \cdot DF + 2 \cdot DE$$

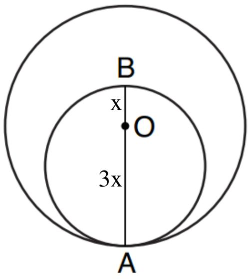
נוציא גורם משותף 2:

$$AB + BC + AC = 2 \cdot (EF + DF + DE)$$

הביטוי שבתוך הסוגריים שווה ל-a, שכן הוא מתאר את היקף המשולש DEF, לכן:

$$AB + BC + AC = 2a$$

7. תשובה (2) נכונה. שאלה 13 מתוך 20 בפרק.



עלינו לקבוע מה היחס בין שטח המעגל הקטן לשטח המעגל הגדול. כל המעגלים דומים ולכן ניתן להיעזר בדמיון לשם כך: יחס השטחים שווה ליחס הקווי בריבוע, ולכן נמצא את היחס הקווי. למען הנוחות, נסמן את קטע OB באות x. נתון:

$$3 \cdot OB = OA \quad \Rightarrow \quad 3x = OA$$

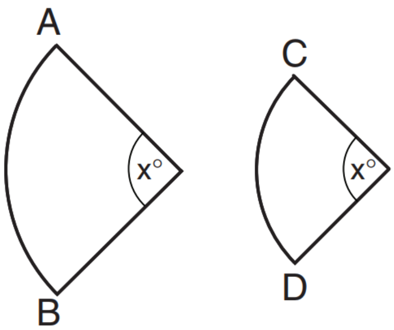
משמע, רדיוס המעגל הגדול שווה ל-3x. איננו יודעים מה רדיוס המעגל הקטן. עם זאת, אנו יודעים שקוטר המעגל הקטן הוא 4x $(x + 3x)$. אם רדיוס המעגל הגדול הוא 3x, הרי שקוטרו שווה ל-6x. נחשב את היחס הקווי בין המעגלים (יחס הקטרים):

$$\frac{4x}{6x} = \frac{2}{3}$$

כאמור, יחס השטחים שווה לריבוע היחס הקווי $\Leftarrow$ $\frac{4}{9} = \left(\frac{2}{3}\right)^2$.

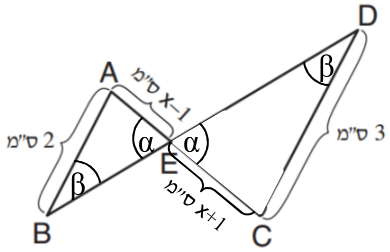
---

8. תשובה (4) נכונה. שאלה 13 מתוך 20 בפרק.



כאשר ישנן שתי גזרות של מעגל בעלות אותה זווית מרכזית, הגזרות דומות זו לזו. נתון שהקשת AB ארוכה פי 2 מהקשת CD, כלומר היחס הקווי בין הגזרות הוא 2 : 1 . יחס שטחים שווה ליחס קווי בריבוע, ועל כן יחס השטחים יהיה 4 : 1 .

9. תשובה (3) נכונה. שאלה 13 מתוך 20 בפרק.



דרך א׳ – פתרון אלגברי

לפנינו 2 משולשים שאורכי חלק מצלעותיהם מבוטאים באמצעות x.
עלינו למצוא את ערכו של x, ולכן ננסה לקשר בין אורכי הצלעות ולבנות משוואה שממנה נוכל לחלץ את ערכו. נתון כי $AB \parallel CD$, וזה מצב דמיון מוכר (שעון חול). נשתמש ביחס הדמיון בין הצלעות במשולשים הדומים כדי לבנות משוואה. נסמן את זוויות המשולשים כדי לזהות אילו צלעות דומות זו לזו.

$\measuredangle DEC$ ו-$\measuredangle BEA$ הן זוויות קודקודיות – נסמן אותן באות α. $\measuredangle CDE$ ו-$\measuredangle ABE$ הן זוויות מתחלפות בין מקבילים (״Z״) – נסמן אותן באות β.

הצלעות שמול זווית α דומות זו לזו – DC ו-BA, וכן הצלעות שמול זווית β דומות זו לזו – CE ו-AE. נתאר זאת באופן אלגברי:

$$\frac{DC}{BA} = \frac{CE}{AE} \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{2} = \frac{x+1}{x-1}$$

נבצע כפל בהצלבה:

$$3 \cdot (x-1) = 2 \cdot (x+1)$$

$$3x - 3 = 2x + 2$$

$$x = 5$$

דרך ב׳ – הצבת תשובות

כאמור לעיל, המשולשים שלפנינו דומים. עלינו למצוא את ערכו של x. ניתן להציב את הערכים שבתשובות ולחפש ערך שיקיים את יחס הדמיון. היחס בין CE ל-AE צריך להיות שווה ליחס בין DC ל-BA. כלומר, על היחס בין CE ל-AE להיות $\frac{3}{2}$.

טיפ: בהצבת תשובות, כדאי להתחיל בתשובות הנוחות יותר.

<u>נבדוק את תשובה (3):</u>

$x = 5$. אורכה של צלע CE הוא 6 ס״מ $(5 + 1)$, ואורכה של צלע AE הוא 4 ס״מ $(5 - 1)$.

היחס הוא $\frac{3}{2} = \frac{6}{4}$. **תשובה נכונה.**

טיפ: מכיוון שהצבנו את התשובות, ברגע שמצאנו תשובה נכונה אין צורך להמשיך לבדוק את שאר התשובות, אך למען שלמות ההסבר נפסול אותן:

<u>נבדוק את תשובה (4):</u>

$x = 4$. אורכה של צלע CE הוא 5 ס״מ $(4 + 1)$, ואורכה של צלע AE הוא 3 ס״מ $(4 - 1)$.

היחס הוא $\frac{5}{3}$. התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (1):</u>

$x = \frac{4}{3}$. אורכה של צלע CE הוא $\frac{7}{3}$ ס״מ $\left(\frac{4}{3} + 1\right)$, ואורכה של צלע AE הוא $\frac{1}{3}$ ס״מ $\left(\frac{4}{3} - 1\right)$.

היחס הוא $7 = \frac{\frac{7}{3}}{\frac{1}{3}}$. התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (2):</u>

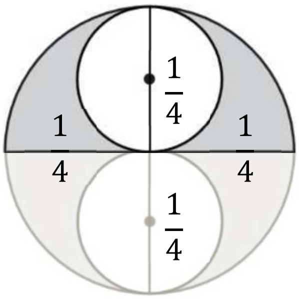
$x = \frac{3}{2}$. אורכה של צלע CE הוא $\frac{5}{2}$ ס״מ $\left(\frac{3}{2} + 1\right)$, ואורכה של צלע AE הוא $\frac{1}{2}$ ס״מ $\left(\frac{3}{2} - 1\right)$.

היחס הוא $5 = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{1}{2}}$. התשובה נפסלת.

10. תשובה (1) נכונה. שאלה 14 מתוך 20 בפרק.

דרך א׳ – אובייקט מוכר

שרטוט של שני מעגלים על קוטרו של מעגל גדול מחלק את המעגל הגדול ל-4 חלקים שווים בהתאם לשרטוט שמשמאל (השטח האפור מימין לקוטר = השטח האפור משמאל לקוטר = מעגל קטן עליון = מעגל קטן תחתון).



כלומר, השטח האפור (המקורי) מורכב מחצי השטח הימני ומחצי של השטח השמאלי. בסך הכל הוא שווה ל- $\frac{1}{4}$ משטח המעגל הגדול. גם שטח המעגל הקטן שווה ל- $\frac{1}{4}$ משטח המעגל הגדול. מכאן שהשטחים שווים והיחס ביניהם הוא 1.

דרך ב׳ – דמיון

כזכור, צורות משוכללות (למשל, מעגלים) הן תמיד דומות. בצורות דומות ניתן להשתמש ביחס קווי כדי להגיע ליחס שטחים.

נתחיל במציאת היחס הקווי: בתור רדיוס המעגל הקטן נציב 1. מכאן, שרדיוס המעגל הגדול שהשלמנו הוא 2. כלומר, היחס הקווי בין המעגלים הוא 1:2.

נעבור למציאת יחס השטחים: נעלה את היחס הקווי בריבוע ונמצא כי יחס השטחים הוא 1:4. כלומר, אם שטח המעגל הלבן הוא X, שטח **כל** המעגל הגדול הוא 4X.

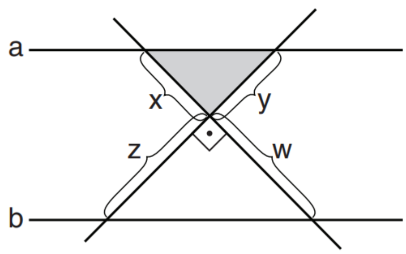
השטח הכהה הוא למעשה שטח **חצי** מעגל גדול ($4X \div 2 = 2X$) פחות שטח מעגל קטן:

$$2X - X = X$$

אם כך, שטח המעגל הקטן הוא X וגם השטח הכהה הוא X. לכן, השטחים זהים ויחס השטחים הוא 1.

---

11. תשובה (1) נכונה. שאלה 15 מתוך 20 בפרק.



קווים a ו-b מקבילים ולפיכך המשולשים שבסרטוט דומים (אובייקט ״שעון חול״). נתון ששטח המשולש הבהיר גדול פי 2 משטח המשולש הכהה. כלומר, יחס השטחים בין המשולשים הוא 1 : 2. כידוע, יחס השטחים בין צורות דומות שווה ליחס הקווי בריבוע. מכאן שהיחס הקווי שווה לשורש של יחס השטחים:

$$2:1 = \text{יחס שטחים}$$

$$\sqrt{2:1} = \sqrt{2} = \text{יחס קווי}$$

הצלעות z ו-y הן צלעות דומות ועל כן היחס ביניהן שווה ליחס הקווי – $\sqrt{2}$.

---

12. תשובה (3) נכונה. שאלה 15 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הצבת מספר נוח

אנו יכולים להציב מספרים נוחים בתור ממדי החרוט המקוריים. נציב בתור רדיוס הבסיס 1 ס"מ ובתור גובה החרוט 3 ס"מ (כדי שיהיה לנו קל יותר לחלק אותו ב-3 מבלי לקבל שבר). V הוא נפח החרוט המקורי:

$$V = \frac{r^2\pi \cdot h}{3} = \frac{1^2\pi \cdot 3}{3} = \pi$$

כעת נמצא את הממדים לאחר השינוי. את רדיוס הבסיס (1 ס"מ) נגדיל פי 3 – 3 ס"מ, ואת גובה החרוט (3 ס"מ) נקטין פי 3 – 1 ס"מ. נפח החרוט החדש הוא U:

$$U = \frac{r^2\pi \cdot h}{3} = \frac{3^2\pi \cdot 1}{3} = 3\pi$$

לסיכום, נפח החרוט המקורי (V) שווה π ונפח החרוט החדש (U) שווה 3π. נחשב את ערך הביטוי המבוקש:

$$\frac{U}{V} = \frac{3\pi}{\pi} = 3$$

דרך ב' – דמיון חלקי

נזכור כי השפעת שינוי גורם על נפח הגוף היא בהתאם לחזקה שבה מועלה הגורם בנוסחה. נתבונן בנוסחה לחישוב נפח חרוט: $\frac{r^2\pi \cdot h}{3}$

כפי שניתן לראות בנוסחה, הרדיוס בחזקת 2 ועל כן אם נגדיל את רדיוס בסיס החרוט פי 3 הדבר יביא להגדלת נפח החרוט פי 9 (3^2) – המעגלים דומים ויחס השטחים ביניהם הוא 1:9.

כמו כן, ניתן לראות בנוסחה כי הגובה הוא חזקת 1, ועל כן אם נקטין את גובה החרוט פי 3, הדבר יביא להקטנת נפח החרוט פי 3.

אם נפחו הוגדל פי 9 והוקטן פי 3, בסך הכול הוא הוגדל פי 3.

13. תשובה (3) נכונה. שאלה 16 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – דמיון

אם נגדיל את שטחו של מעגל פי x נקבל מעגל חדש. מעגלים הם צורות דומות ולכן קיים דמיון בין שני המעגלים החדשים ויחס השטחים ביניהם הוא $1 : x$.
אנו יודעים שיחס השטחים שווה ליחס הקווי בריבוע; לכן כדי להגיע ליחס הקווי, בהינתן יחס שטחים, עלינו להוציא ליחס השטחים שורש.

$$\text{יחס שטחים} = (\text{יחס קווי})^2 \quad /\sqrt{\ }$$
$$\text{יחס קווי} = \sqrt{(1:x)} = 1:\sqrt{x}$$

מכיוון שהיקף הוא קו, יחס ההיקפים יהיה שווה ליחס הקווי. מכאן שגם יחס ההיקפים יהיה שווה ל- $1:\sqrt{x}$, ובעצם היקף המעגל יגדל פי $\sqrt{x}$.

דרך ב' – הצבת מספרים

נגדיר מעגל בסיסי שרדיוסו 1. היקפו של מעגל זה שווה ל-2π ושטחו שווה ל-π. נגדיל את שטחו של המעגל פי 2 (נציב במקום x) אז שטחו החדש יהיה 2π. נחשב את רדיוס מעגל זה.

$$\pi R^2 = 2\pi \quad /:\pi$$
$$R^2 = 2$$
$$R = \sqrt{2}$$

לאחר שמצאנו את רדיוס המעגל החדש, נוכל לחשב את היקפו.

$$\text{היקף} = 2 \cdot R \cdot \pi = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \pi$$

היקף המעגל המקורי היה 2π, והיקף המעגל החדש הוא $2\sqrt{2}\pi$, כלומר היקף המעגל גדל פי $\sqrt{2}$. נציב בתשובות $x = 2$ ונבדוק איזו תשובה שווה ל- $\sqrt{2}$.

(1) 2 $\Rightarrow$ לא מתאים. התשובה נפסלת

(2) $2 \cdot 2 = 4$ $\Rightarrow$ לא מתאים. התשובה נפסלת

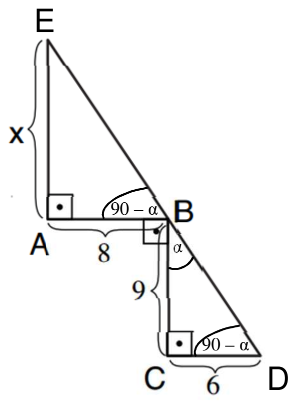
(3) $\sqrt{2}$ $\Rightarrow$ מתאים.

(4) $2^2 = 4$ $\Rightarrow$ לא מתאים. התשובה נפסלת

פסלנו 3 תשובות, ועל כן תשובה (3) נכונה.

---

14. תשובה (4) נכונה. שאלה 18 מתוך 20 בפרק.



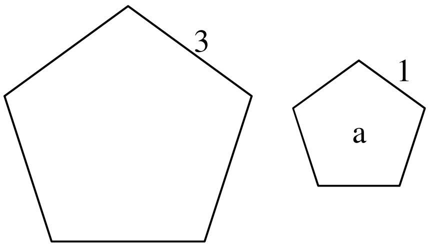
לפנינו שני משולשים ישרי זווית שיתריהם מונחים על אותו ישר. למען נוחות ההסבר, נסמן את קדקודי המשולשים באותיות כמתואר בסרטוט, ונסמן $\measuredangle CBD = \alpha$.

אם $\measuredangle CBD = \alpha$, אז $\measuredangle BDC = 90° - \alpha$ (סכום זוויות במשולש). כעת נביט במשולש EAB: זווית $\measuredangle EBA$ משלימה את $\measuredangle ABC$ ו-$\measuredangle CBD$ ל-$180°$, מפני ששלושתן מרכיבות זווית שטוחה. לפיכך, $\measuredangle EBA = 90° - \alpha$.

מצאנו שלשני המשולשים יש שתי זוויות שוות ועל כן הם דומים. ניעזר ביחס הדמיון כדי לחשב את גודלו של x:

$$\frac{x}{8} = \frac{9}{6}$$
$$x = \frac{9 \cdot 8}{6} = \frac{3 \cdot 8}{2} = 12$$

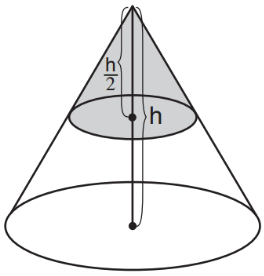
15. תשובה (1) נכונה. שאלה 18 מתוך 20 בפרק.



שטחו של מחומש משוכלל שאורך צלעו 1 ס״מ הוא a סמ״ר. עלינו לחשב את שטחו של מחומש משוכלל שאורך צלעו 3 ס״מ. מכיוון שכל המחומשים המשוכללים דומים, ניתן להיעזר ביחס הדמיון ביניהם. יחס השטחים בין מצולעים דומים שווה ליחס הקווי בריבוע. היחס הקווי הוא 1 : 3, ועל כן יחס השטחים הוא 1 : 9. לכן השטח גדול פי 9, ושווה 9a.

---

16. תשובה (1) נכונה. שאלה 19 מתוך 20 בפרק.



לפנינו חרוט קטן הכלוא בתוך חרוט גדול. החרוטים דומים זה לזה, ולכן ניתן להיעזר ביחס הקווי ביניהם כדי לקבוע מה יחס הנפחים. גובה החרוט הגדול גדול פי 2 מגובה החרוט הקטן, אז היחס הקווי הוא 1 : 2, ואז יחס הנפחים הוא 1 : 8, שכן יחס הנפחים שווה ליחס הקווי בשלישית $((2:1)^3)$. כלומר, היחס בין נפח החרוט הגדול לנפח החרוט הקטן הוא 8.

---

17. תשובה (3) נכונה. שאלה 19 מתוך 20 בפרק.

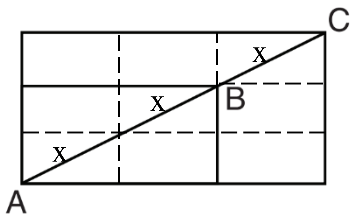
דרך א׳ – דמיון

האלכסונים של המלבן הקטן והגדול נמצאים על אותו ישר ולכן המלבנים דומים. כידוע, יחס השטחים בין צורות דומות שווה ליחס הקווי בריבוע.

נציב: $BC = x$; מכאן שאורך אלכסון המלבן הקטן (AB) הוא 2x ואורך האלכסון הארוך (AC) הוא 3x. כלומר, יחס האלכסונים של המלבנים הוא 2:3. יחס זה הוא היחס הקווי בין המלבנים ועל כן נעלה אותו בריבוע על מנת למצוא את יחס השטחים:

$$(2:3)^2 = 4:9$$

מכאן ששטח המלבן הקטן שווה ל- $\frac{4}{9}$ מתוך שטח המלבן הגדול, כלומר $\frac{4}{9}S$.



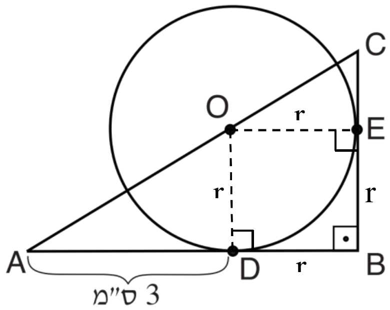
דרך ב׳ – חלוקת השטח

נציב: $BC = x$, מכאן ש- $AB = 2x$.

כעת נחלק את המלבן הגדול ל-9 מלבנים חופפים שאלכסוניהם שווים ל-x.

כעת נוצרו 9 מלבנים המרכיבים את שטח המלבן הגדול- S. לכן, שטח כל אחד מהמלבנים הקטנים הוא $\frac{1}{9}S$. את שטח המלבן הקטן מרכיבים 4 מלבנים, ועל כן שטחו הוא $\frac{4}{9}S$.

18. תשובה (4) נכונה. שאלה 20 מתוך 20 בפרק.



דרך א' – חישוב אלגברי

ראשית, נמתח את הרדיוסים לנקודות ההשקה D ו-E (כמתואר בסרטוט).

המרובע ODBE הוא ריבוע: הזווית ∡BEO ו-∡ODB בנות $90°$ משום שהרדיוס מאונך למשיק בנקודת ההשקה, ומכיוון ש-OD ו-OE שווים (רדיוסים) קיבלנו ריבוע שאורך צלעו r (מלבן בעל שתי צלעות סמוכות שוות הוא ריבוע).

כעת, ניתן לזהות דמיון בין המשולשים ישרי הזווית ADO ו-ABC.
זהו מצב דמיון מוכר ובו שני משולשים ישרי זווית כך שאחד כלוא בתוך השני. לפיכך, היחס בין הניצבים במשולש ABC שווה ליחס בין הניצבים במשולש ADO. כלומר:

$$\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DO}}=\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BC}}$$

כאמור, אורך צלעו של ריבוע ODBE הוא r. לפיכך, $\mathrm{DO}=\mathrm{r}$ וכן $\mathrm{DB}=\mathrm{r}$, ולכן $\mathrm{AB}=3+\mathrm{r}$. נציב את האורכים הידועים לנו במשוואה שמצאנו לעיל:

$$\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DO}}=\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BC}} \quad\Rightarrow\quad \frac{3}{\mathrm{r}}=\frac{3+\mathrm{r}}{\mathrm{BC}}$$

נבצע כפל בהצלבה:

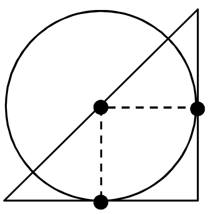
$$3\cdot \mathrm{BC}=(3+\mathrm{r})\cdot \mathrm{r}$$
$$3\cdot \mathrm{BC}=3\mathrm{r}+\mathrm{r}^2$$

נחלק ב-3:

$$\mathrm{BC}=\frac{3\mathrm{r}+\mathrm{r}^2}{3}=\frac{3\mathrm{r}}{3}+\frac{\mathrm{r}^2}{3}$$

$$\mathrm{BC}=\mathrm{r}+\frac{\mathrm{r}^2}{3}$$

דרך ב' – הצבת מספרים



נבחר מספר נוח להציב במקום r. על מנת להקל מאוד את התרגיל, נוכל להניח שהמשולש ABC הוא משולש כסף, וכך למצוא בקלות את אורכי הקטעים החסרים.
לכן נציב $\mathrm{r}=3$. נקבל את הסרטוט הבא:

לפיכך אורך ניצב המשולש הוא 6 ס"מ, כלומר $\mathrm{BC}=6$.

כעת, נציב גם בתשובות $\mathrm{r}=3$, ונחפש תשובה השווה ל-6. נשים לב שמכיוון שהשתמשנו בהצבת מספרים במקום הנעלמים, עלינו לפסול 3 תשובות בטרם נוכל לסמן תשובה נכונה.

(1) $\frac{4\mathrm{r}}{3}=\frac{4\cdot 3}{3}=4$ ⇐ לא מתאים, התשובה נפסלת

(2) $\frac{3\mathrm{r}}{2}=\frac{3\cdot 3}{2}=4.5$ ⇐ לא מתאים, התשובה נפסלת

(3) $(\mathrm{r}^2-3\mathrm{r})=3^2-3\cdot 3=0$ ⇐ לא מתאים, התשובה נפסלת

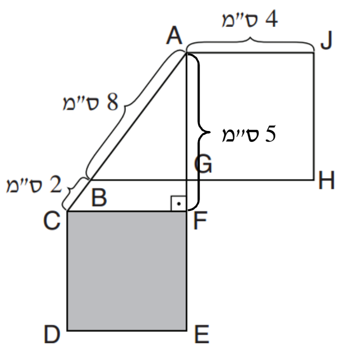
(4) $\left(\frac{\mathrm{r}^2}{3}+\mathrm{r}\right)=\frac{3^2}{3}+3=6$ ⇐ **מתאים**

פסלנו 3 תשובות ועל כן תשובה (4) נכונה.

19. תשובה (3) נכונה. שאלה 20 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – דמיון

לפנינו משולש ישר זווית ACF שעל ניצביו נבנו ריבועים. עלינו למצוא את שטחו של ריבוע CDEF. לשם כך, נחפש את אורכה של אחת מצלעותיו. מאחר שצלע CF מהווה ניצב במשולש ACF, נתמקד במשולש זה.



כדי למצוא את אורך הניצב CF, ניתן להשתמש במשפט פיתגורס, אם ידוע אורכיהן של שתי הצלעות האחרות. נתון $CA = 10$. נמצא את אורך הצלע הנותרת, ניצב AF. אורכו של קטע AG הוא 4 ס"מ, שכן הוא צלע בריבוע AGHJ. נצטרך לחשב את הקטע GF המשלים ל-AF.

לפנינו מצב דמיון מוכר. משולשים ABG ו-ACF הם משולשים דומים, שכן שניהם ישרי זווית ואחד מהם כלוא בתוך השני. במשולש ABG אורך היתר (AB) גדול פי 2 מאורך ניצב AG. יחס זה נשמר גם במשולש ACF. אם היתר AC שאורכו 10 ס"מ גדול פי 2 מניצב AF, הרי ש-$AF = 5$.

כעת ניעזר במשפט פיתגורס במשולש ACF:

$$AF^2 + CF^2 = AC^2 \quad \Rightarrow \quad 5^2 + CF^2 = 10^2$$

נסדר אגפים:

$$CF^2 = 10^2 - 5^2 = 100 - 25$$

שימו לב, מטרתנו היא למצוא את השטח האפור, ששווה CF^2. לפיכך, אין צורך להוציא שורש:

$$CF^2 = 75$$

לכן שטח הריבוע הכהה הוא 75 סמ"ר.

דרך ב' – משולש זהב

ABG הוא משולש ישר זווית שבו אורך היתר $(AB = 8)$ גדול פי 2 מאורך אחד הניצבים $(AG = 4)$. לפיכך מדובר במשולש זהב, זווית $\sphericalangle BAG = 60^\circ$ וזווית $\sphericalangle ABG = 30^\circ$. כדי למצוא את שטח הריבוע CDEF, נמצא את אורכה של אחת מצלעותיו. צלע CF מהווה ניצב במשולש ACF (גם זהב) ולכן נתמקד במשולש זה.

הניצב הקטן (AF) שווה למחצית היתר (AC) שווה ל-5 ס"מ. הניצב הגדול CF גדול פי $\sqrt{3}$ מהניצב הקטן, לכן $CF = 5\sqrt{3}$.

כעת ניתן לחשב את שטח הריבוע:

$$CF^2 = \left(5\sqrt{3}\right)^2$$

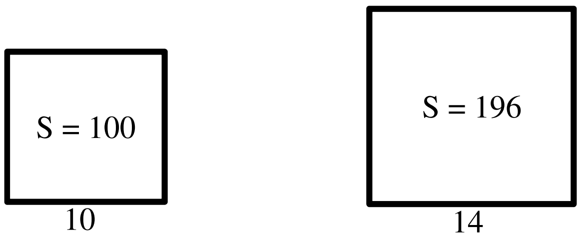
$$CF^2 = 25 \cdot 3 = 75$$

20. תשובה (3) נכונה. שאלה 20 מתוך 20 בפרק.

בשאלת אחוזים, עדיף להציב מספר נוח בכדי להימנע מחישובים מסובכים. לכן, נציב ששטח הריבוע המקורי הוא 100 סמ"ר.
שטח הריבוע גדל ב-96%, כלומר גדל ב-96 סמ"ר (כאשר השלם הוא 100, הגידול המספרי שווה לגידול באחוזים), והפך ל-196 סמ"ר.

כעת נחשב את גודל הצלעות לפי הצבה זו:
צלעו של ריבוע ששטחו 100 סמ"ר היא באורך 10 ס"מ ($10^2 = 100$).
צלעו של ריבוע ששטחו 196 סמ"ר היא באורך 14 ס"מ ($14^2 = 196$).

כלומר, צלעו של הריבוע גדלה מ-10 ל-14. 14 גדול מ-10 ב-4, ו-4 ס"מ מהווים 40% מתוך 10 ס"מ – אורך הצלע המקורית. על כן, אורך הצלע גדל ב-40%.



מערכת צירים

מערכת הצירים המופיעה בבחינה היא מערכת ובה שני צירים:

ציר ה-x: ציר מספרים אופקי, בדיוק כמו ציר מספרים רגיל.

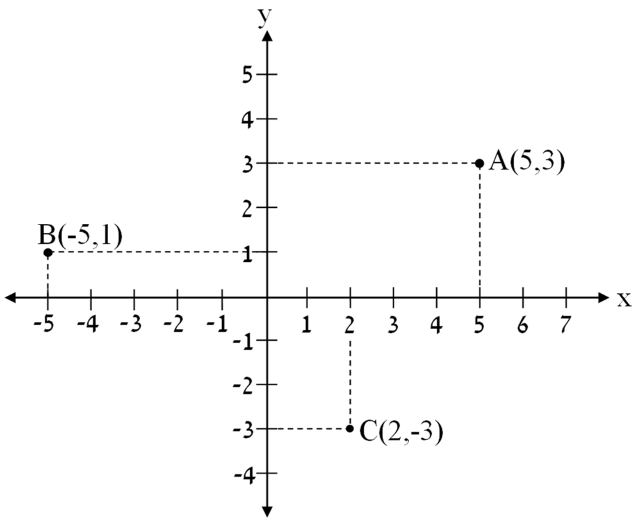
ציר ה-y: ציר מספרים אנכי.

שני הצירים מאונכים זה לזה בנקודה הנקראת "ראשית הצירים", ובה הערך של כל אחד מהם הוא 0.

לכל נקודה יש ערך x וערך y, על פיהם נקבע מיקומה של הנקודה על מערכת הצירים.

מיקום נקודה מסומן כך: A (x , y)

לדוגמה:



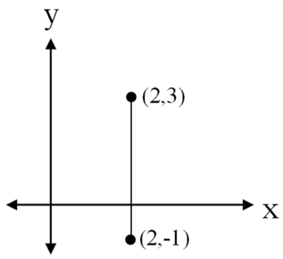
שימו לב!

המספר השמאלי הוא תמיד ערך ה-x של הנקודה, והמספר הימני הוא תמיד ערך ה-y של הנקודה.

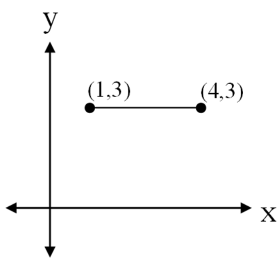
בין שתי נקודות עובר קו ישר אחד

כאשר נתונות שתי נקודות במערכת צירים, ניתן להעביר ביניהן קו ישר אחד בלבד.

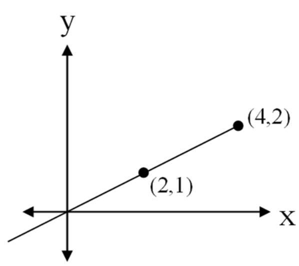
כאשר ערכי ה-x של שתי הנקודות זהים - הקו מקביל לציר ה-y:



כאשר ערכי ה-y של שתי הנקודות זהים - הקו מקביל לציר ה-x:



כאשר בשתי נקודות היחס בין ערך ה-x לערך ה-y זהה - הקו עובר דרך ראשית הצירים:



הערה: כאשר נתון ישר שאינו חותך ציר מסוים הישר בהכרח מקביל לאותו ציר, וכאשר נתון ישר שאינו מקביל לאחד הצירים הוא חותך כל ציר פעם אחת בדיוק.

מציאת אורך קטע

כאשר ישר מקביל לאחד הצירים, נמצא את אורכו על ידי מציאת המרחק בין שני הערכים של קצות הישר על הציר אליו הוא מקביל.

כאשר ישר אינו מקביל לאחד הצירים, נסרטט משולש ישר זווית שהישר הוא היתר שלו, ונחשב את אורכו בעזרת משפט פיתגורס.

דוגמה:

סרטטו משולש ABC על מערכת צירים.

נתונים ערכי הנקודות: $C(9,-3)$, $B(-5,-3)$, $A(3,5)$.

מה היקף המשולש ABC?

פתרון -

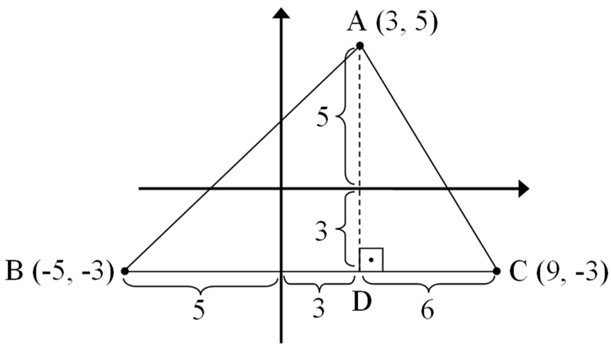
על מנת לחשב את היקף המשולש, עלינו למצוא את אורך כל אחת מצלעותיו.

נתחיל עם הישר BC.

נחלק אותו לשני קטעים -

המרחק מנקודה B עד לציר ה-y, והמרחק מציר ה-y עד לנקודה C:

$BC = 5 + 9 = 14$



על מנת לחשב את שתי הצלעות הנותרות, נוריד אנך מנקודה A לבסיס BC ונעזר במשפט פיתגורס.

על פי שלשה פיתגורית - $6:8:10$ ← $AC = 10$

על פי יחסי צלעות במשולש כסף - $a:a:a\sqrt{2}$ ← $AB = 8\sqrt{2}$

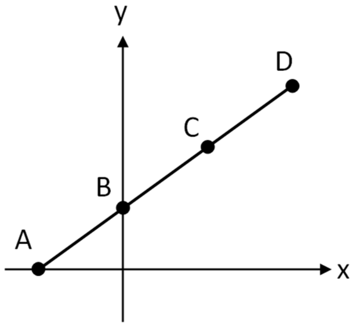
היקף המשולש שווה ל-

$AC + BC + AB = 10 + (5 + 3 + 6) + 8\sqrt{2} = 24 + 8\sqrt{2}$

שיפוע

שיפוע של קו ישר במערכת צירים הוא תמיד קבוע.
אם נחלק את ישר מסוים למקטעים שווים, המרחק על ציר ה-x בין כל שתי נקודות סמוכות יהיה קבוע, והמרחק על ציר ה-y בין כל שתי נקודות סמוכות יהיה קבוע.
בעצם, ניתן לצייר "מדרגות" על הישר כך שכל ה"מדרגות" הן באותו גודל בדיוק - אותו רוחב ואותו גובה.

דוגמה:



במערכת צירים שלפניך, הנקודות A, B, C ו-D נמצאות על ישר אחד.
נתון: $AB = BC = CD$
ערך הנקודה C הוא $C(3,4)$.

על פי נתונים אלה ונתוני הסרטוט,
$AD = ?$

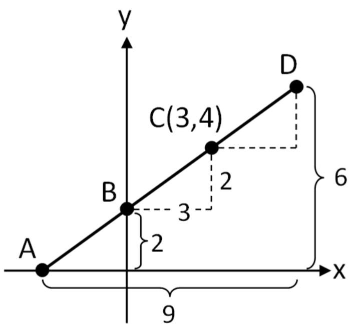
(1) $\sqrt{117}$

(2) $6\sqrt{2}$

(3) $\sqrt{13}$

(4) 5

פתרון -



נסרטט על הקו "מדרגות":
על פי הערך של נקודה C ניתן למצוא את הגובה והרוחב של כל מדרגה:
רוחב - 3, גובה - 2.

ניתן לחשב את האורך של AD בעזרת משפט פיתגורס:

$$9^2 + 6^2 = AD^2$$

$$81 + 36 = AD^2 \quad \Rightarrow \quad AD = \sqrt{117}$$

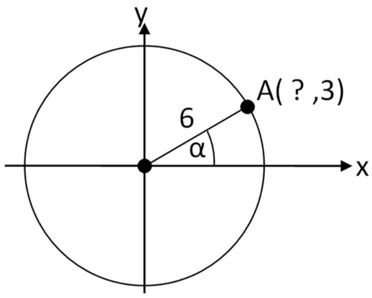
תשובה (1) נכונה.

מעגל במערכת צירים

כאשר נתון מעגל במערכת צירים, נמצא את הרדיוס שלו על ידי סגירת משולש ישר זווית מאחת מהנקודות על ההיקף, ונחשב באמצעות משפט פיתגורס.

דוגמה:

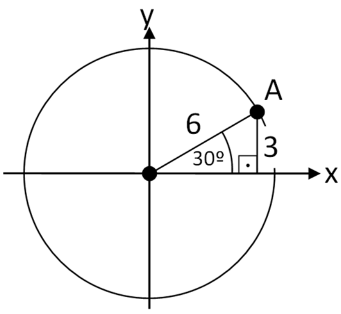
במערכת צירים נתון מעגל שמרכזו בראשית הצירים.
A היא נקודה על היקף המעגל שערך ה-y שלה הוא 3.



על פי נתונים אלה ונתוני הסרטוט,
$\alpha = ?$

(1) 15°
(2) 20°
(3) 30°
(4) 45°

פתרון -



נוריד אנך מנקודה A לציר ה-x ונקבל משולש ישר זווית, שהניצב שלו שווה למחצית היתר.

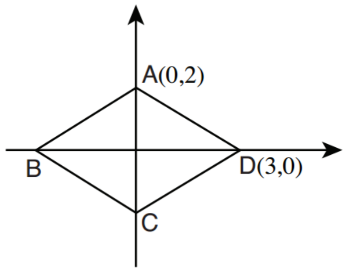
יחס צלעות זה מתקיים רק במשולש זהב, ובו הזווית שמול הניצב הקטן שווה ל- 30°.

תשובה (3) נכונה.

תרגול שאלות מבחינות אמת

1. במערכת הצירים שבסרטוט ABCD הוא מעוין.

לפי נתונים אלה והנתונים שבסרטוט,
מה שטחו של המעוין?

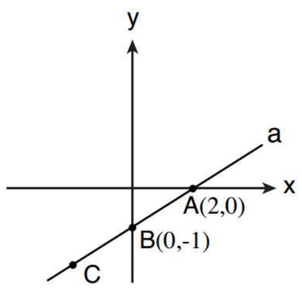


(1) 6
(2) 8
(3) 9
(4) 12

---

2. בסרטוט שלפניכם הישר a מסורטט במערכת צירים.
A ו-B הן נקודות החיתוך של הישר עם הצירים.
הנקודה C, הנמצאת על הישר a, מקיימת: CB = BA.

מה ערכי הנקודה C ?



(1) (-1 , -3)
(2) (-2 , -3)
(3) (-2 , -2)
(4) (-3 , -2)

---

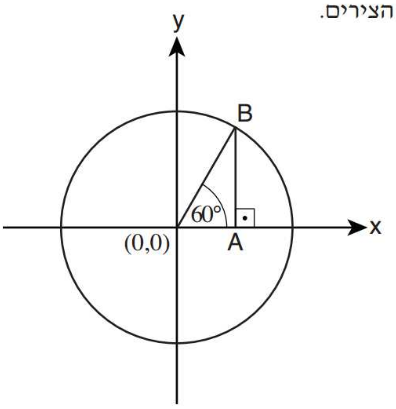
3. במערכת צירים הקטע AB עובר בראשית הצירים.
ערכי הנקודות A ו-B יכולים להיות -

(1) (-5,-4) ; (5,4)
(2) (-5,-4) ; (5,-4)
(3) (-5,-4) ; (-5,4)
(4) (5,4) ; (-5,4)

פתרתי ____________ שאלות ב ____________ דקות, ____________ תשובות נכונות

.4 במערכת הצירים שלפניכם מעגל שרדיוסו 1 ומרכזו בראשית הצירים.

לפי נתונים אלה ונתוני הסרטוט,
מה ערכי הנקודה A ?



(1) $(1\,,0)$

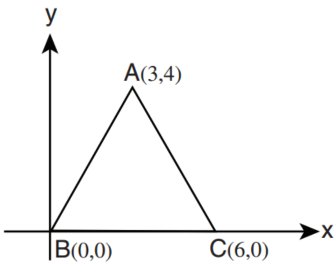
(2) $\left(\frac{1}{2}\,,0\right)$

(3) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,,0\right)$

(4) $\left(\sqrt{2}\,,0\right)$

.5 בסרטוט שלפניכם מערכת צירים.

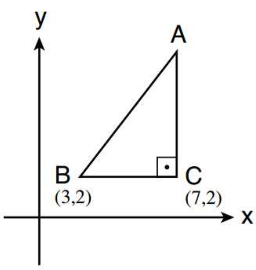
מה **היקף** המשולש ABC?



(1) 10
(2) 20
(3) 12
(4) 16

.6 בסרטוט שלפניכם ABC הוא משולש ששטחו 8 .

על פי נתונים אלה ונתוני הסרטוט,
מהם ערכי הנקודה A ?



(1) $(7\,,6)$
(2) $(7\,,4)$
(3) $(3\,,6)$
(4) $(5\,,2)$

.7 נתון ישר במערכת צירים החותך את ציר ה-x בנקודה אחת בלבד, שאינה ראשית הצירים.
הישר הנתון אינו מאונך לציר ה-x.

איזו מהטענות הבאות נכונה בהכרח?

(1) הישר יוצר משולש ישר זווית עם הצירים
(2) הישר יוצר מלבן עם הצירים
(3) הישר חותך את ציר ה-y בנקודה שמעל לציר ה-x
(4) הישר חותך את ציר ה-y בנקודה שמתחת לציר ה-x

---

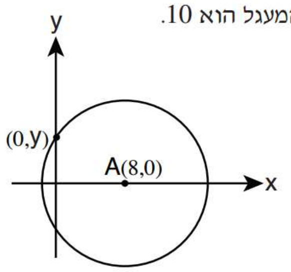
8. במערכת צירים נתונה, הישר m מקביל לציר ה-x.
איזה מזוגות הנקודות הבאים יכול להיות זוג נקודות הנמצאות על הישר m ?

(1) $(-1,-1)$; $(2,2)$
(2) $(-1,2)$; $(2,2)$
(3) $(1,1)$; $(1,2)$
(4) $(2,1)$; $(1,2)$

---

9. הנקודה A, שערכיה הם $(8,0)$, היא מרכז המעגל שבסרטוט. רדיוס המעגל הוא 10.
הנקודה $(0,y)$ נמצאת על היקף המעגל, $0 < y$.

$y = ?$



(1) 7
(2) 6
(3) 5
(4) 4

---

10. במערכת צירים נתון מעגל שמרכזו נמצא על ציר ה-x.
מעבירים משיק למעגל, כך שהערכים של נקודת ההשקה הם $(0,0)$.

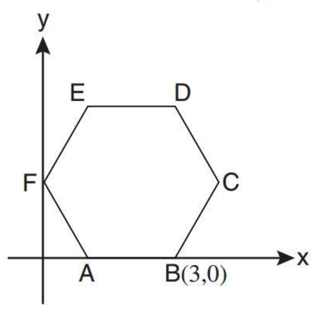
המשיק הזה הוא -

(1) ציר ה-x
(2) ישר העובר דרך ראשית הצירים והנקודה $(1,1)$
(3) ציר ה-y
(4) ישר העובר דרך ראשית הצירים והנקודה $(1,-1)$

---

11. בסרטוט שלפניכם ABCDEF הוא משושה משוכלל.
הצלע AB מונחת על ציר ה-x, והקדקוד F נמצא על ציר ה-y.

לפי נתונים אלה והנתונים שבסרטוט,
מה אורך הרדיוס של מעגל **החוסם** את המשושה?



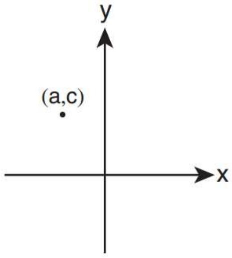
(1) 1
(2) 2
(3) 3
(4) $1\frac{1}{2}$

.12 שני ישרים מקבילים שונים a ו-b מסורטטים במערכת צירים.
הישר a עובר דרך הנקודה (0 , 0),
והישר b עובר דרך הנקודה (1 , 0).

איזו מהנקודות הבאות **אינה** יכולה להיות נקודה על הישר a ?

(1) $(-1 , -1)$ (2) $(-1 , 0)$ (3) $(2 , -1)$ (4) $(2 , 1)$

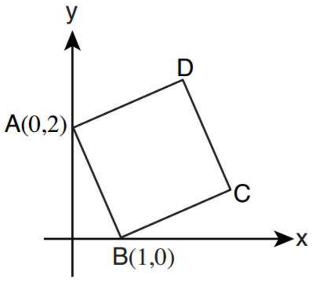
.13 לפניכם מערכת צירים שעליה מסומנת הנקודה (a,c).
נסרטט ישר העובר בנקודה (a,c) ובראשית הצירים.



איזו מהטענות הבאות נכונה בהכרח?

(1) הישר עובר בנקודה $\left(\frac{1}{a},\frac{1}{c}\right)$
(2) הישר עובר בנקודה (c,a)
(3) הישר עובר בנקודה (-c,-a)
(4) הישר עובר בנקודה (-a,-c)

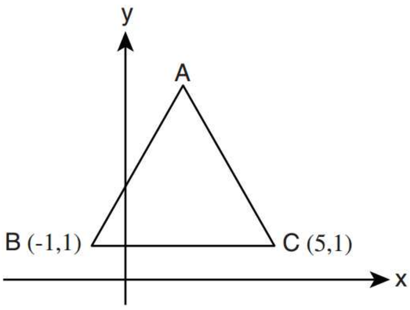
.14 במערכת הצירים שלפניכם נתון ריבוע ABCD.



על פי נתון זה ונתוני הסרטוט,
מה שטח הריבוע?

(1) אי-אפשר לדעת על פי הנתונים
(2) 6
(3) 5
(4) 4

.15 במערכת הצירים שלפניכם, ABC הוא משולש שווה-שוקיים (AB = AC).
נתון: שטח המשולש = 24
מה ערכי הנקודה A?



(1) $(2 , 12)$
(2) $(2 , 9)$
(3) $(3 , 8)$
(4) $(3 , 9)$

פתרתי ____________ שאלות ב ____________ דקות, ____________ תשובות נכונות

.16 במערכת צירים נתון ישר a העובר דרך הנקודה (3 , 2) **ואינו** חותך את ציר ה-x.

איזו מהטענות הבאות נכונה?

(1) הישר a מאונך לציר ה-y

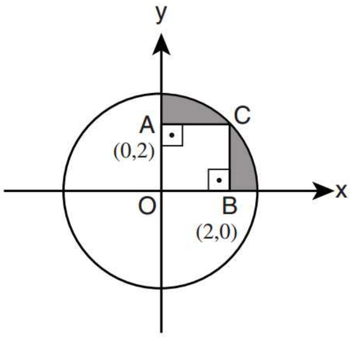
(2) הנקודה (3 , -4) נמצאת על הישר a

(3) הישר a חוצה את הזווית שבין ציר ה-x לציר ה-y

(4) הנקודה (2 , 3) נמצאת על הישר a

.17 C היא נקודה על היקף מעגל שמרכזו בראשית הצירים.
AOBC הוא ריבוע.

לפי נתונים אלה והנתונים שבסרטוט,
מה סכום השטחים הכהים?



(1) $2-\frac{\pi}{2}$

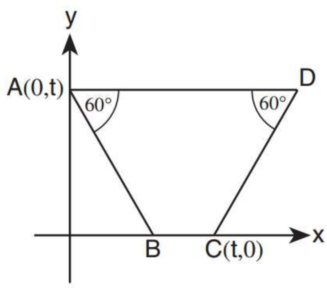
(2) $2-\pi$

(3) $\frac{\sqrt{2}}{2}\pi-4$

(4) $2\pi-4$

.18 במערכת הצירים שלפניכם, ABCD הוא טרפז.

לפי נתונים אלה והנתונים שבסרטוט,
מה ערכי הנקודה D?



(1) $(t+1\ ,\ t)$

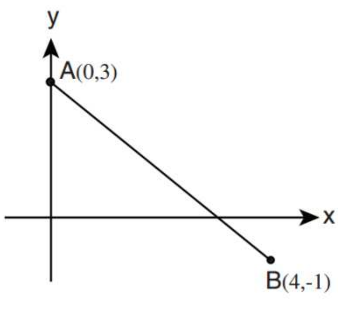
(2) $(2t\ ,\ t)$

(3) $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}t\ ,\ t\right)$

(4) $\left(t+\frac{t}{\sqrt{3}}\ ,\ t\right)$

.19 לפי הנתונים במערכת הצירים שלפניכם,

$AB = ?$



(1) $\sqrt{12}$

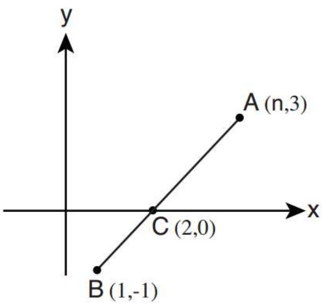
(2) $\sqrt{20}$

(3) 5

(4) $\sqrt{32}$

פתרתי ____________ שאלות ב ____________ דקות, ____________ תשובות נכונות

20. במערכת הצירים שלפניכם נתונות שתי נקודות, A ו-B.
C היא נקודת החיתוך של הישר AB עם ציר ה-x.



על פי נתונים אלה ונתוני הסרטוט,
n = ?

(1) אי-אפשר לדעת על פי הנתונים
(2) 6
(3) 5
(4) 4

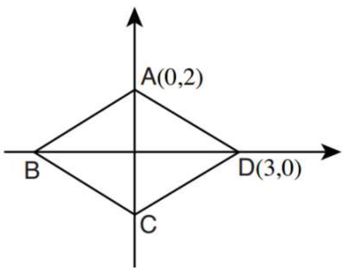
תשובות

שאלה	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
תשובה	4	3	1	2	4	1	1	2	2	3

שאלה	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
תשובה	2	2	4	3	2	1	4	4	4	3

פתרתי 20 שאלות - ______________ נכונות, ______________ אחוזי הצלחה

1. תשובה (4) נכונה. שאלה 2 מתוך 20 בפרק.

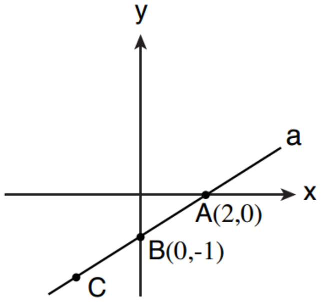


אנו מתבקשים למצוא את שטח המעוין ABCD. לשם כך, עלינו לדעת מה אורכי אלכסוניו – AC ו-BD. למען נוחות ההסבר, נסמן את ראשית הצירים באות O. ניעזר בנתונים : נתון כי ערך ה-y של נקודה A הוא 2. כלומר, $AO = 2$. במעוין, אלכסונים חוצים זה את זה. לכן, $CO = AO = 2$. לפיכך, אורך האלכסון AC הוא 4.
באופן דומה נמצא את אורך אלכסון BD. ערך ה-x של נקודה D הוא 3. כלומר, $DO = 3$. לפיכך, $BO = DO = 3$ ואורך אלכסון BD הוא 6.

משמצאנו את אורכי האלכסונים, ניתן לחשב את שטח המעוין, השווה למחצית מכפלת האלכסונים :

$$\frac{4 \cdot 6}{2} = 12$$

.2 תשובה (3) נכונה. שאלה 3 מתוך 20 בפרק.



דרך א' – ממוצע / אמצע קטע

A, B ו-C הן נקודות על ישר a, שמקיימות CB = BA. כלומר, נקודה B היא אמצע הקטע AC. ערכי אמצע קטע הם הממוצע בין ערכי קצותיו.

תחילה נמצא את ערך ה-x של נקודה C. ערך ה-x של נקודה B – 0, הוא הממוצע בין ערך ה-x של נקודה A – 2, לבין ערך ה-x של נקודה C. לפיכך, ערך ה-x של נקודה C הוא 2-, שכן הממוצע הוא נקודת האיזון בין האיברים (אם איבר אחד גדול ב-2 מהממוצע, השני יהיה קטן ב-2 מהממוצע). ניתן לחשב זאת גם באופן אלגברי:

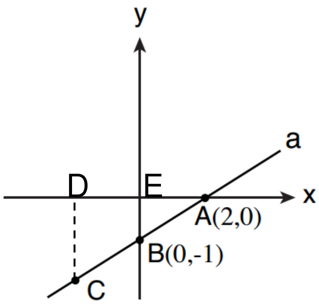
$$\frac{x+2}{2}=0$$

$$x+2=0 \quad\Rightarrow\quad x=-2$$

באופן דומה, נמצא את ערך ה-y של נקודה C. ערך ה-y של נקודה B הוא 1- , והוא הממוצע בין ערך ה-y של נקודה A (0), לבין ערך ה-y של נקודה C. לפיכך, ערך ה-y של נקודה C הוא 2- (אם איבר אחד גדול ב-1 מהממוצע, השני יהיה קטן ב-1 מהממוצע). ניתן לחשב זאת גם באופן אלגברי:

$$\frac{y+0}{2}=-1$$

$$y=-2$$



דרך ב' – דמיון משולשים

A, B ו-C הן נקודות על ישר a, שמקיימות CB = BA. עלינו לקבוע מה ערכי הנקודה C. נמתח אנך מנקודה C לציר x ונסמן את נקודת המפגש באות D. קטע CD הוא המרחק של נקודה C מציר x. נמצא את אורכו.

למען נוחות ההסבר, נסמן את ראשית הצירים באות E. יצרנו שני משולשים ישרי זווית דומים – משולש ABE ומשולש ACD (זהו מצב דמיון מוכר – קטע בתוך משולש אשר מקביל לצלע שמולו יוצר שני משולשים דומים).

כאמור, CB = BA, ולכן היתר במשולש ACD גדול פי 2 מהיתר במשולש ABE. כלומר, יחס הדמיון בין המשולשים הוא 1 : 2.

באותו אופן, גם צלע DC גדולה פי 2 מצלע EB. אורך הצלע EB הוא 1, ועל כן אורך הצלע DC הוא 2. משמע, ערך ה-y של נקודה C הוא 2- , שכן התקדמנו 2 שנתות מטה מנקודה D שערך ה-y שלה 0.

אורך הצלע EA הוא 2. צלע AD גדולה מצלע EA פי 2 ולפיכך אורכה 4. כלומר, מנקודה A, שערך ה-x שלה 2, נתקדם 4 שנתות שמאלה עד לנקודה D. לכן, ערך ה-x של נקודה D הוא 2-. ערך ה-x של נקודה C זהה לו. משמע, ערכי נקודה C הם (2- , 2-).

דרך ג' – הבנה

A, B ו-C הן נקודות על ישר a, שמקיימות CB = BA. מאחר ש-CB ו-BA הם קטעים שווים באורכם הנמצאים על אותו ישר, ההתקדמות האופקית מ-C ל-B שווה להתקדמות האופקית מ-B ל-A. כמו כן, ההתקדמות האנכית מ-C ל-B שווה להתקדמות האנכית מ-B ל-A.

ערך ה-x של נקודה B הוא 0, וערך ה-x של נקודה A הוא 2. כלומר, מ-B ל-A בוצעה התקדמות אופקית בגודל 2. על כן, בין C ל-B תבוצע התקדמות אופקית בגודל 2, ולכן ערך ה-x של נקודה C הוא 2-.

באופן דומה, ערך ה-y של נקודה B הוא 1-, וערך ה-y של נקודה A הוא 0. כלומר, מ-B ל-A בוצעה התקדמות אנכית של יחידה אחת. על כן, בין C ל-B תבוצע התקדמות אנכית של יחידה אחת. כאמור, ערך ה-y של נקודה B הוא 1-, ולכן ערך ה-x של נקודה C הוא 2-.

3. תשובה (1) נכונה. שאלה 4 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הבנה

כאשר ישר עובר דרך ראשית הצירים, כל הנקודות שעל הישר שומרות על יחס קבוע בין ערך ה-x לערך ה-y. לכן נחפש תשובה שבה היחס x : y זהה בשתי הנקודות, וזו תהיה התשובה המתאימה.

תשובה (1): $\frac{5}{4} = \frac{-5}{-4}$. **תשובה נכונה.** למען שלמות ההסבר נפסול את האחרות:

תשובה (2): $\frac{5}{-4} \neq \frac{-5}{-4}$. התשובה נפסלת.

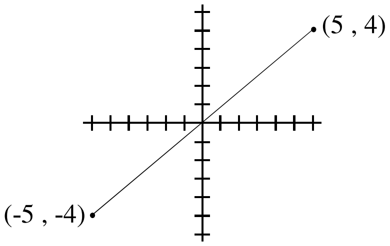
תשובה (3): $\frac{-5}{4} \neq \frac{-5}{-4}$. התשובה נפסלת.

תשובה (4): $\frac{-5}{4} \neq \frac{5}{4}$. התשובה נפסלת.

דרך ב' – ניסוי וטעייה

נסמן את הנקודות המוצעות בתשובות על מערכת צירים, ונחפש ישר אשר עובר בראשית.

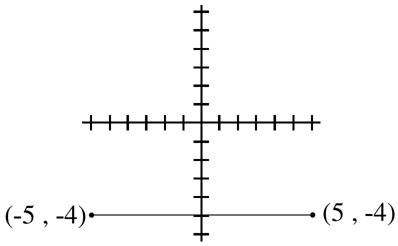
<u>נבדוק את תשובה (1):</u>



מתאים, **תשובה נכונה.**

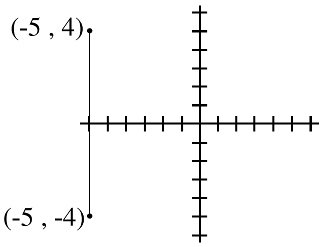
טיפ: מכיוון שהצבנו את התשובות, ברגע שמצאנו תשובה נכונה אין צורך להמשיך לבדוק את שאר התשובות, אך למען שלמות ההסבר נפסול אותן:

<u>נבדוק את תשובה (2):</u>



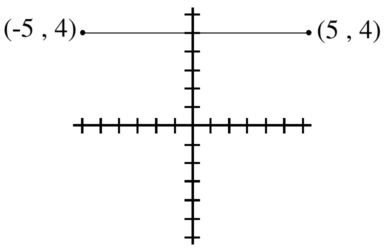
לא מתאים, התשובה נפסלת. שימו לב שניתן לפסול את התשובה גם מבלי לסרטט אותה, שכן ערכי ה-y של שתי הנקודות זהים, ואילו ערכי ה-x שלהן שונים. לפיכך, הנקודות ממוקמות על ישר המקביל לציר ה-x וכלל לא חותך אותו. כלומר, הישר AB לא יעבור בראשית הצירים במקרה זה.

<u>נבדוק את תשובה (3):</u>



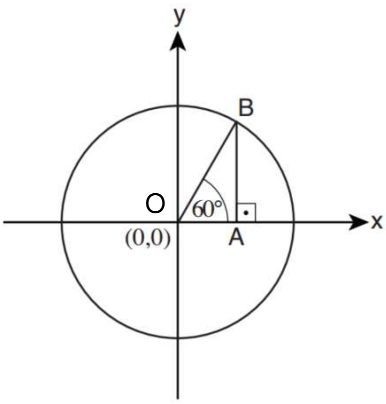
לא מתאים, התשובה נפסלת. שימו לב שניתן לפסול את התשובה גם מבלי לסרטט אותה, שכן ערכי ה-x של שתי הנקודות זהים, ואילו ערכי ה-y שלהן שונים. לפיכך, הנקודות ממוקמות על ישר המקביל לציר ה-y וכלל לא חותך אותו. כלומר, הישר AB לא יעבור בראשית הצירים במקרה זה.

<u>נבדוק את תשובה (4):</u>



לא מתאים, התשובה נפסלת. שימו לב שניתן לפסול את התשובה גם מבלי לסרטט אותה, שכן ערכי ה-y של שתי הנקודות זהים, ואילו ערכי ה-x שלהן שונים. לפיכך, הנקודות ממוקמות על ישר המקביל לציר ה-x וכלל לא חותך אותו. כלומר, הישר AB לא יעבור בראשית הצירים במקרה זה.

4. תשובה (2) נכונה. שאלה 4 מתוך 20 בפרק.



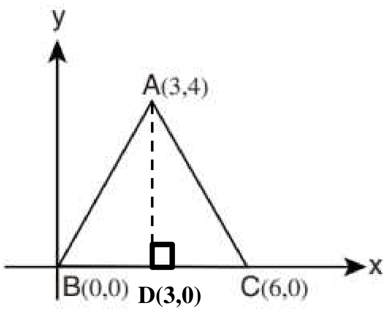
לפנינו מעגל שרדיוסו 1 ומרכזו בראשית הצירים. אנו מתבקשים למצוא את ערכי הנקודה A. למען נוחות ההסבר, נסמן את ראשית הצירים באות O.

ערך ה-y של נקודה A הוא 0, כפי שכתוב בתשובות וכן מפני שהנקודה נמצאת על ציר x. כדי למצוא את ערך ה-x של הנקודה, נמצא את אורך הצלע OA. לשם כך, נתמקד במשולש OAB. זהו משולש זהב מפני שגדלי זוויותיו $90°$, $60°$ ו-$30°$ (שכן זווית $\measuredangle OBA$ משלימה את יתר הזוויות במשולש ל-$180°$).
במשולש זהב אורך הניצב הקטן (שמול הזווית בת ה-$30°$) שווה למחצית היתר. אורך היתר, BO, הוא 1 (רדיוס המעגל). לפיכך $OA = \frac{1}{2}$, כלומר ערך ה-x של נקודה A הוא $\frac{1}{2}$.

לסיכום, ערכי הנקודה A הם $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

---

5. תשובה (4) נכונה. שאלה 4 מתוך 20 בפרק.



נוריד גובה מנקודה A לצלע BC, החותכת צלע זו בנקודה D.
ערך ה-x של נקודה D יהיה זהה לשל נקודה A $\Leftarrow$ 3 (ניתן לראות שהגובה מאונך לציר ה-x ולכן ערך ה-x קבוע). ערך ה-y של נקודה D הוא 0 מכיוון שהיא נמצאת על ציר ה-x. מכאן שערכי נקודה D הם: D(3,0).

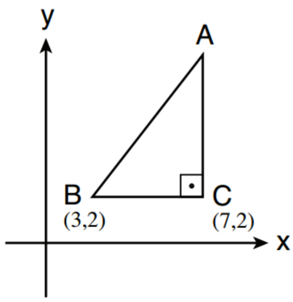
אורך הצלעות BD ו-DC הוא 3 (לפי ההתקדמות על ציר ה-x). נשים לב שהגובה הוא גם תיכון, ועל כן ABC הוא משולש שווה שוקיים.

כעת, נמצא את אורך השוקיים. כל אחת מהן היא יתר במשולש ישר זווית שאורכי ניצביו הם: $AD = 4$ (לפי ההתקדמות על ציר ה-y), $BD = 3$. לפי השלשה הפיתגורית 3-4-5, היתר הוא 5.

נחשב את היקף המשולש: $BC = 6$, ומצאנו ש-$AB = AC = 5$. לכן, ההיקף של המשולש הוא 16 $(6 + 5 + 5)$.

6. תשובה (1) נכונה. שאלה 6 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – פתרון מתמטי



ABC הוא משולש ישר-זווית ששטחו 8. עלינו לקבוע מה ערכי הנקודה A.
BC מקביל לציר x, שכן ערכי ה-y של נקודות B ו-C זהים. לכן, AC מקביל לציר y, שכן AC מאונך ל-BC. מכאן שערך ה-x של נקודה A שווה ל-7, כערך ה-x של נקודה C.

כדי לקבוע מה ערך ה-y של הנקודה, עלינו לדעת מה אורכו של ניצב AC. אורכו של BC הוא 4 מאחר שזהו ההפרש בין ערכי ה-x של נקודות B ו-C. בנוסף נתון ששטח המשולש הוא 8. נשתמש בנתון זה כדי לבנות משוואה לחישוב שטח המשולש, וממנה נחלץ את AC:

$$\frac{AC \cdot BC}{2} = 8 \quad \Rightarrow \quad \frac{AC \cdot 4}{2} = 8$$

$$2AC = 8$$

$$AC = 4$$

מצאנו כי $AC = 4$. ערך ה-y של נקודה A שווה לערך ה-y של נקודה C + אורכו של הניצב AC. כלומר, ערך ה-y של נקודה A הוא 6 $(2 + 4)$.
לסיכום, ערכי הנקודה A הם $(6 , 7)$.

דרך ב' – הצבת התשובות

כאמור, ערך ה-x של נקודה A הוא 7. לכן, התשובות היחידות המתאימות הן (1) ו-(2). נציב את ערכי ה-y הנתונים ונחפש תשובה אשר מביאה לכך ששטח המשולש הוא 8.

<u>נבדוק את תשובה (1):</u> ערכי הנקודה הם $(6 , 7)$. אם ערך ה-y של נקודה A הוא 6, הרי שאורכו של הניצב AC הוא 4 $(6 - 2)$. כאמור לעיל, אורכו של הניצב BC הוא 4. נחשב את שטח המשולש במקרה זה:

$$\frac{4 \cdot 4}{2} = 8$$

תשובה נכונה.

טיפ: מכיוון שהצבנו את התשובות, ברגע שמצאנו תשובה נכונה אין צורך להמשיך לבדוק את שאר התשובות, אך למען שלמות ההסבר נפסול את התשובה שנותרה.

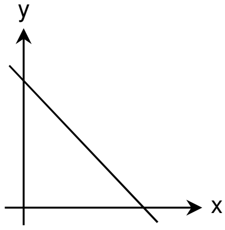
<u>נבדוק את תשובה (2):</u> ערכי הנקודה הם $(4 , 7)$. אם ערך ה-y של נקודה A הוא 4, הרי שאורכו של הניצב AC הוא 2 $(6 - 4)$. נחשב את שטח המשולש במקרה זה:

$$\frac{4 \cdot 2}{2} = 4$$

לא מתאים, התשובה נפסלת.

.7 תשובה (1) נכונה. שאלה 7 מתוך 20 בפרק.

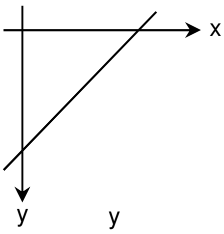
נתון ישר החותך את ציר x בנקודה אחת שאינה ראשית הצירים, והוא לא מאונך לציר x. אנו מתבקשים לקבוע איזו טענה נכונה בהכרח. נבדוק את התשובות ונפסול כל תשובה אשר קיים מקרה הסותר אותה.



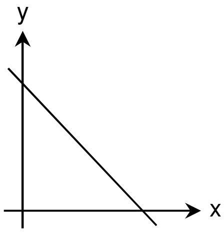
<u>נבדוק את תשובה (1) :</u> ננסה לסרטט ישר בהתאם לנתונים אשר לא יוצר משולש ישר זווית עם הצירים. נראה כי הדבר אינו אפשרי. זאת מפני שכל ישר שלא מאונך לציר x (כלומר, לא מקביל לציר y) יחתוך את 2 הצירים.
נקודות החיתוך הללו יהוו שניים מקדקודי המשולש, והקדקוד השלישי הוא ראשית הצירים. כלומר, הטענה נכונה בהכרח.

טיפ: ברגע שמצאנו תשובה נכונה אין צורך להמשיך לבדוק את שאר התשובות, אך למען שלמות ההסבר נפסול אותן :

<u>נבדוק את תשובה (2) :</u> לא ייתכן שהישר יוצר מלבן עם הצירים, שכן כדי ליצור מלבן דרושים 2 ישרים (נוסף ל-2 הצירים). התשובה נפסלת.

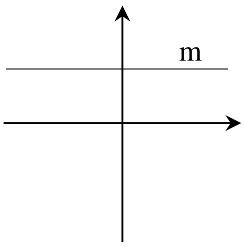


<u>נבדוק את תשובה (3) :</u> לפי הדוגמה משמאל, הישר לא בהכרח חותך את ציר ה-y בנקודה שמעל לציר ה-x. התשובה נפסלת.



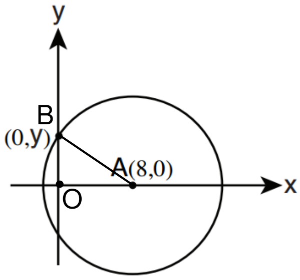
<u>נבדוק את תשובה (4) :</u> לפי הדוגמה משמאל, הישר לא בהכרח חותך את ציר ה-y בנקודה שמתחת לציר ה-x. התשובה נפסלת.

.8 תשובה (2) נכונה. שאלה 9 מתוך 20 בפרק.



נתון ישר המקביל לציר ה-x ועלינו לקבוע איזה זוג נקודות יכול להימצא על הישר. אם הישר מקביל לציר x, הרי שערך ה-y של כל נקודה על גביו קבוע (כמתואר בסרטוט). זוג הנקודות היחיד שבו ערך ה-y זהה הוא הזוג שבתשובה (2).

9. תשובה (2) נכונה. שאלה 9 מתוך 20 בפרק.



עלינו למצוא את ערכו של הנעלם y. למען נוחות ההסבר, נסמן את הנקודה (0 , y) באות B ואת ראשית הצירים באות O. נחבר את הנקודות A ו-B באמצעות רדיוס במעגל. נתון שרדיוס המעגל הוא 10, אז AB = 10. נתון שערך ה-x של נקודה A הוא 8, אז OA = 8. באופן דומה, ערך ה-y של נקודה B הוא y ועל כן OB = y.

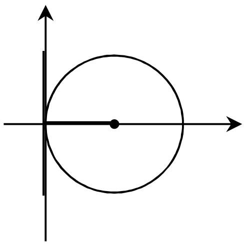
כעת ניתן להשתמש במשפט פיתגורס, שכן משולש BOA הוא משולש ישר זווית שידועים לנו אורכי שתיים מצלעותיו. נשים לב שמדובר בהרחבה של שלשה פתגורית מוכרת – 6, 8, 10. לכן y = 6.

למען שלמות ההסבר, נציג את החישוב המלא:

$$OB^2 + OA^2 = AB^2 \quad \Rightarrow \quad y^2 + 8^2 = 10^2$$
$$y^2 = 100 - 64 = 36$$
$$y = 6$$

---

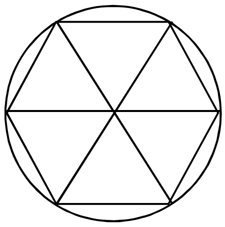
10. תשובה (3) נכונה. שאלה 10 מתוך 20 בפרק.



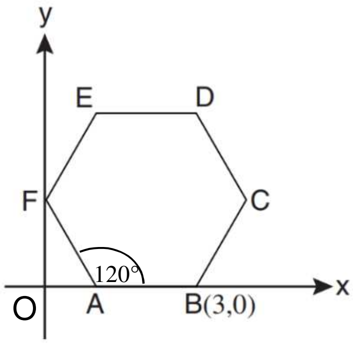
נתון מעגל שמרכזו על ציר x. מעבירים משיק למעגל בנקודה (0,0). מאחר שמרכז המעגל נמצא על ציר x, הרדיוס ממרכז המעגל עד לנקודת ההשקה נמצא על ציר x (כמתואר בסרטוט). משיק מאונך למעגל בנקודת ההשקה, ולכן המשיק הוא למעשה ציר y (שכן ציר y מאונך לציר x בנקודת המפגש ביניהם – ראשית הצירים).

הערה: ניתן לסרטט את המעגל גם בצידו השלילי של ציר ה-x

11. תשובה (2) נכונה. שאלה 11 מתוך 20 בפרק.



עלינו למצוא את אורך הרדיוס של המעגל החוסם את המשושה המשוכלל. כדי להבין מהו רדיוס המעגל, ניתן לסרטט אותו. נעביר רדיוסים ממרכז המעגל החוסם לכל קדקודי המשושה שנמצאים על היקף המעגל. מדובר בחלוקה מוכרת של משושה משוכלל ל-6 משולשים שווי-צלעות חופפים, ולכן אורך צלע המשושה שווה לאורך רדיוס המעגל החוסם. משהבנו זאת, ננסה למצוא את אורך צלע המשושה.



לשם נוחות ההסבר, נסמן את ראשית הצירים באות O. ערך הנקודה B הוא (3,0) ולפיכך אורך הקטע OB הוא 3. ננסה לקשר בין קטע זה לצלע המשושה.

דרך א' – הערכת סדר גודל
טיפ: בסרטוט ישנו משושה משוכלל ועל כן ניתן לסמוך על מהימנותו.

ניתן להבחין בכך שצלע AB (שאורכה, כאמור, שווה לאורך רדיוס המעגל החוסם) גדולה יותר מצלע OA, ומכאן שאם אורך כל קטע OB הוא 3, אורכה של AB גדול יותר ממחצית מ-3, כלומר גדול מ-$1\frac{1}{2}$, אך קטן מ-3. נפסול לפי הערכת סדר גודל זו כל תשובה שאינה מתאימה:

(1) 1	$\Rightarrow$	לא מתאים. התשובה נפסלת
(2) 2	$\Rightarrow$	**מתאים.**
(3) 3	$\Rightarrow$	לא מתאים. התשובה נפסלת
(4) $1\frac{1}{2}$	$\Rightarrow$	לא מתאים. התשובה נפסלת

פסלנו 3 תשובות, ועל כן תשובה (2) נכונה.

דרך ב' – משולש זהב
כידוע, גודלה של זווית פנימית במשושה משוכלל הוא 120°. נתבונן בזווית $\sphericalangle OAF$. היא משלימה זווית פנימית של המשושה ל-180° ועל כן גודלה 60°. לפיכך, משולש FOA הוא משולש זהב (בעל זווית 90° בראשית הצירים וזוויות 60° ו-30°).

במשולש זהב, היתר גדול פי 2 מהניצב הקטן. כלומר, FA גדול פי 2 מ-OA. FA שווה ל-AB (צלעות במשושה משוכלל) ועל כן גם AB גדול פי 2 מ-OA.

$$OA = x \ \Rightarrow \ AB = 2x$$
$$OB = x + 2x = 3x$$

מצאנו כי אורכו של OB הוא 3, ולכן:

$$3x = 3$$
$$x = 1$$

אם $x = 1$, אורך AB הוא 2 (2x), וזהו גם אורכו של רדיוס המעגל החוסם.

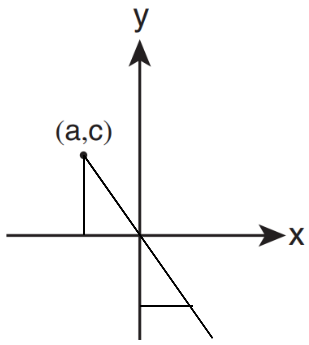
.12 תשובה (2) נכונה. שאלה 13 מתוך 20 בפרק.

משום שנאמר לנו כי הישרים a ו-b הם ישרים מקבילים <u>שונים</u>, ומשום שאין לנו הגבלה כלשהי על שיפועו של הישר b, אנו יכולים להסיק כי המצב היחיד שבלתי אפשרי יהיה אם שני הישרים יתלכדו ויהוו את אותו הישר.

מכאן, שהישר a אינו יכול לחבר בין הנקודות (0,0) ו-(1,0) כלומר אינו יכול להיות זהה לציר ה-x. זאת גם משום שישרים מקבילים אינם נפגשים, ועל כן בלתי אפשרי שהנקודה (1,0) תהיה משותפת לשני הישרים.

לכן לא תתכן נקודה נוספת על הישר שנמצאת על ציר ה-x, כלומר, שערך ה-y שלה הוא 0.

.13 תשובה (4) נכונה. שאלה 14 מתוך 20 בפרק.



עלינו למצוא נקודה נוספת הנמצאת על הישר העובר בנקודה (a , c) ובראשית הצירים.

כידוע, כאשר ישר עובר דרך ראשית הצירים, <u>היחס בין ערך ה-x לערך ה-y (x:y) נשמר בכל הנקודות על הישר</u>, ולהפך – אם היחס זהה בשתי נקודות על ישר כלשהו, ניתן להסיק שהישר עובר דרך ראשית הצירים.

למען שלמות ההסבר, נראה מדוע הדבר תמיד מתקיים:
כדי להבין אילו נקודות עשויות להיות על הישר, נסרטט אותו ונוריד אנכים לצירים מנקודות אקראיות על הישר. ניתן להבחין בכך שהמשולשים שנוצרו הם דומים כיוון שהם בעלי אותן זוויות (אובייקט "מדרגות" מוכר של משולשים דומים). מפני שהמשולשים דומים, היחס בין הניצבים בכל משולש שווה.
הניצבים של המשולשים הם למעשה ערכי ה-x וה-y של הנקודות על הישר, ולכן יחס זה הוא היחס בין ערכי x ל-y של כל נקודה. מכאן, שהיחס בין x ל-y נשמר על כל הנקודות הנמצאות על הישר.
כעת, נחפש בתשובות נקודה שהיחס בין ערך ה-x לערך ה-y שלה שווה ליחס זה בנקודה הנתונה: $\frac{a}{c}$. ניתן לזהות יחסית בקלות שהנקודה המוצגת בתשובה (4) מקיימת יחס זה, ועל כן זו **התשובה הנכונה.**

$$\frac{-a}{-c} = \frac{a}{c}$$

אם לא שמנו לב לכך, נבחן את התשובות, כאשר מומלץ להתחיל מבדיקת התשובות הנוחות ביותר.

התשובה נפסלת $\Rightarrow$ (2) $\frac{c}{a}$

התשובה נפסלת $\Rightarrow$ (3) $\frac{-c}{-a} = \frac{c}{a}$

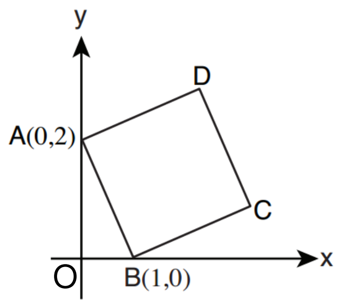
תשובה נכונה $\Rightarrow$ (4) $\frac{-a}{-c} = \frac{a}{c}$

טיפ: מכיוון שהצבנו את התשובות, ברגע שמצאנו תשובה נכונה אין צורך להמשיך לבדוק את שאר התשובות, אך למען שלמות ההסבר נפסול את תשובה (1):

התשובה נפסלת $\Rightarrow$ (1) $\frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{c}} = \frac{c}{a}$

---

14. תשובה (3) נכונה. שאלה 15 מתוך 20 בפרק.



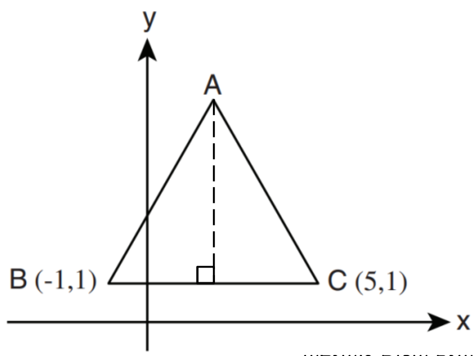
נתונה מערכת צירים ובתוכה ריבוע ABCD. כדי למצוא את שטח הריבוע, עלינו למצוא את אורכה של אחת מצלעותיו. נסמן את ראשית הצירים ב-O. מכיוון שנתונים ערכי הנקודות A ו-B, נמצא את גודלה של צלע AB באמצעות משפט פיתגורס במשולש AOB. אורכה של צלע AO הוא 2, ואורכה של צלע BO הוא 1. כעת נשתמש במשפט פיתגורס:

$$AO^2 + BO^2 = AB^2 \quad \Rightarrow \quad 2^2 + 1^2 = AB^2$$
$$5 = AB^2$$

שימו לב, מטרתנו היא מציאת שטח הריבוע, ולכן אין צורך להוציא שורש ולמצוא את אורכה של צלע AB. אם $AB^2 = 5$, הרי ששטח הריבוע הוא 5.

---

15. תשובה (2) נכונה. שאלה 15 מתוך 20 בפרק.



בשאלה זו עלינו למצוא את ערכי נקודה A ונתון שטח המשולש. לכן, נשתמש בנתון זה ובאורכה של צלע BC כדי לחשב את גובה המשולש.

נתחיל במציאת אורך צלע BC. נקודות C ו-B בעלות אותו ערך y ולכן נבחן את השינוי בערכי ה-x שלהן בלבד. מנקודה B עד לציר ה-y התקדמנו צעד אחד ומציר ה-y עד לנקודה C התקדמנו עוד 5 צעדים. בסך הכול אורך BC הוא 6.

ידוע ששטח המשולש שווה 24. נחשב את גובהו על ידי הנוסחה לחישוב שטח משולש:

$$\frac{6 \cdot h}{2} = 24$$
$$3h = 24$$
$$h = 8$$

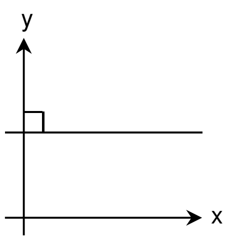
גובה המשולש הוא 8. ערך ה-y של נקודות B ו-C הוא 1. מכאן שמ-1 יש התקדמות של 8 צעדים נוספים על ציר ה-y. נחשב את ערך ה-y של נקודה A: $1 + 8 = 9$.

כעת נתמקד במציאת ערך ה-x של הנקודה. מדובר במשולש שווה שוקיים ולכן הגובה הוא גם תיכון. אורך כל הבסיס הוא 6 ועל כן חצי ממנו הוא 3. מנקודה C ננוע 3 צעדים שמאלה. נחשב את ערך ה-x של נקודה A: $5 - 3 = 2$.

לסיכום, ערכי נקודה A הם (2 , 9)

---

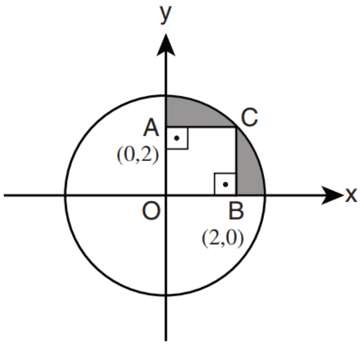
16. תשובה (1) נכונה. שאלה 16 מתוך 20 בפרק.



נתון ישר העובר בנקודה (2 , 3) ואינו חותך את ציר x. ישר הוא אינסופי, ולכן כדי לא לחתוך את ציר x, הוא מוכרח להיות מקביל לו. לפיכך, הישר מאונך לציר y, כמתואר בסרטוט.

---

17. תשובה (4) נכונה. שאלה 16 מתוך 20 בפרק.



דרך א׳ – הערכת סדר גודל
נבחן את התשובות ונפסול כל תשובה שאינה הגיונית. ראשית, אנו יכולים להחליף את π בערכו המספרי (כ-3), ולפסול תשובות שאינן הגיוניות.

(1) $2-\frac{\pi}{2} \approx 2-\frac{3}{2} \approx \mathbf{\frac{1}{2}}$

(2) $2-\pi \approx 2-3 \approx \mathbf{-1}$

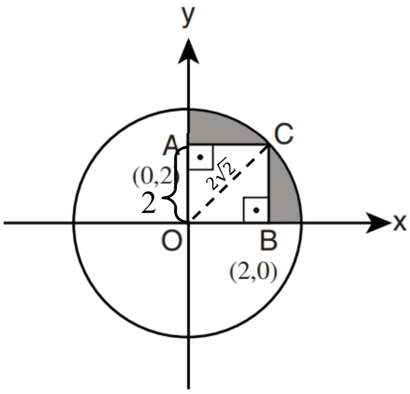
(3) $\frac{\sqrt{2}}{2}\pi-4 \approx \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 3-4 \approx \frac{1.4}{2}\cdot 3-4 \quad \Rightarrow$ ניתן לשים לב שהכפלת 3 בשבר פשוט מקטינה את 3, ועל כן כאשר נחסר ממכפלה זו 4 נקבל **תוצאה שלילית**.

(4) $2\pi-4 \approx 2\cdot 3-4 \approx \mathbf{2}$

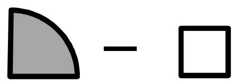
ניתן לפסול את תשובות (2) ו-(3), שהרי לא ייתכן ששטח יהיה מספר שלילי.

כעת ננסה להכריע בין התשובות שנותרו. ניתן להבין שהסרטוט הנתון מקובע ותואם את הנתונים, ולכן ניתן להסתמך על הפרופורציה בין גדלי השטחים שבו (מדובר בצורות משוכללות). את שטח הריבוע ניתן לחשב בקלות – אורך צלעו היא 2, ולכן שטחו הוא 4 (2^2). לפי תשובה (1), סכום השטחים הכהים הוא כ-$\frac{1}{2}$. ניתן להבין כי הדבר אינו תואם את הסרטוט; לא ייתכן ששני השטחים הכהים יחד מהווים רק שמינית משטח הריבוע. לעומת זאת, לפי תשובה (4) סכום השטחים הכהים הוא כ-2, ואכן נראה שהם שווים לכמחצית מהריבוע. **תשובה (4) נכונה.**

<u>כמו כן, ניתן לפסול את תשובות (1) ו-(2) גם על פי התבנית של הביטוי המוצג בהן</u>; ניתן לראות שעל מנת למצוא את השטח האפור, עלינו לחסר משטח הגזרה (ביטוי שיכיל π) את שטחו של הריבוע (מספר חופשי, שניתן גם למצוא בקלות, כאמור, שגודלו 4). תשובות אלו אינן תואמות תבנית זו.



דרך ב׳ – חישוב
על מנת למצוא את סכום השטחים הכהים נבנה "תכנית פעולה": עלינו לחשב את שטחו של רבע מעגל ולחסר ממנו את שטח הריבוע AOBC.



נתון כי נקודה A נמצאת על ציר ה-y בגובה 2. ניתן להסיק כי האורך של AO הוא 2. שטח הריבוע, אם כן, הוא 4 ($2^2=4$).

כעת, נחשב את שטח הגזרה. לשם כך נמצא ראשית את המעגל כולו, ולכן עלינו למצוא מהו רדיוס המעגל. נעביר את רדיוס OC, אשר מהווה אלכסון בריבוע. אנו יודעים שאלכסון בריבוע מחלק אותו לשני משולשי כסף (ישרי זווית ושווי שוקיים). במשולש כסף היתר גדול פי $\sqrt{2}$ מהניצבים. אורך ניצבי המשולש הוא 2, ולכן אורך היתר OC הוא $2\sqrt{2}$. נחשב את שטח המעגל:

$$r^2\pi=\left(2\sqrt{2}\right)^2\pi=4\cdot 2\cdot \pi=8\pi$$

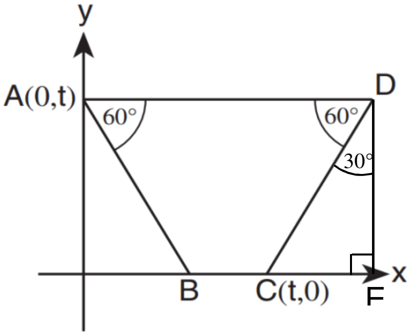
הגזרה מהווה רבע מהמעגל, ולכן שטחה:

$$\frac{1}{4}\cdot 8\pi=2\pi$$

כאמור לעיל, השטחים הכהים שווים לשטח הגזרה (2π) פחות שטח הריבוע (4), כלומר:

$$2\pi-4$$

18. תשובה (4) נכונה. שאלה 17 מתוך 20 בפרק.



בשאלה זו עלינו למצוא את ערכי נקודה D.
ערך ה-y של הנקודה ידוע וזהה בכל התשובות (t), מאחר שהוא שווה לערך ה-y של נקודה A.

נתמקד במציאת ערך ה-x של נקודה D. לשם כך, נוריד אנך מהנקודה לציר x. לצורך נוחות ההסבר נסמן נקודה זו באות E.

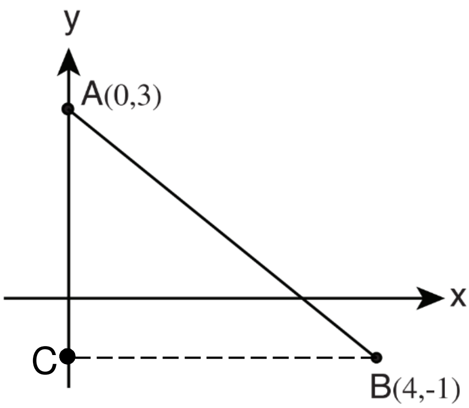
נתמקד במשולש ישר הזווית CED. זווית ∢CDE שווה $30°$ (משלימה את זווית ∢ADC ל-$90°$). כלומר, משולש זה הוא משולש זהב – זהו משולש בעל זווית ישרה וזווית בת $30°$. אורך ניצב DE שווה לערך ה-y של נקודה D – t, וזהו הניצב הגדול במשולש. כדי לחשב את גודל הניצב הקטן CE עלינו לחלק את אורך הניצב הגדול DE ב- $\sqrt{3}$ (ע"פ הפרופורציה של משולש זהב):

$$CE = \frac{DE}{\sqrt{3}} = \frac{t}{\sqrt{3}}$$

המרחק של נקודה D על ציר ה-x מורכב מהמרחק מראשית הצירים עד נקודה C ומאורך צלע CE; נתון כי שיעור ה-x של נקודה C הוא t, ועל כן המרחק עד נקודה זו הוא t, אורך צלע CE הוא $\frac{t}{\sqrt{3}}$ כפי שמצאנו לעיל. מכאן שהמרחק של נקודה D על ציר ה-x הוא $t + \frac{t}{\sqrt{3}}$, ועל כן ערכי נקודה D הם $\left(t + \frac{t}{\sqrt{3}}, t\right)$.

---

19. תשובה (4) נכונה. שאלה 19 מתוך 20 בפרק.



עלינו למצוא את אורכו של קו AB. שיעורי הנקודות A ו-B ידועים, ועל כן אנו יכולים לבנות משולש ישר זווית שאת אורכי ניצביו ניתן לחשב. נשרטט קו מקביל לציר x מנקודה B עד לציר y. למען נוחות ההסבר, נקרא לנקודת המפגש בין קו זה לציר y – C. ערכיה של נקודה זו הם (0,-1).

אורכו של ניצב CB הוא 4, כיוון שההפרש בין ערכי ה-x של נקודות B ו-C הוא 4 (0 – 4). אורכו של ניצב AC גם הוא 4 כיוון שזהו ההפרש בין ערכי ה-y של נקודות A ו-C ((1-) – 3).

לאחר שמצאנו את אורכי הניצבים, ניתן למצוא את אורך היתר AB.

דרך א' – משפט פיתגורס

$$4^2 + 4^2 = AB^2$$
$$16 + 16 = AB^2 \quad \Rightarrow \quad 32 = AB^2$$

נוציא שורש:

$$AB = \sqrt{32}$$

דרך ב' – משולש כסף

AC ו-CB שווים. כלומר, משולש ACB הוא משולש ישר זווית שווה שוקיים. משמע, מדובר במשולש כסף. ידוע לנו שבמשולש כסף היתר גדול פי $\sqrt{2}$ מהניצבים.

$$AB = 4\sqrt{2}$$

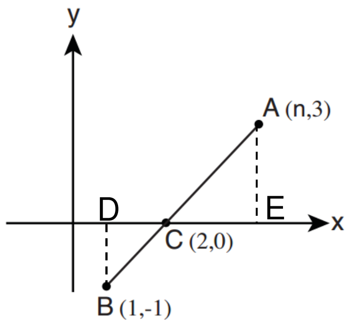
מכיוון שאין תשובה כזו, אלא רק תשובות בהן כל המספרים נמצאים תחת השורש, נכניס את 4 לתוך שורש. 4

$$AB = 4\sqrt{2} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{16 \cdot 2} \quad \Rightarrow \quad AB = \sqrt{32}$$

---

20. תשובה (3) נכונה. שאלה 20 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – משולשי כסף



לפנינו מערכת צירים שבה מוצגות הנקודות A, B ו-C על ישר אחד. אנו מתבקשים למצוא את n, כלומר את ערך ה-x של הנקודה A. נתון ערך ה-x של נקודה C. לפיכך, אם נדע מה ההתקדמות האופקית מנקודה C לנקודה A, נוכל לחשב ערך זה.

נעביר אנכים לציר x מנקודה A ומנקודה B. למען נוחות ההסבר, נסמן את נקודות המפגש של האנכים עם הצירים באותיות D ו-E, כמתואר בסרטוט. מפני שישר BD מקביל לציר y, ערך ה-x של כל הנקודות על הישר זהה, ולכן ערך ה-x של נקודה D הוא 1. באופן דומה, ערך ה-x של נקודה E הוא n, שכן גם ישר AE מקביל לציר y.

תחילה, נתמקד במשולש BDC, מפני שבמשולש זה נמצאים מרבית הנתונים. אורכה של צלע BD הוא 1. אורכה של צלע DC הוא 1 מאחר שזהו ההפרש בין ערכי ה-x של קצותיה (1 – 2). לפיכך, משולש BDC הוא משולש כסף, וגודל זוויות הבסיס שלו $45°$.

כעת נתמקד במשולש AEC. $\measuredangle ACE = \measuredangle BCD = 45°$, שכן אלה זוויות קודקודיות. לפיכך, משולש AEC הוא משולש כסף (שכן שתיים מזוויותיו בנות $90°$ ו-$45°$, ולכן גודל הזווית הנותרת הוא בהכרח $45°$).מכאן שניצבי המשולש שווים : CE = AE. מכיוון שנתון לנו ערך ה-y של נקודה A, נדע שאורך AE שווה 3.
מכאן ש-CE = AE = 3.

מצאנו כי גודלה של צלע CE הוא 3. כלומר, זו ההתקדמות על ציר x מנקודה C (שערך ה-x שלה הוא 2) עד לנקודה E (שערך ה-x שלה n). לפיכך :

$n = 2 + 3 = 5$

דרך ב' – דמיון

נעביר אנכים לציר x מנקודות A ו-B ונסמן אותם באותיות D ו-E. כאמור לעיל, ערכי נקודות אלה הם D (1 , 0) ו-E (n , 0). שני המשולשים שלפנינו דומים (אובייקט שעון חול). ניעזר ביחס הדמיון כדי למצוא את גודלו של ניצב CE, וכך נוכל למצוא את ערך הנעלם n.

מצאנו לעיל את גדלי הצלעות הבאות :

DB = 1 , DC = 1 , AE = 3

היחס בין הניצבים במשולש BDC הוא 1 : 1 . לפיכך, יחס הניצבים במשולש AEC הוא 1 : 1, כלומר הניצבים שווים, ואז AE = CE = 3. לכן זו ההתקדמות על ציר x מנקודה C (שערך ה-x שלה 2) עד לנקודה E (שערך ה-x שלה n). לפיכך :

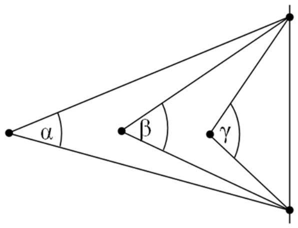
$n = 2 + 3 = 5$

הבנה גיאומטרית

זווית פתיחה

הרעיון בשאלות אלו הוא שככל שזווית "נפתחת" יותר, כך היא יותר גדולה. השאלה היא, מה גורם לזווית "להיפתח"? במצב בו הקרניים של הזווית (הקווים שתוחמים את הזווית) נמצאים על ישר כלשהו, ככל שנרחיק את קודקוד הזווית, כך הזווית תקטן, שכן היא הולכת ו"נסגרת".

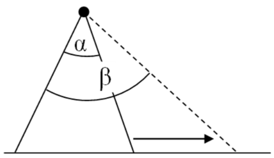
לדוגמה:



$\alpha < \beta < \gamma$

כאשר הקודקוד של הזווית קבוע, ככל שהמרחק בין קצות הקרניים יגדל, כך הזווית "תיפתח" יותר, ותגדל.

לדוגמה:



$\alpha < \beta$

סרטוט גמיש

"סרטוט גמיש" הוא כינוי לסרטוט שאינו מדויק, שניתן לשנות אותו - לשנות זוויות, להאריך קווים, להזיז נקודות... בקיצור - אפשר למתוח אותו לכיוונים שונים, ומכאן השם "סרטוט גמיש".

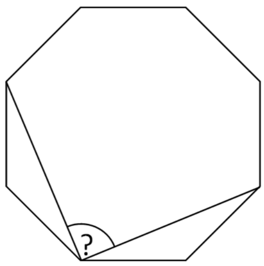
כאשר אנו נתקלים **בסרטוט שאינו גמיש - ניתן להסתמך עליו**, שכן סרטוט שאינו גמיש חייב להישאר בצורה שלו (אי אפשר לשנות אותו), ומותר להסיק ממנו איזו זווית גדולה יותר, איזה קו ארוך יותר, ואפילו מה הגודל של זווית מסוימת (ממש ככה, לפי העין...).

בדרך כלל, סרטוטים עם צורות משוכללות **לא** יהיו גמישים מכיוון שצורה משוכללת היא... משוכללת - אי אפשר לשנות אותה.

דוגמה:

בסרטוט שלפניכם מתומן משוכלל.

מה גודלה של הזווית המסומנת בסימן שאלה?



(1) $60°$

(2) $120°$

(3) $75°$

(4) $90°$

פתרון -

מכיוון שמדובר במתומן משוכלל, הסרטוט אינו גמיש ולכן אפשר להסתמך עליו.

אמנם ניתן לחשב את זווית המתומן, להעביר אלכסונים נוספים ולחשב את הזווית המבוקשת (האלכסונים במצולע משוכלל מחלקים את הזווית לזוויות שוות), אולם אין בכך כל צורך.

אפשר לראות בברור כי הזווית היא בת $90°$.

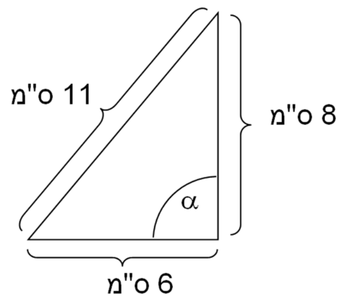
תשובה (4) נכונה.

מיקס עם עוגן (מיקס = מינימום-מקסימום)

בשאלות אלו נבדקת ההבנה של מה קורה כאשר משנים זווית או צלע ביחס לעוגן מסוים - האם הזווית גדלה? האם היא קטנה? האם הצלע גדלה/קטנה וכדומה.

מדובר בעצם בשאלות מינימום-מקסימום (מיקס), וההבנה כיצד שינוי של נתון אחד משפיע על ערכו של נתון אחר.

דוגמה:
בסרטוט שלפניכם משולש.



על פי נתון זה ונתוני הסרטוט,
איזו מהטענות הבאות נכונה בהכרח?

(1) $\alpha < 90^\circ$
(2) $90^\circ < \alpha$
(3) $\alpha = 90^\circ$
(4) אף לא אחת מהטענות הנ"ל נכונה בהכרח

פתרון -
מכיון ש-α מושווית בתשובות ל- 90°, ה"עוגן" שלנו הוא 90°.
עלינו לבדוק האם במצב זה של הסרטוט α גדולה מ-, קטנה מ- או שווה ל- 90°.
כדי לעשות זאת, מומלץ להבין מה קורה במצב ה"עוגן", כאשר $\alpha = 90^\circ$.

במצב כזה, מדובר במשולש ישר-זווית, ולכן הוא מקיים את השלשה הפיתגורית 6:8:10. בהשוואה למצב העוגן, בסרטוט שלפנינו ניתן לראות כי היתר גדול יותר, זאת אומרת שזווית α "נפתחה", ולכן היא גדולה יותר מ- 90°.

תשובה (2) נכונה.

תרגול שאלות מבחינות אמת

.1 שלושה מעגלים מסורטטים באופן שכל אחד מהם משיק לשניים האחרים. אורכם של הרדיוסים של שניים מהמעגלים שווה זה לזה, ואורכו של רדיוס המעגל השלישי שונה מהם. מחיבור מרכזי המעגלים מתקבל משולש.

המשולש הוא **בהכרח** -

(1) ישר-זווית

(2) קהה-זווית

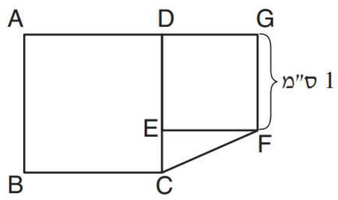
(3) משולש שכל אחת מצלעותיו בעלת אורך שונה

(4) שווה-שוקיים

.2 ABCD ו-DEFG הם שני ריבועים צמודים, כך שהנקודה E נמצאת על הצלע CD.

על פי נתונים אלה ונתוני הסרטוט,

$CF = ?$



(1) $\frac{3}{2}$ ס"מ

(2) 2 ס"מ

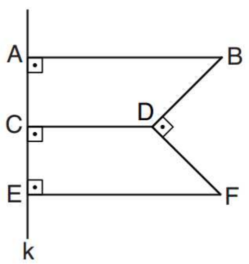
(3) $\sqrt{3}$ ס"מ

(4) אי-אפשר לדעת על פי הנתונים

.3 AB, CD ו-EF הם שלושה קטעים המאונכים לישר k.

נתון: $\sphericalangle BDF = 90°$

על פי נתונים אלה ונתוני הסרטוט,
איזו מהטענות הבאות נכונה בהכרח?



(1) $AB = EF$

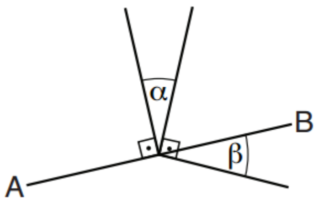
(2) $AC = CE$

(3) $BD = DF$

(4) אף לא אחת מהטענות הנ"ל נכונה בהכרח

.4 AB הוא קו ישר.

על פי נתון זה ונתוני הסרטוט,
איזו מהטענות הבאות נכונה בהכרח?



(1) $\beta < \alpha$

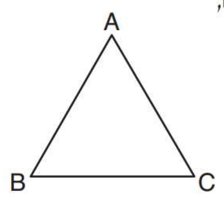
(2) $\beta > \alpha$

(3) $\beta = \alpha$

(4) אף לא אחת מהטענות הנ"ל נכונה בהכרח

פתרתי ____________ שאלות ב ____________ דקות, ____________ תשובות נכונות

.5 ABC הוא משולש שכל זוויותיו חדות. מסמנים נקודה D על הצלע BC, כך שהיא הנקודה הקרובה ביותר ל-A מכל הנקודות שעל הצלע BC.



איזו מהטענות הבאות נכונה בהכרח?

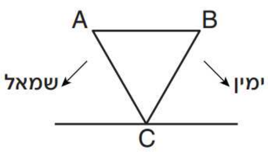
(1) $\sphericalangle BAD = \sphericalangle DAC$

(2) $BD = DC$

(3) $AD \perp DC$

(4) אף אחת מהטענות הנ"ל אינה נובעת בהכרח מהנתונים

.6 משולש שווה-צלעות ABC "עומד" כך שהקדקוד C מונח על הרצפה.
המשולש מסתובב מצד לצד כשהקדקוד C קבוע על הרצפה -
תחילה לצד שמאל, עד שהנקודה A מונחת על הרצפה, ואז לצד ימין,
עד שהנקודה B מונחת על הרצפה (ראו סרטוט).



איזו צורה תהיה לקו הדמיוני שיסרטטו הנקודות A ו-B במהלך הסיבוב?

(1)


(2)


(3)


(4)


.7 לרועי יש ריבוע נייר, והוא גוזר אותו לשני חלקים לאורך קו ישר אחד.

רועי לא יוכל לקבל -

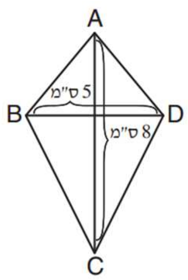
(1) 2 משולשים

(2) 2 טרפזים

(3) 2 מעוינים

(4) 2 מלבנים

.8 ABCD הוא דלתון ($AB = AD$, $CB = CD$).



נתון: $AC = 8$ ס"מ
$BD = 5$ ס"מ

מה **היקף** הדלתון (בס"מ)?

(1) 16

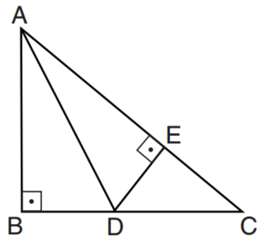
(2) 26

(3) 30

(4) אי-אפשר לדעת על פי הנתונים

פתרתי ___________ שאלות ב ___________ דקות, ___________ תשובות נכונות

9. בסרטוט שלפניכם ABC הוא משולש ישר-זווית.
נתון: AD חוצה את הזווית $\sphericalangle BAC$
$DE \perp AC$

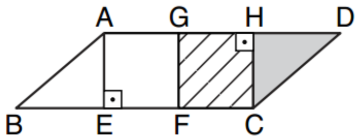


איזה מן האי-שוויונות הבאים נכון בהכרח?

(1) $AB < AE$
(2) $AE < AB$
(3) $DC < BD$
(4) $BD < DC$

---

10. ABCD מקבילית שבתוכה שני ריבועים חופפים: AEFG ו-GFCH.

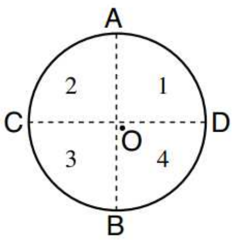


על פי נתונים אלו ונתוני הסרטוט,
איזו מהטענות הבאות נכונה בהכרח?

(1) שטח המשולש הכהה גדול משטח הריבוע המקווקו
(2) שטח המשולש הכהה קטן משטח הריבוע המקווקו
(3) שטח המשולש הכהה שווה לשטח הריבוע המקווקו
(4) אף לא אחת מהטענות הנ"ל נכונה בהכרח

---

11. AB ו-CD הם מיתרים **מאונכים** זה לזה במעגל,
המחלקים אותו לארבעה חלקים.
הנקודה O, הנמצאת בתוך שטח 4, היא מרכז המעגל.

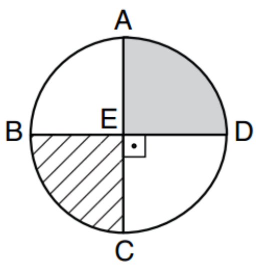


על פי נתונים אלו ונתוני הסרטוט,
איזו מהטענות הבאות נכונה בהכרח?

(1) שטח 1 גדול משטח 2
(2) שטח 1 קטן משטח 2
(3) שטח 1 שווה לשטח 2
(4) אף לא אחת מהטענות הנ"ל נכונה בהכרח

---

12. E היא נקודת החיתוך של המיתרים AC ו-BD.
$AE = EC$



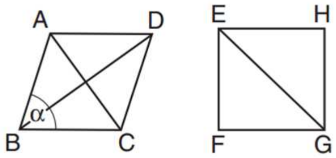
על פי נתונים אלו ונתוני הסרטוט,
איזו מהטענות הבאות נכונה בהכרח?

(1) השטח הכהה גדול מהשטח המקווקו
(2) השטח הכהה קטן מהשטח המקווקו
(3) השטח הכהה שווה לשטח המקווקו
(4) אף לא אחת מהטענות הנ"ל נכונה בהכרח

פתרתי ______________ שאלות ב ______________ דקות, ______________ תשובות נכונות

13. בסרטוט שלפניכם ABCD הוא מעוין ו- EFGH הוא ריבוע.

נתון: $EF = AB$
$\alpha = 50°$

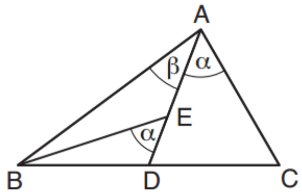


איזו מהטענות הבאות נכונה?

(1) $AB < AC$
(2) היקף הריבוע גדול מהיקף המעוין
(3) שטח הריבוע גדול משטח המעוין
(4) $BD < EG$

---

14. AD הוא תיכון במשולש ABC.



על פי נתון זה ונתוני הסרטוט,
איזו מהטענות הבאות נכונה בהכרח?

(1) $\beta < \alpha$
(2) $\beta > \alpha$
(3) $\beta = \alpha$
(4) אף לא אחת מהטענות הנ"ל נכונה בהכרח

---

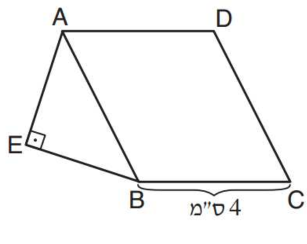
15. אירית ציירה 7 **קטעים** מקבילים זה לזה, ואחר כך ציירה עוד 7 קטעים המאונכים להם.

מה מספר נקודות החיתוך השונות שעשויות להתקבל בין הקטעים?

(1) כל מספר בין 0 ל-49
(2) כל מספר אפשרי
(3) כל כפולה של 7
(4) רק 49

---

16. בסרטוט שלפניכם מקבילית ABCD.
AEB הוא משולש ישר-זווית ושווה שוקיים ששטחו $\frac{25}{2}$ סמ"ר.



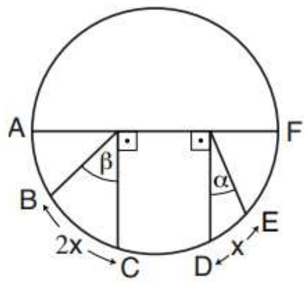
לפי נתונים אלה והנתונים שבסרטוט,
מה שטח המקבילית (בסמ"ר)?

(1) 15
(2) 20
(3) 25
(4) אי-אפשר לדעת לפי הנתונים

פתרתי ____________ שאלות ב ____________ דקות, ____________ תשובות נכונות

17. AF הוא קוטר במעגל.
הקשת BC גדולה פי 2 מהקשת DE.

על פי נתונים אלו ונתוני הסרטוט,
איזו מהטענות הבאות נכונה בהכרח?



(1) $\beta < 2\alpha$
(2) $\beta > 2\alpha$
(3) $\beta = 2\alpha$
(4) אף לא אחת מהטענות הנ"ל נכונה בהכרח

---

18. נתון מלבן שהיקפו a וריבוע שהיקפו a (המלבן אינו ריבוע).
איזו מהטענות הבאות נכונה בהכרח?

(1) שטח הריבוע גדול משטח המלבן
(2) שטח הריבוע קטן משטח המלבן
(3) שטח הריבוע שווה לשטח המלבן
(4) אף לא אחת מהטענות הנ"ל נכונה בהכרח

---

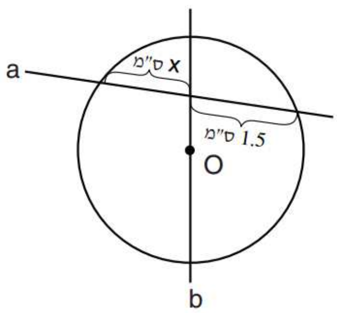
19. מה מספר המעוינים השונים שהיקפם 20 ס"מ ושטחם 12 סמ"ר?

(1) 1
(2) 2
(3) 0
(4) אין-סוף

---

20. בסרטוט שלפניכם הישרים a ו-b חותכים מעגל שמרכזו O ורדיוסו 2 ס"מ.
הישר b עובר דרך הנקודה O, והישר a אינו עובר דרך הנקודה O.

על פי נתונים אלה ונתוני הסרטוט,
איזו מהטענות הבאות בנוגע ל-x נכונה בהכרח?



(1) $x < 2.5$
(2) $3 < x$
(3) $1.5 < x$
(4) $x < 1.5$

פתרתי ______ שאלות ב ______ דקות, ______ תשובות נכונות

תשובות

שאלה	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
תשובה	4	4	4	3	3	1	3	4	4	4

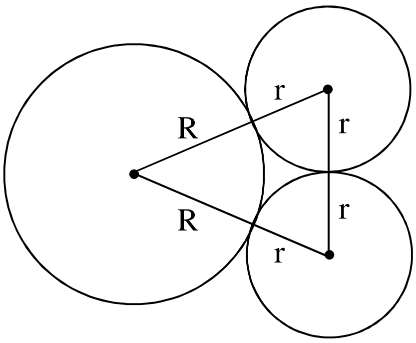
שאלה	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
תשובה	1	4	3	1	1	4	4	1	1	1

פתרתי 20 שאלות - ______________ נכונות, ______________ אחוזי הצלחה

.1 תשובה (4) נכונה. שאלה 2 מתוך 20 בפרק.

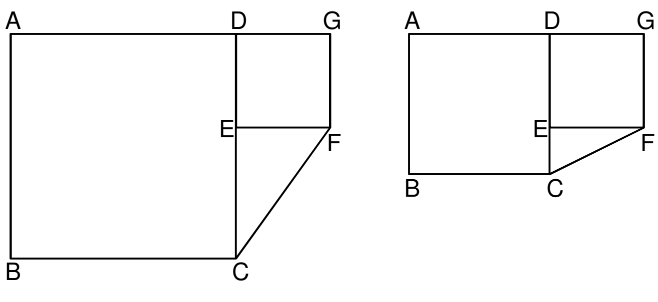
נשרטט את המעגלים המתוארים. ידוע ששלושת המעגלים משיקים זה לזה, וכן ששניים מהם זהים. חיבור המרכזים של שלושתם יוצר שתי צלעות השוות זו לזו (ומורכבות מ-r ו-R), וצלע אחת שונה המורכבת מרדיוסי המעגלים הזהים. על כן, מדובר במשולש שווה שוקיים.

יש מי שהבין זאת גם ללא הסרטוט, אך אם לא הצלחתם לענות על השאלה בלעדיו, מוטב לסרטט.



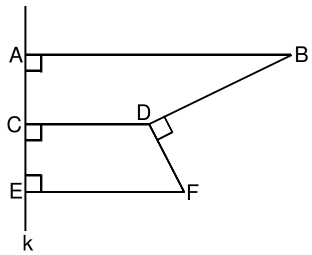
.2 תשובה (4) נכונה. שאלה 7 מתוך 20 בפרק.

נתונים שני ריבועים צמודים שקדקודיהם חוברו באמצעות קטע CF. עלינו למצוא את אורכו. נשים לב כי הגודל היחיד הנתון הוא אורך צלע הריבוע הקטן (1 ס״מ). אורכה של צלע הריבוע הגדול לא תלוי בכך, ולכן הוא גמיש, כלומר גודל הריבוע יכול להשתנות כרצוננו, כמתואר בסרטוט. כאשר גודל הריבוע משתנה, גם אורכו של קטע CF משתנה. לפיכך, לא ניתן לקבוע מה אורכו.

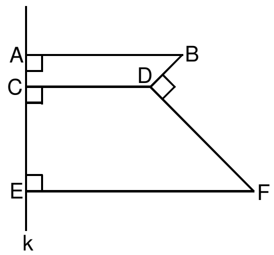


.3 תשובה (4) נכונה. שאלה 10 מתוך 20 בפרק.

נתונים שלושה קטעים המאונכים לישר k ונתון כי זווית $\measuredangle BDF$ ישרה. עלינו לקבוע איזו טענה נכונה בהכרח. לשם כך, נבדוק את התשובות וננסה לפסול אותן. נפסול תשובה על ידי הוכחה כי הטענה המוצגת בה אינה נכונה בהכרח. כלומר, נראה כי ישנו מצב התואם את הנתונים וסותר את הטענה.



<u>נבדוק את תשובה (1) :</u> AB אינו בהכרח שווה ל-EF. ניתן לקצר אחד מהקטעים ולהאריך את השני, ובאופן זה כל הנתונים עדיין מתקיימים (כאמור, שלושת הקטעים מאונכים לישר k וזווית $\measuredangle BDF$ ישרה). התשובה נפסלת.

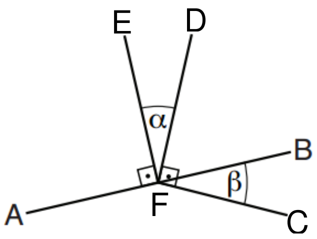


<u>נבדוק את תשובה (2) :</u> AC אינו בהכרח שווה ל-CE. ניתן להזיז את קטע CD מטה או מעלה כרצוננו, תוך שמירה על הנתונים. כך, AC יהיה גדול או קטן מ-CE. התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (3) :</u> BD אינו בהכרח שווה ל-DF, כפי שראינו בשתי התשובות הקודמות. התשובה נפסלת.

פסלנו את תשובות (1), (2) ו-(3). לפיכך, תשובה (4) נכונה.

.4 תשובה (3) נכונה. שאלה 10 מתוך 20 בפרק.



לפנינו זוויות α ו-β, ועלינו לקבוע מה הקשר ביניהן. למען נוחות ההסבר, נסמן את קצוות הקטעים באותיות כמתואר בסרטוט. נתמקד בזווית הישרה $\measuredangle DFC$. זווית זו מורכבת מ-β ומזווית $\measuredangle DFB$. לפיכך :

$$\measuredangle DFB = 90° - \beta$$

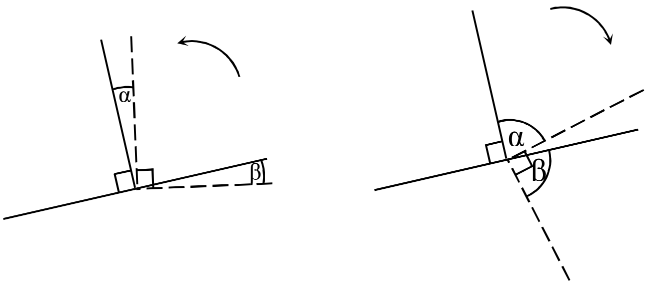
כעת נתמקד בזווית הישרה $\measuredangle EFB$. זווית זו מורכבת מ-α ומזווית $\measuredangle DFB$. לפיכך :

$$\measuredangle DFB = 90° - \alpha$$

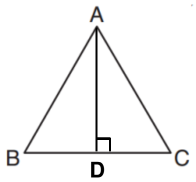
כעת נשווה בין שני הגדלים שמצאנו עבור זווית $\measuredangle DFC$:

$$90° - \alpha = 90° - \beta \quad \Rightarrow \quad \alpha = \beta$$

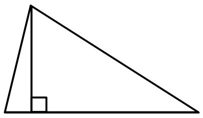
שימו לב, כדי להבחין בשוויון בין α ל-β בבירור וללא חישובים, ניתן להזיז את זווית $\measuredangle DFC$, שכן מיקומה גמיש. אם נזיז אותה עם כיוון השעון (תוך שמירה על הנתון שלפיו גודלה 90°), הגדלים של α ו-β ילכו ויתקרבו ל-90°. אם נזיז אותה כנגד כיוון השעון, הגדלים של α ו-β ילכו ויתקרבו ל-0°, כמתואר בסרטוטים מטה. לפיכך, $\alpha = \beta$.



5. תשובה (3) נכונה. שאלה 14 מתוך 20 בפרק.



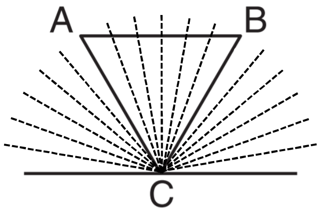
נקודה D על צלע BC היא הנקודה הקרובה ביותר לקדקוד A. הקו הקצר ביותר המחבר בין נקודה לישר, הוא הקו היוצא מנקודה זו ומאונך לישר. לפיכך, $AD \perp DC$.



שימו לב: המשולש בסרטוט נראה שווה צלעות, אך אין נתון שמוכיח זאת, ולכן יתר התשובות אינן בהכרח נכונות. ניתן לראות זאת במשולש אחר: הישר AD מאונך לבסיס, אך אף תשובה אחרת אינה מתקיימת.

---

6. תשובה (1) נכונה. שאלה 15 מתוך 20 בפרק.



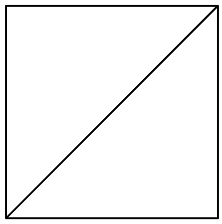
נבין שמכיוון שקדקוד C מקובע בסיבוב, הצלעות AC ו-BC הן שיצרו את הצורה שתתקבל מהסיבוב. מכיוון שאורך הצלעות זהה (נתון כי המשולש הוא שווה צלעות) המרחק שלהן מנקודה C יהיה קבוע. לכן הצלעות במהלך הסיבוב הן למעשה כמו רדיוסים, השווים באורכם, ועל כן הצורה שתהיה לקו תהיה של חצי מעגל.

---

7. תשובה (3) נכונה. שאלה 15 מתוך 20 בפרק.

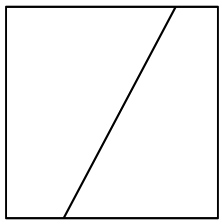
רועי גוזר את ריבוע הנייר שברשותו לאורך קו ישר. כדי לקבוע אילו צורות לא יוכל לקבל, נפסול 3 תשובות באמצעות הוכחה שמדובר בצורות שהוא כן יכול לקבל:

(1) 2 משולשים:

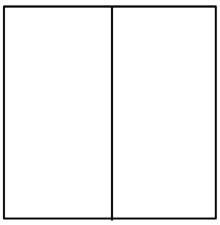


(3) 2 מעוינים:
לא ניתן ליצור 2 מעוינים.
למען הסר ספק ננסה לפסול את התשובה הבאה.

(2) 2 טרפזים:



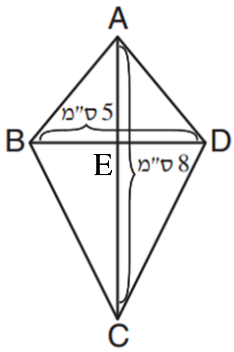
(4) 2 מלבנים:



פסלנו 3 תשובות ועל כן תשובה (3) נכונה.

---

8. תשובה (4) נכונה. שאלה 15 מתוך 20 בפרק.

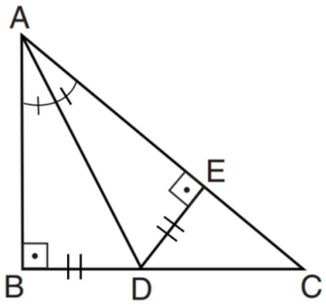


לפנינו דלתון ABCD. ידועים אורכי האלכסונים, ועלינו לקבוע מה היקף הדלתון. למען הנוחות נסמן את מפגש האלכסונים באות E.

אנו יודעים כי בדלתון האלכסון הראשי (AC) חוצה את האלכסון המשני (BD). לפיכך $BE = ED = 2.5$. כדי לדעת מהו אורך הצלע AB למשל (ששווה לצלע AD), נצטרך לדעת מהו אורך AE – על מנת להשתמש בפיתגורס במשולש ישר הזווית AEB. אולם אין לנו דרך לגלות כיצד האלכסון המשני מחלק את האלכסון הראשי כיוון שאין כלל כזה בדלתון, והסרטוט לפיכך גמיש במידה מסוימת, ולכן היקף הדלתון אינו קבוע.

---

9. תשובה (4) נכונה. שאלה 17 מתוך 20 בפרק.



התשובות משוות בין הצלעות AB ו-AE ובין הצלעות BD ו-DC. נתחיל בבדיקת הקשר בין AE ו-AB. כל אחת מהצלעות הללו היא ניצב במשולש ישר זווית. נתון כי AD חוצה את הזווית $\measuredangle BAC$, ולפיכך: $\measuredangle BAD = \measuredangle DAE$. מאחר שבשני המשולשים זווית ישרה, מדובר במשולשים דומים (כל הזוויות שלהם שוות). כמו כן, הם בעלי צלע משותפת AD ועל כן הם חופפים. לפיכך, $AB = AE$. תשובות (1) ו-(2) נפסלות.

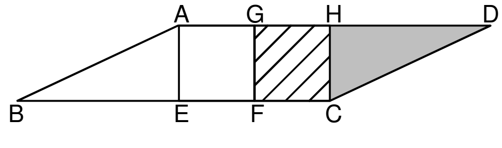
כעת נבחן את הקשר בין DC ל-BD. צלעות אלה אינן נמצאות באותו משולש ולכן כדי ללמוד על קשר זה, ננסה להשוות ביניהן בדרך אחרת. BD שווה ל-DE (מאחר שהמשולשים ABD ו-AED חופפים).

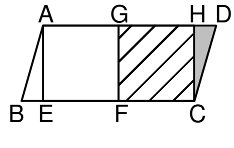
נתמקד במשולש DEC. צלע DC היא היתר במשולש ולכן היא הצלע הגדולה ביותר בו (מול הזווית הגדולה במשולש, 90°, מונחת הצלע הגדולה). כלומר, $DE < DC$. כפי שהסברנו לעיל, $DE = BD$. לפיכך, $BD < DC$.

---

10. תשובה (4) נכונה. שאלה 18 מתוך 20 בפרק.

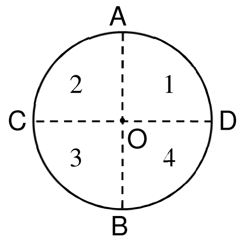
לפנינו מקבילית ובתוכה שני ריבועים חופפים. עלינו לקבוע איזו טענה נכונה באשר לגודל המשולש הכהה (CHD) והריבוע המקווקו (GFCH). לשם כך, נבדוק האם הסרטוט גמיש. הנתון היחיד באשר למקבילית הוא שהיא מכילה שני ריבועים חופפים. לפיכך המקבילית גמישה, ואנו יכולים להאריך או לקצר את צלעות AD ו-BC תוך שמירה על הנתונים (כלומר, אנו יכולים להזיז את הקדקודים D ו-B כמה רחוק או קרוב שנרצה), כמתואר בסרטוטים הבאים:



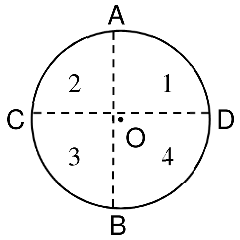


לפיכך, לא ניתן לקבוע האם שטח המשולש הכהה גדול, קטן או שווה לשטח הריבוע המקווקו.

.11 תשובה (1) נכונה. שאלה 18 מתוך 20 בפרק.

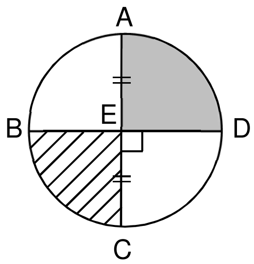


AB ו-CD הם מיתרים במעגל שמרכזו O, והם מאונכים זה לזה ומחלקים את המעגל ל-4 שטחים. נקודה O נמצאת בתוך שטח 4. עלינו לקבוע מה הקשר בין שטח 1 לשטח 2. כדי ללמוד על גדלי השטחים הללו, נבחן מצב מוכר בו המיתרים AB ו-CD חוצים זה את זה בדיוק במרכז המעגל (כמתואר בסרטוט משמאל). במצב זה, גודלם של 4 השטחים יהיה זהה, מפני שכל גזרה מהווה בדיוק רבע משטח המעגל.

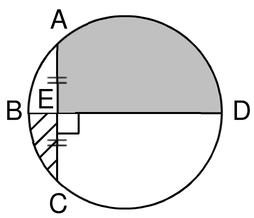


לעומת זאת, במצב המוצג בשאלה, מיתר CD נמצא מעל למרכז המעגל. כך, הוא מקטין באופן שווה את שטחים 1 ו-2. בנוסף, מיתר AB נמצא משמאל למרכז המעגל ולכן הוא מקטין את שטח 2 ומגדיל את שטח 1. על כן, שטח 1 גדול משטח 2.

.12 תשובה (4) נכונה. שאלה 18 מתוך 20 בפרק.



במעגל שלפנינו שני מיתרים – AC ו-BD. המיתרים נפגשים בנקודה E, כך ש-AE = EC. עלינו לקבוע מה הקשר בין השטח הכהה לשטח המקווקו. שימו לב, נקודה E אינה בהכרח ממוקמת במרכז המעגל. אילו הנקודה אכן הייתה ממוקמת במרכז המעגל, השטחים היו שווים והתשובה הייתה (3).



לעומת זאת, ייתכן מצב בו מיתר AC יהיה משמאל למרכז המעגל, כך שהשטח הכהה יהיה גדול יותר מהשטח המקווקו, ואז התשובה הייתה (1). כמו כן, ייתכן המצב ההפוך, ואז התשובה הייתה (2). לפיכך, תשובה (4) נכונה.

.13 תשובה (3) נכונה. שאלה 18 מתוך 20 בפרק.

לפנינו מעוין וריבוע שאורכי צלעותיהם שווים. עלינו לקבוע איזו טענה נכונה בהכרח. נבדוק את התשובות.

טיפ: בהצבת תשובות, כדאי להתחיל בתשובות הנוחות יותר. מפני שידוע לנו שניתן להשוות בין שטחי הצורות בעזרת יעילות צורה, נתחיל בבדיקת תשובה (3).

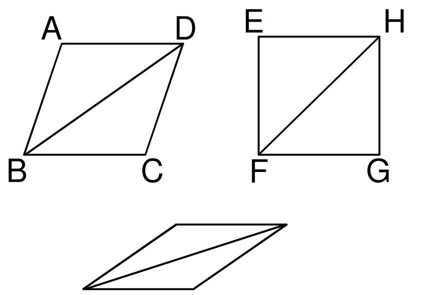
<u>נבדוק את תשובה (3) :</u> "שטח הריבוע גדול משטח המעוין".
כאמור, אורכי צלעות המעוין והריבוע שווים. לפיכך, היקפיהם שווים. מאחר שההיקפים זהים, לצורה היעילה מבין השתיים יהיה שטח גדול יותר. ריבוע הוא מרובע משוכלל, בעוד שמעוין הוא מרובע לא משוכלל. לפיכך, הריבוע יעיל יותר ושטחו אכן גדול יותר. **תשובה נכונה.**

טיפ: ברגע שמצאנו תשובה נכונה אין צורך להמשיך לבדוק את שאר התשובות, אך למען שלמות ההסבר נפסול אותן :

<u>נבדוק את תשובה (1) :</u> $AB < AC$.
נתמקד במשולש ABC שבמעוין, מפני ששני הקטעים מהווים צלעות במשולש זה. ידוע כי גודלה של זווית $\measuredangle ABC$ הוא $50°$. משולש ABC הוא שווה שוקיים, שכן שתיים מצלעותיו מהוות צלעות במעוין ולכן הן שוות. לפיכך, גודלה של כל זווית בסיס הוא $65°$ $\left(\frac{180°-50°}{2}\right)$. במשולש הצלע הגדולה מונחת מול הזווית הגדולה. לפיכך, צלע AB, שמונחת מול זווית שגודלה $65°$, גדולה מצלע AC, המונחת מול זווית שגודלה $50°$. הטענה לא נכונה, התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (2) :</u> "היקף הריבוע גדול מהיקף המעוין".
כאמור, נתון $EF = AB$. כלומר, אחת מצלעות הריבוע שווה לאחת מצלעות המעוין. מאחר שכל הצלעות שוות הן בריבוע והן במעוין, היקף הריבוע שווה להיקף המעוין. הטענה לא נכונה, התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (4) :</u> $BD < EG$.



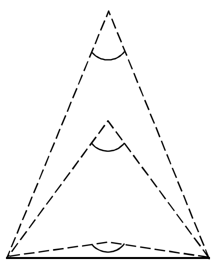
BD הוא האלכסון הארוך במעוין ABCD, ו-EG הוא אלכסון בריבוע EFGH. למען נוחות ההסבר, נעסוק באלכסון HF אשר שווה לאלכסון EG.
נשווה בין המרובעים שלפנינו. האלכסונים BD ו-EG חוצים את המרובעים למשולשים שווי-שוקיים. זווית הראש במשולש BAD קהה ($\measuredangle BAD$), ואילו זווית הראש במשולש FEH ישרה ($\measuredangle FEH$).
כאמור, השוקיים בשני המשולשים שוות ($BA = AD = FE = EH$).
לכן, ככל שנגדיל את זווית הראש במשולשים הללו, כך בסיסם יגדל.
כלומר, כך אלכסון המרובע יגדל. ניתן לבחון מקרים קיצוניים יותר כדי להבין נקודה זו, כמתואר בסרטוט.
לפיכך, $BD > EG \Leftarrow BD > FH$. הטענה לא נכונה, התשובה נפסלת.

.14 תשובה (1) נכונה. שאלה 18 מתוך 20 בפרק.

עלינו לקבוע מה הקשר בין α ל-β. לשם כך, ננסה למצוא גודל מוכר המקשר ביניהן. α מהווה זווית חיצונית למשולש BEA ועל כן היא שווה לסכום הזוויות הפנימיות שאינן צמודות לה. כלומר :

$$\alpha = \beta + \measuredangle ABE$$

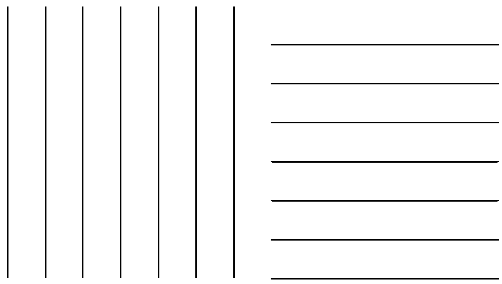
לפיכך, $\beta < \alpha$.



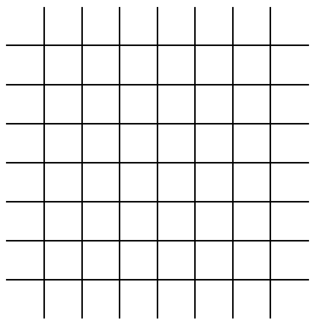
שימו לב, הצלע שעליה נשענת כל אחת מהזוויות α ו-β זהה (BD). באופן כללי, ככל שנקרב את קדקוד הזווית לצלע שעליה הזווית נשענת, כך הזווית תגדל ("תיפתח"), וככל שנרחיק את הקדקוד, כך הזווית תקטן (מפני שהיא הולכת ו"נסגרת"), כמתואר בסרטוט. על כן, $\beta < \alpha$.

15. תשובה (1) נכונה. שאלה 18 מתוך 20 בפרק.

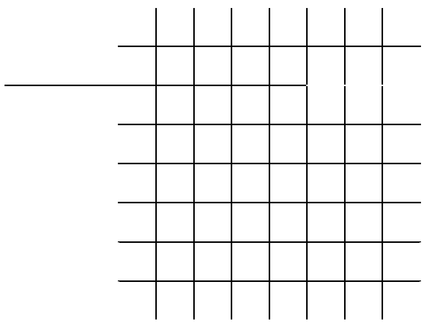
קטע הוא קו שיש לו התחלה וסוף. נשרטט 7 קטעים מקבילים ו-7 קטעים המאונכים להם במצבי קיצון, על מנת להבין מה הטווח האפשרי.



כפי שניתן לראות בסרטוט שלעיל, ייתכן מצב שבו לא יהיה אף מפגש בין זוג קטעים ויהיו 0 נקודות חיתוך.

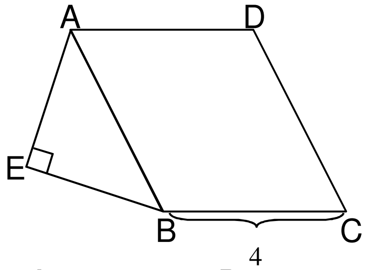


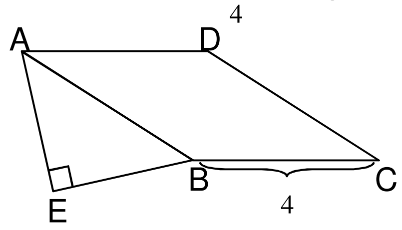
מסרטוט זה נבין כי המספר המקסימלי של נקודות חיתוך הוא 49. כעת ננסה להבין האם כל מצב בטווח זה ייתכן.



ניתן לראות כי ניתן להזיז כל אחד מהקטעים כך שיחתוך רק חלק מהקטעים המאונכים לו, ולכן כל מספר בטווח שמצאנו, בין 0 ל-49, יכול להיות מספר נקודות החיתוך בין הקטעים.

16. תשובה (4) נכונה. שאלה 19 מתוך 20 בפרק.





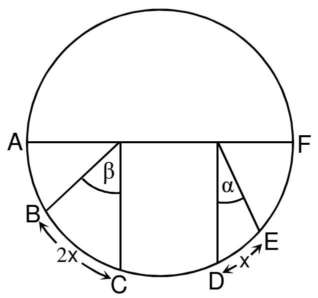
לפנינו מקבילית ABCD, שעל אחת מצלעותיה בנוי משולש ישר זווית ושווה שוקיים AEB. עלינו לקבוע מה שטח המקבילית. לשם כך, אנו צריכים לדעת אורך של צלע ואורך של הגובה לצלע זו.

נבחן את הנתונים: $BC = 4$, שטח המשולש הוא $\frac{25}{2}$ סמ"ר. בעזרת שטח המשולש הנתון, ניתן למצוא את אורכי צלעותיו (שכן שטח משולש כסף שווה למחצית מכפלת הניצבים). עם זאת, מידע זה לא מסייע לנו במציאת הנתונים הדרושים לחישוב שטח המקבילית.

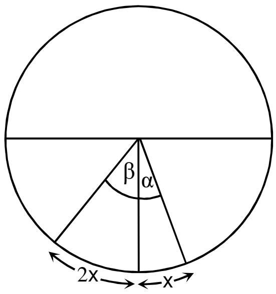
אילו היינו מוצאים את אורכי הניצבים במשולש, ובעזרתם היינו מוצאים את אורך היתר AB, הדבר לא היה מסייע לנו. זאת מפני שייתכנו מקביליות ששטחיהן שונים, אך אורכי צלעותיהן שווים (כמתואר בסרטוט). לפיכך, לא ניתן לקבוע מה שטח המקבילית על סמך הנתונים.

---

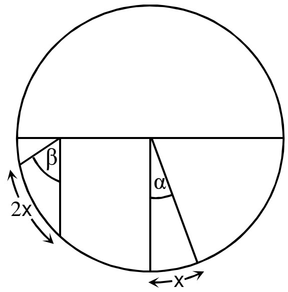
17. תשובה (4) נכונה. שאלה 20 מתוך 20 בפרק.



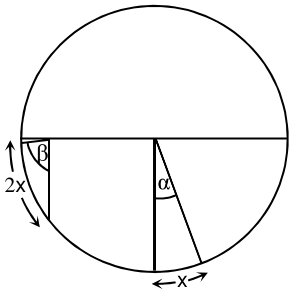
לפנינו מעגל ובו AF הוא קוטר. נתון שהקשת BC גדולה פי 2 מהקשת DE. עלינו לקבוע מה הקשר בין 2α ל-β. כדי לעשות זאת, נמיר את המצב המתואר בסרטוט במצב מוכר, תוך שמירה על הנתונים.



מיקומם של קדקודי הזוויות על קוטר AF אינו מוגדר, ולכן מיקומם גמיש. אילו קדקודי הזוויות היו ממוקמים במרכז המעגל, זווית α וזווית β היו זוויות מרכזיות. במצב זה, $2\alpha = \beta$, מפני שישנו יחס ישר בין גודל הזווית המרכזית לגודל הקשת הנשענת עליה. אם הקשת גדולה פי 2, אז הזווית המרכזית גדולה פי 2. כעת ניתן לפסול את תשובות (1) ו-(2).



כדי להכריע בין שתי התשובות הנותרות, נבדוק מצב נוסף. נתאר מצב שונה ככל הניתן, כדי שנוכל לזהות שינויים (אם ישנם). נרחיק את קשת BC שמאלה, ובכך נקרב את זווית β להיקף המעגל. ניתן להבחין בכך ש-β גדלה.



שימו לב, גודלה של β יכול אף להיות כמעט $90°$ כמתואר בסרטוט.

מאחר שקיבלנו מספר מצבים שבהם גודלה של β שונה (ובאופן דומה ניתן לשנות גם את גודלה של α), לא ניתן לקבוע מה הקשר בין 2α ל-β. תשובה (4) נכונה.

18. תשובה (1) נכונה. שאלה 20 מתוך 20 בפרק.

דרך א' – הבנה גיאומטרית

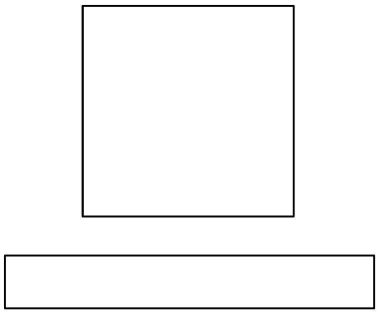
נתונים מלבן וריבוע שהיקפם זהה (a). עלינו לקבוע מה הקשר בין שטחיהם. לשם כך, נבין את יעילות הצורות שלפנינו. כידוע, צורה מוגדרת כיעילה יותר, ככל שהיא דומה יותר למעגל. כלומר, ככל שהצורה משוכללת יותר, כך היא תהיה יעילה יותר.

מאחר שההיקפים זהים, לצורה היעילה מבין השתיים יהיה שטח גדול יותר. ריבוע הוא מרובע משוכלל, בעוד שמלבן הוא מרובע לא משוכלל. לפיכך, הריבוע יעיל יותר ושטחו גדול יותר.

דרך ב' – הצבת התשובות

נבדוק את התשובות ונפסול כל תשובה שנצליח לסרטט מקרה הסותר אותה.

<u>נבדוק את תשובה (1):</u> אין דרך לסרטט את המלבן כך ששטחו יהיה גדול או שווה לשטח הריבוע. אפשר לסמן את התשובה, אולם אם אינכם בטוחים, ניתן להמשיך ולבדוק את יתר התשובות בזריזות. **תשובה נכונה.**



<u>נבדוק את תשובה (2):</u> ניתן לסרטט ריבוע ששטחו דווקא גדול משטח המלבן. לכן, אין זה נכון בהכרח ששטח הריבוע קטן משטח המלבן. התשובה נפסלת.

<u>נבדוק את תשובה (3):</u> כפי שהראינו לעיל, ניתן לסרטט מקרה הסותר את האמור בטענה זו. יתרה מכך, הדרך היחידה לסרטט ריבוע ומלבן שווים בשטחם ובהיקפם, היא כאשר הריבוע והמלבן חופפים. אילו הם היו חופפים, המלבן היה גם ריבוע. נתון כי המלבן <u>אינו</u> ריבוע, ולכן מצב זה אינו אפשרי. התשובה נפסלת.

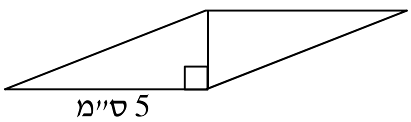
<u>נבדוק את תשובה (4):</u> כדי לפסול תשובה זו, ניתן לנסות לסרטט מקרה הסותר את תשובה (1). מאחר שאין אפשרות כזו, ניתן לסמן את תשובה (1).

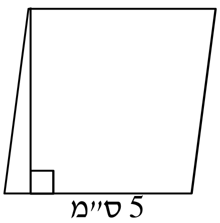
---

19. תשובה (1) נכונה. שאלה 20 מתוך 20 בפרק.

נתון שהיקף המעוין הוא 20 ס״מ. מכיוון שבמעוין כל הצלעות שוות זו לזו, אורך צלע המעוין הוא 5 ס״מ $\left(\frac{20}{4}\right)$.

כעת, עלינו להבין כי שינוי של הגובה לצלע המעוין ישנה גם את השטח, לדוגמה:





השטח המינימלי של המעוין נושק ל-0 ויכול להגיע עד 25 סמ״ר (אם ניישר אותו לריבוע), כאשר כל שינוי בגובה ייצור מעוין בעל שטח שונה. משום שהשטח המבוקש, 12 סמ״ר, נמצא בתחום של השטחים האפשריים, ישנו מעוין כזה; עם זאת, ישנו גובה מסוים אחד שיכול לגרום לכך ששטח המעוין יהיה בדיוק 12 סמ״ר, ולכן יש רק מעוין אחד אפשרי.

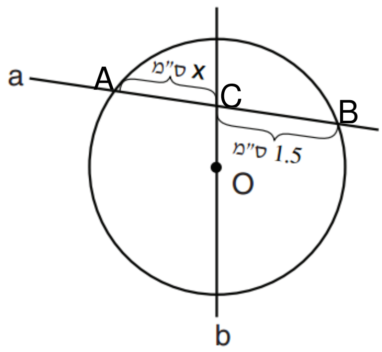
נציג זאת גם באופן אלגברי; מצאנו שצלע המעוין היא בהכרח 5 ונתון כי שטחו של המעוין הוא 12 סמ״ר. נציב נתונים אלו בנוסחה לחישוב שטח מעוין (גובה לצלע · צלע):

$$\mathrm{h} \cdot 5 = 12$$

$$\mathrm{h} = \frac{12}{5} = 2\frac{2}{5}$$

מכאן שיש רק גובה אחד שיביא למעוין ששטחו 12 סמ״ר, ולכן קיים רק מעוין אחד כזה.

20. תשובה (1) נכונה. שאלה 20 מתוך 20 בפרק.



לפנינו ישרים a ו-b החותכים מעגל שרדיוסו 2 ס"מ. עלינו לקבוע מה הטווח המתאים עבור x, המהווה חלק ממיתר במעגל. למען נוחות ההסבר, נסמן את נקודות החיתוך של ישר a עם המעגל ועם ישר b באותיות כמתואר בסרטוט.

ידוע שהישר a לא עובר דרך הנקודה O. כלומר, מיתר AB אינו קוטר במעגל. לפיכך, אורכו של AB קטן מאורך הקוטר, שכן הקוטר הוא המיתר הגדול ביותר במעגל. כלומר:

$$AB < 2r \quad \Rightarrow \quad AB < 4$$

מיתר AB מורכב מקטעים AC ו-CB. ידוע כי $AC = x$ וכן כי $CB = 1.5$. נבטא זאת באופן אלגברי:

$$AB = AC + CB = x + 1.5$$

לכן:

$$AB < 4 \quad \Rightarrow \quad x + 1.5 < 4$$
$$x < 2.5$$